Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
и задания к контрольной работе № 3

Минск 2007

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания к контрольной работе № 3 для студентов-заочников II курса ФТУГ специальностей 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» 1-36 20 02 «Упаковочное производство»

Минск 2007

~~УДК 51 (075.)~~
~~ББК 22.1я~~7
~~М 54~~

Составители:
З.М. Алейникова, М.В. Кураленко,
М.Н. Покатилова, А.Ф. Шидловская

Рецензент
доцент кафедры «Высшая математика № 1» БНТУ,
кандидат физ.-мат. наук *Т.С. Яцкевич*

В настоящем издании помещены программы и контрольные задания (25 вариантов) по двойным и криволинейным интегралам. Приводятся краткие теоретические сведения, даны подробные решения типовых примеров.

Студентам рекомендуется изучить теоретический материал, проработать образцы решений типовых примеров, а затем выполнить контрольное задание по номеру варианта, который совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра). Если номер шифра больше двадцати пяти, то следует из него вычесть число двадцать пять. Полученный результат будет номером варианта.

ПРОГРАММА

Т е м а 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие двойного интеграла. Сведение к повторному. Геометрический смысл двойного интеграла. Вычисление площадей с помощью двойного интеграла. Физический смысл двойного интеграла. Вычисление массы неоднородной пластинки.

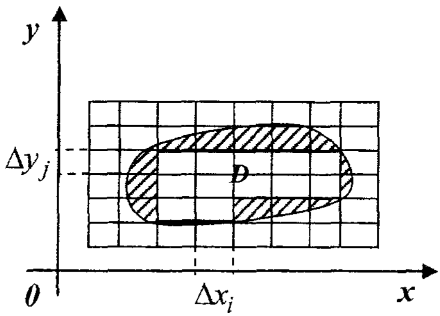
Т е м а 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие криволинейных интегралов первого и второго рода. Вычисление криволинейных интегралов. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода. Вычисление массы кривой. Механический смысл криволинейного интеграла второго рода. Вычисление работы силы. Формула Грина.

Тема 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие двойного интеграла

Пусть рассматривается множество D на плоскости xOy. Построим покрывающую это множество решетку.



На рисунке штриховкой обозначена часть множества D, не покрытая полными клетками решетки. Очевидно, площадь этой части уменьшается по мере того, как увеличивается число клеток разбиения, т.е. уменьшаются размеры клеток (для простоты будем считать, что все клетки имеют одинаковые размеры). Занумеруем клетки решетки индексами i,j $(i=1,\ldots, n;\ j = 1,.., m)$, где i - номер клетки по горизонтали (считая слева направо), а j - номер клетки по вертикали (считая снизу вверх). Пусть Δx_i и Δy_j - соответственно длина горизонтальной и вертикальной сторон клетки Δ_{ij}. Тогда при $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_j \to 0$ площадь заштрихованной части множества D стремится к нулю и можно утверждать: $D_{\text{клет}} \to D$, где $D_{\text{клет}}$ - это часть множества D покрытая целыми клетками решетки.

В каждой клетке Δ_{ij} выберем произвольную точку (ξ_i,η_j).

Интегральной суммой функции $z = f(x,y)$ **на множестве** $\boldsymbol{D}$ называется сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j \ .$$

Обозначим через d диаметр клетки, т.е. ее наибольший линейный размер (в данном случае $d=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2}$ - длина диагонали клетки).

Функция $z=f(x,y)$ называется **интегрируемой на множестве *D***, если существует конечный предел I интегральной суммы этой функции на D при условии $d \to 0$. Само значение предела I называется **двойным интегралом функции** $z=f(x,y)$ **на множестве *D***.

Обозначается двойной интеграл следующим образом:

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Замечание. Указанный предел I интегральной суммы не должен зависеть ни от способа разбиения множества D на элементарные ячейки (лишь для простоты в качестве таких ячеек мы использовали прямоугольные клетки), ни от выбора точек (ξ_i,η_j) в каждой ячейке.

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Свойства двойного интеграла

1^0. Если функция $z=f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ существует.

2^0. $\int\limits_D cf(x,y)dxdy=c\int\limits_D f(x,y)dxdy$, где c – константа.

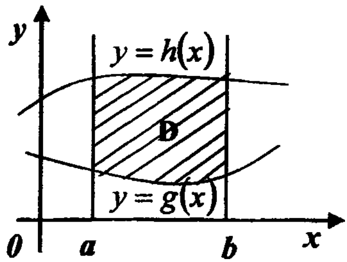
3^0. $\int\limits_D (f(x,y)\pm g(x,y))dxdy=\int\limits_D f(x,y)dxdy\pm\int\limits_D g(x,y)dxdy$.

4^0. Пусть область $D=D_1\bigcup D_2$, причем области D_1 и D_2 либо не пересекаются, либо пересекаются в отдельных точках, либо по некоторой линии. Тогда

$$\int\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\int\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Вычисление двойного интеграла

Множество D на плоскости xOy называется **элементарным относительно оси Ox**, если его граница состоит из графиков двух непрерывных функций $g(x)$ и $h(x)$, определенных на некотором отрезке $[a,b]$, и таких, что $g(x) \le h(x)$, и из отрезков прямых $x=a$ и $x=b$.



Двойной интеграл может быть вычислен с помощью теоремы, представляющей двумерный аналог формулы Ньютона-Лейбница.

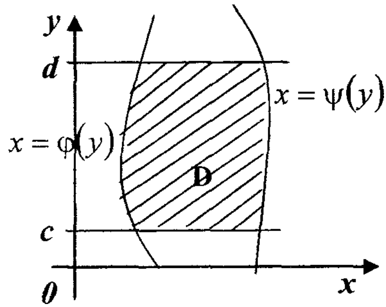
Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна на элементарном множестве D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx .$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется повторным интегралом и обычно записывается в виде

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy .$$

Замечания. 1. Множество D на плоскости xOy называется **элементарным относительно оси Oy**, если его граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, определенных на некотором отрезке $[c,d]$, и таких, что $\varphi(y) \le \psi(y)$, и из отрезков прямых $y=c$ и $y=d$.



Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

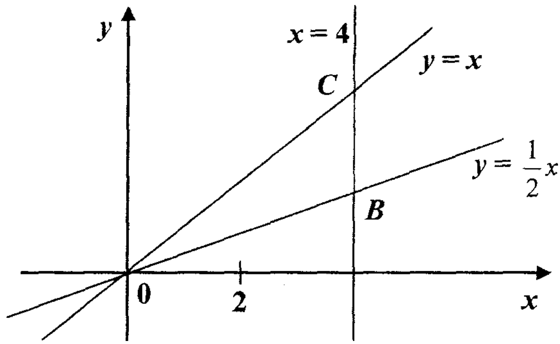
2. В повторном интеграле пределы внешнего интеграла всегда постоянны. Они находятся если спроецировать область D на ось *Ox(Oy)*.

Пределы внутреннего интеграла в общем случае переменные, то есть являются функциями. Для того, чтобы их найти надо через любую внутреннюю точку области D провести луч параллельный оси *Oy(Ox)* в ее направлении. Нижним пределом будет значение переменной *y(x)* из уравнения той линии в которую она вошла, а верхним – значение переменной *y(x)* из уравнения той линии из которой она вышла.

Пример 1.1. Изобразить область интегрирования и изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

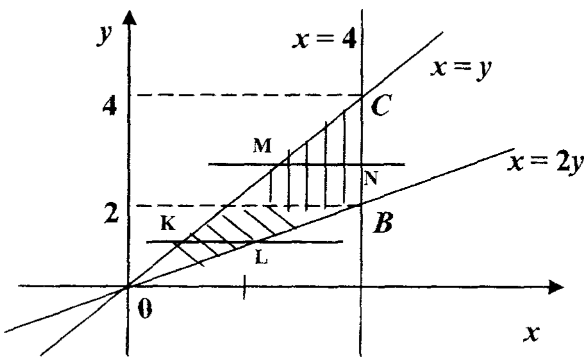
$$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x,y)dy.$$

Решение. Выпишем уравнения линий, ограничивающих область интегрирования D. Т. к. они должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл, то имеем $y = \frac{1}{2}x,\ y = x,\ x = 0,\ x = 4$. Сделаем чертеж области D.



Получили, что область D в данном случае – это треугольник OBC.

Изменим порядок интегрирования: внутреннее интегрирование будем производить по переменной x, а внешнее по переменной y. Сделаем тот же чертеж еще раз.



Из чертежа видно, что левая часть границы области D – одна линия, а именно, $y=x$, а его правая часть состоит из двух линий OB и BC, определяемых разными уравнениями: $y = \frac{1}{2}x$ (или, что то же самое, $x = 2y$) и $x=4$. Следует область разбить на части так, чтобы каждая из них справа ограничивалась тоже одной линией. Такими частями будут (D_1) - треугольник OAB и (D_2) - треугольник ABC. Интеграл представляется как сумма интегралов

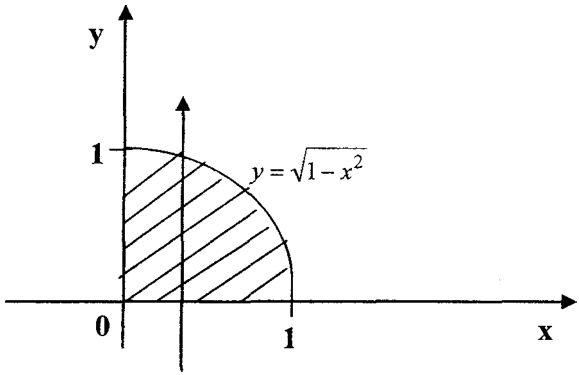
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 f(x,y)dx \, .$$

Пределы интегрирования в первом повторном интеграле получены так: область D_1 спроецирована на ось Oy. Получится отрезок [0; 2]. Этим были определены нижний предел 0 и верхний предел 2 изменения переменной y во внешнем интеграле. Затем на отрезке [0; 2] оси Oy выбрана произвольная точка y, через которую проведена прямая, параллельная оси Ox, и на ней рассмотрен отрезок KL, содержащийся в области D_1. Переменная x изменяется в области D_1 от ее значения y на левой части контура OAB до ее значения $2y$ на правой части этого контура. (Уравнения линий, ограничивающих область D_1, должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл).

Пределы интегрирования во втором повторном интеграле получены так: область D_2 спроецирована на ось Oy. Получится отрезок [2; 4]. Этим были определены нижний предел 2 и верхний предел 4 изменения переменной y во втором внешнем интеграле. Затем на отрезке [2; 4] оси Oy выбрана произвольная точка y, через которую проведена прямая, параллельная оси Ox, и на ней рассмотрен отрезок MN, содержащийся в области D_2. Переменная x изменяется в области D_2от ее значения y на левой части контура ABC до ее значения 4 на правой части этого контура. (Уравнения линий, ограничивающих область D_2, должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл).

Пример 1.2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x + y^3\right)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y = \sqrt{1 - x^2}, x = 0, y = 0$.

Решение. Область интегрирования D ограничена прямыми $x = 0, y = 0$ (осями координат) и окружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ (для $y \geq 0$ возведем в квадрат последнее равенство, получим $y^2 = 1 - x^2$ или $x^2 + y^2 = 1$). Сделаем чертеж области D.



Чтобы расставить пределы интегрирования в повторном интеграле надо спроецировать область D на ось Ox. Получится отрезок [0; 1]. Этим определяются нижний предел 0 и верхний предел 1 изменения переменной x во внешнем интеграле. Затем на отрезке [0; 1] оси Ox выбираем произвольную точку x, через которую проводим луч, параллельный оси Oy в ее направлении. Нижним пределом будет значение переменной y из уравнения той линии в которую луч вошел ($y=0$), а верхним – значение переменной y из уравнения той линии из которой луч вышел ($y=\sqrt{1-x^2}$).

$$\iint\limits_D \left(x+y^3\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x+y^3\right)dy.$$

Считая при вычислении внутреннего интеграла x постоянной, имеем

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x+y^3\right)dy=\int\limits_0^1 dx\left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x\sqrt{1-x^2}+\frac{\left(1-x^2\right)^2}{4}\right)dx=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\underline{xdx}+\int\limits_0^1\frac{\left(1-x^2\right)^2}{4}dx=$$

$$= \left| \begin{array}{l} d\left(1-x^2\right) = -2xdx \\ xdx = -\frac{1}{2} d\left(1-x^2\right) \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{1/2} d\left(1-x^2\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 \left(1-2x^2+x^4\right)dx = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{4}\left(x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{3/2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - 0\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{15-10+3}{15} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

Приложение двойного интеграла

1. Геометрический смысл двойного интеграла. Если функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ представляет собой объем прямого цилиндрического тела (цилиндроида), построенного на области D как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, образующие которого параллельны оси Oz.

2. Если $f(x, y) = 1$ для всех $(x, y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ численно равен площади области D.

3. Если $f(x,y) = \rho(x,y)$ - плотность пластинки D, то $\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = m_D$ - масса плоской пластинки D.

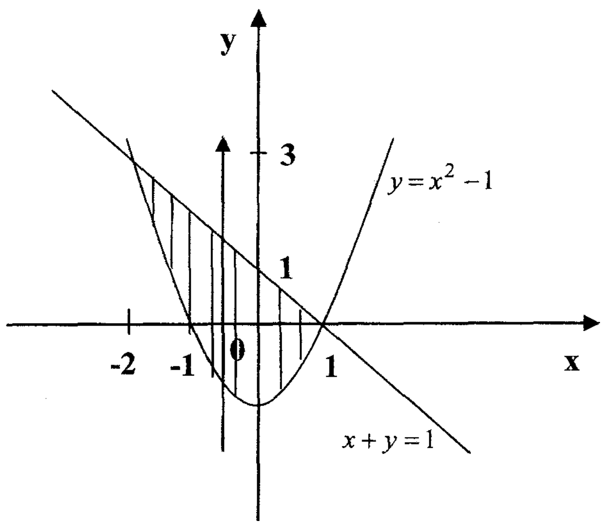
Пример 1.3. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной линиями $y = x^2 - 1, x + y = 1$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\rho = 4x - y + 7$.

Решение. Область интегрирования D ограничена прямой $x + y = 1$ и параболой $y = x^2 - 1$ (или $x^2 = y + 1$ – это парабола с вершиной в точке (0, -1), симметричная относительно оси Oy, ветви направлены вверх). Найдем координаты точек пересечения прямой и параболы. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ y=x^2-1, \end{cases} \begin{cases} y=1-x, \\ 1-x=x^2-1, \end{cases} \begin{cases} y=1-x, \\ x^2+x-2=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-x, \\ Д=1-4\cdot(-2)=9,\ x_1=1,\ x_2=-2, \end{cases} \begin{cases} x_1=1,\ y_1=0, \\ x_2=-2,\ y_2=3. \end{cases}$$

Сделаем чертеж области D.



Масса неоднородной пластины D с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,y)$ вычисляется по формуле

$$m=\iint_D \rho(x,y)dxdy.$$

В нашем случае $m=\iint_D (4x-y+7)dxdy$.

Чтобы расставить пределы интегрирования в повторном интеграле надо спроецировать область D на ось Ox. Получится отрезок [-2; 1]. Этим определяются нижний предел -2 и верхний предел 1 изменения переменной x во внешнем интеграле. Затем на отрезке [-2; 1] оси Ox выбираем произвольную точку x, через которую проводим луч, параллельный оси Oy в ее направлении. Нижним пределом будет значение переменной y из уравнения той линии в которую луч вошел ($y=x^2-1$), а верхним – значение переменной y из уравнения той линии из которой луч вышел ($x+y=1$ или $y=1-x$).

$$m=\iint\limits_D(4x-y+7)dxdy=\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{x^2-1}^{1-x}(4x-y+7)dy.$$

Считая при вычислении внутреннего интеграла x постоянной, имеем

$$\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{x^2-1}^{1-x}(4x-y+7)dy=\int\limits_{-2}^{1}dx\left(4xy-\frac{y^2}{2}+7y\right)\Bigg|_{x^2-1}^{1-x}=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(4x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2+7(1-x)\right)dx-$$

$$-\int\limits_{-2}^{1}\left(4x(x^2-1)-\frac{1}{2}(x^2-1)^2+7(x^2-1)\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(4x-4x^2-\frac{1}{2}(1-2x+x^2)+7-7x\right)dx-$$

$$-\int\limits_{-2}^{1}\left(4x^3-4x-\frac{1}{2}(x^4-2x^2+1)+7x^2-7\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(2x-12{,}5x^2+14-4x^3+\frac{1}{2}x^4\right)dx=$$

$$=\left(2\frac{x^2}{2}-12{,}5\frac{x^3}{3}+14x-4\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(x^2-12{,}5\frac{x^3}{3}+14x-x^4+\frac{1}{10}x^5\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=1-12{,}5\cdot\frac{1}{3}+14-1+\frac{1}{10}-\left(4+12{,}5\cdot\frac{1}{3}\cdot8-28-16-\frac{32}{10}\right)=$$

$$=-12{,}5\cdot\frac{1}{3}+14+\frac{1}{10}-4-12{,}5\cdot\frac{8}{3}+28+16+\frac{32}{10}=$$

$$=54-12{,}5\cdot3+\frac{33}{10}=54-37{,}5+3{,}3=19{,}8.$$

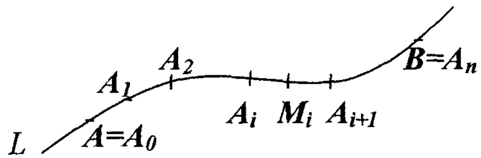
Итак, масса неоднородной пластины *D*, ограниченной линиями $y=x^2-1, x+y=1$, с поверхностной плотностью в каждой её точке $\rho=4x-y+7$ равна 19,8.

Т е м а 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл I рода

Пусть на плоскости xOy задана кривая линия L – гладкая, т.е. функции входящие в ее уравнение являются непрерывными вместе со своими производными. И пусть в каждой точке кривой L определена непрерывная функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y.

Разобьем дугу AB кривой L на n частей точками $A_0=A$, A_1, A_2, ..., $A_n=B$.



На каждой части $A_i\ A_{i+1}$ выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$. Вычислим в этой точке значение заданной на кривой L функции $f(x, y)$. Число $f(x_i, y_i)$ умножим на длину дуги $A_iA_{i+1} = \Delta l_i$. Сложим все эти произведения и получим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i .$$

Отыщем предел этой суммы при условии, что наибольшая из дуг $A_iA_{i+1} = \Delta l_i$ стремится к 0, а их число $n \to \infty$.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, когда длины всех малых участков Δl_i стремятся к 0, при $n \to \infty$, независящий ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек внутри малых частей, то он называется **криволинейным интегралом 1-го рода** (КРИ-1) **от функции** $f(x, y)$ **по кривой** L_{AB} и обозначается символом

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i .$$

Теорема. Если функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках гладкой ограниченной кривой L_{AB}, то КРИ-1 существует.

По аналогии с вышесказанным, если L пространственная кривая, то криволинейным интегралом, распространенным на эту кривую, называется интеграл вида

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl ,$$

где $f(x,y,z)$ - функция трех независимых переменных, определенная в каждой точке кривой L_{AB}, причем

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i .$$

Свойства криволинейного интеграла I рода

1^0. $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{L_{BA}} f(x,y)dl$.

2^0. $\int\limits_{L_{AB}} cf(x,y)dl = c \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl$.

3^0. $\int\limits_{L_{AB}} (f(x,y) \pm g(x,y))dl = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl \pm \int\limits_{L_{AB}} g(x,y)dl$.

4^0. Если $f(x,y)$ интегрируема на L_{AB} и кривая разбита на части точкой C, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{L_{AC}} f(x,y)dl + \int\limits_{L_{CB}} f(x,y)dl .$$

5^0. Если в каждой точке кривой L_{AB} плотность ρ масс, распространенных вдоль кривой является заданной функцией координат этой точки, то есть $\rho = \rho(x, y)$, то масса m_L этой кривой равна КРИ-1:

$$m_{L_{AB}} = \int\limits_{L_{AB}} \rho(x, y) dl.$$

6^0. Если $f(x, y) = 1$, то криволинейный интеграл 1-го рода равен длине кривой L между точками A и B, т.е. $\int\limits_{L_{AB}} dl = L_{AB}$.

Вычисление криволинейного интеграла I рода

1) Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где параметр t изменяется на дуге L_{AB} от $t=\alpha$ до $t=\beta$, а функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны вместе со своими первыми производными, то КРИ-1 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Замечание. Если L_{AB} кривая в пространстве, то $L_{AB}: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t), \end{cases}$ и КРИ-1 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

2). Пусть кривая L задана на плоскости xOy явно уравнением $y = f_1(x)$, $x \in [a,b]$, где функция $f_1(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Представим $y = f_1(x)$ в виде $\begin{cases} x = x, \\ y = f_1(x), \end{cases} x \in [a,b]$, тогда КРИ-1 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, f_1(x))\sqrt{1+(f_1'(x))^2}\,dx.$$

Замечание. Если кривая L задана уравнением $x = f_2(y)$, $y \in [c,d]$, то КРИ-1 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(f_2(y), y)\sqrt{1+(f_2'(y))^2}\,dy.$$

Пример2.1. Вычислить массу m дуги окружности $L: x^2 + y^2 = 9$, лежащей в первой четверти, если плотность в каждой её точке $\rho = \rho(x,y) = xy^2$.

Решение. Масса m дуги L с плотностью в каждой её точке $\rho = \rho(x,y)$ вычисляется по формуле

$$m = \int\limits_L \rho(x,y)dl, \text{ где } dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Из уравнения окружности выразим y: $y = \sqrt{9-x^2}$ и найдём y'

$$y' = \left(\left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(9 - x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Тогда

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{9 - x^2 + x^2}{9 - x^2}}\,dx = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx.$$

Дуга окружности $L : x^2 + y^2 = 9$, лежащая в первой четверти, находится между точками $A(0,3)$, $B(3,0)$. Тогда масса

$$m = \int\limits_{L_{AB}} \rho(x,y)\,dl = \int\limits_{L_{AB}} xy^2\,dl = \int\limits_0^3 x\left(9 - x^2\right)\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx =$$

$$= 3\int\limits_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\,dx = \left| d\left(9 - x^2\right) = -2x\,dx \right| = -\frac{3}{2}\int\limits_0^3 \left(9 - x^2\right)^{1/2}(-2x)\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int\limits_0^3 \left(9 - x^2\right)^{1/2} d\left(9 - x^2\right) = -\frac{3}{2}\left.\frac{\left(9 - x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^3 =$$

$$= -\left.\left(9 - x^2\right)^{3/2}\right|_0^3 = -\left[\left(9 - 3^2\right)^{3/2} - \left(9 - 0^2\right)^{3/2} \right] = -\left(0 - 3^3\right) = 27.$$

Криволинейный интеграл II рода

Пусть во всех точках дуги AB плоской гладкой кривой L определена функция двух независимых переменных $P(x,y)$.

Разобьем дугу L_{AB} на n частичных дуг точками $A_0=A$, A_1, A_2, ..., A_i, A_{i+1}, ..., $A_n=B$. На каждой из частичных дуг выберем произвольную точку M_i (x_i, y_i). Вычислим значение функции $P(x,y)$ в этой точке – $P(x_i,y_i)$. Это число умножим на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось Ox. Сложим все эти произведения и получим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i,y_i)\Delta x_i .$$

Если функция $P(x,y)$ непрерывна во всех точках дуги L_{AB}, то существует предел интегральной суммы S_n при стремлении всех Δx_i к 0, и он не зависит ни от способа разбиения дуги L_{AB} на части, ни от выбора точки M_i на каждой частичной дуге.

Этот предел называется **криволинейным интегралом 2-го рода** (КРИ-2) **от** $P(x,y)dx$ **по дуге** L_{AB} и обозначается

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i,y_i)\Delta x_i .$$

Аналогично, значение функции $P(x,y)$ в точке M_i (x_i,y_i) можно умножить на проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось Оу – Δy_i (а не на Δx_i), то получим произведение $P(x_i,y_i)\Delta y_i$. Предел суммы таких произведений при условии, что все $\Delta y_i \to 0$ также является криволинейным интегралом второго рода и обозначается

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i,y_i)\Delta y_i .$$

В том случае, когда на дуге L_{AB} заданы две непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, то можно рассмотреть криволинейные интегралы второго рода

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{L_{AB}} Q(x,y)dy. \qquad (1)$$

Сумму этих двух интегралов обозначают символом

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

при этом предполагается, что оба интеграла (1) вычисляются в одном и том же направлении.

По аналогии с вышесказанным, если L – пространственная кривая, то криволинейным интегралом 2-го рода по этой кривой называется **интеграл вида**

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – функции трех независимых переменных, определенные в каждой точке кривой L_{AB}.

Свойства криволинейного интеграла II рода

Криволинейный интеграл 2-го рода обладает теми же свойствами, что и криволинейный интеграл 1-го рода. Однако в отличие от последнего он зависит от направления обхода кривой L, а именно:

1^0. При изменении направления интегрирования КРИ-2 меняет знак на противоположный, то есть

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L_{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2^0. **Механический смысл КРИ-2.** Если $\vec{F}(x,y,z)=$ $=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ - сила, действующая на материальную точку, движущуюся вдоль линии L_{AB}, то КРИ-2 есть работа силы $\vec{F}(x,y,z)$ вдоль линии L_{AB}, то есть $A=\int\limits_{L_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$.

Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление КРИ-2 сводится к вычислению определенного интеграла с помощью уравнения пути интегрирования (уравнения кривой L_{AB}).

1). Если кривая L по которой вычисляется КРИ-2, задана параметрическими уравнениями

$L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ где параметр t изменяется на дуге L_{AB} от $t=\alpha$ до $t=\beta$, а функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны вместе со своими первыми производными, то КРИ-2 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt.$$

Замечание. Если L_{AB} кривая в пространстве, то $L_{AB}:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]\\ z=z(t),\end{cases}$ и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – функции трех независимых переменных, определенные в каждой точке кривой L_{AB}, то КРИ-2 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

2). Если кривая L задана на плоскости xOy явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, где функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Представим $y = f(x)$ в виде $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ $x \in [a,b]$, тогда КРИ-2 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx.$$

Замечание. Если кривая L задана уравнением $x = \varphi(y)$, $y \in [c,d]$, то КРИ-2 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} (P(\varphi(y),y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y),y))dy,$$

Пример2.2. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль одного витка винтовой линии $L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t$, т.е. от точки $A(1,\ 0,\ 0)$ до точки $B(1,\ 0,\ 4\pi)$.

Решение. Работа A силового поля

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

вдоль линии L вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \text{, где}$$

$$dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt,\ dz = z'(t)dt.$$

Находим

$$dx = (\cos t)'\,dt = -\sin t dt,\ dy = (\sin t)'\,dt = \cos t dt,$$

$$dz = (2t)'\,dt = 2dt,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$0 \le t \le 2\pi \text{ т.к. } \begin{cases} 1 = \cos t, \\ 0 = \sin t, \text{при t} = 0 \\ 0 = 2t, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 1 = \cos t, \\ 0 = \sin t, \text{при t} = 2\pi. \\ 4\pi = 2t, \end{cases}$$

Тогда работа A силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль одного витка винтовой линии вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 2\cos t \sin t(-\sin t)dt + \sin^2 t \cos t dt + (2t)^2 2dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-2\cos t \sin^2 t + \sin^2 t \cos t + 8t^2)dt =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt + \int\limits_0^{2\pi} 8t^2 dt = \left| d(\sin t) = \cos t dt \right| =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) + \int\limits_0^{2\pi} 8t^2 dt = -\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi} + 8 \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sin^3 2\pi - \sin^3 0\right) + \frac{8}{3}\left[(2\pi)^3 - 0\right] = 0 + \frac{8}{3} \cdot 8\pi^3 = \frac{64\pi^3}{3}.$$

Формула Грина

Криволинейный интеграл второго рода по простому замкнутому гладкому контуру L, ограничивающему односвязную область D, может быть преобразован в двойной интеграл по области D ограниченной этим контуром L по формуле Грина.

Конечная область D называется **односвязной,** если она ограничена единственным замкнутым контуром.

Теорема. Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в замкнутой области D, ограниченной контуром L. Тогда имеет место **формула Грина**

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

при этом выбирается положительное направление обхода замкнутого контура L, то есть обход контура L совершается так, что область D все время остается слева.

Замечание. Если $P(x,y) \equiv 0, Q(x,y) = x$ то из формулы Грина получаем следующую формулу для вычисления площади плоской фигуры D

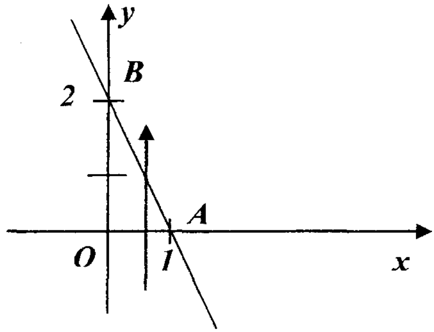
$$S_D = \oint\limits_L xdy.$$

Также для вычисления площади с помощью КРИ-2 применяют формулы

$$S_D = -\oint\limits_L ydx, \quad S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

Пример2.3. Применив формулу Грина, вычислить $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где L – контур треугольника OAB с вершинами в точках $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 2)$ (пробегаемый в положительном направлении) и подынтегральные функции $P(x,y) = xy - 1, Q(x,y) = x^2 y$.

Решение. Построим контур L на координатной плоскости:



Составим уравнение прямой AB, используя формулу

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

уравнения прямой по двум точкам $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$. Имеем

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{2-0}\Rightarrow\frac{y}{2}=1-x\Rightarrow y=2-2x.$$

Найдём частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(xy-1)'_y=x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\left(x^2y\right)'_x=2xy.$$

Тогда по формуле Грина имеем

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$I=\oint_L(xy-1)dx+x^2ydy=\iint_D(2xy-x)dxdy,$$

где D – треугольник OAB. Вычислим двойной интеграл.

$$I=\iint_D (2xy-x)dxdy=\iint_D x(2y-1)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^{2-2x}(2y-1)dy=$$

$$=\int_0^1 xdx\left(2\cdot\frac{y^2}{2}-y\right)\Bigg|_0^{2-2x}=\int_0^1 x\left[(2-2x)^2-(2-2x)-0\right]dx=$$

$$=\int_0^1 x\left(4-8x+4x^2-2+2x\right)dx=\int_0^1\left(4x^3-6x^2+2x\right)dx=$$

$$=\left(4\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\left(x^4-2x^3+x^2\right)\Big|_0^1=$$

$$=1-2+1-0=-2.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задание 1. Изобразить область интегрирования и изменить порядок интегрирования в повторном интеграле от функции $f(x,y)$:

1.1. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

1.2. $\int_0^{\sqrt{2}/2} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

1.3. $\int_{1/2}^1 dx \int_{\sqrt{x^3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

1.4. $\int_1^2 dx \int_0^{1/x} f(x,y)dy.$

1.5. $\int_0^{1/2} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

1.6. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2} f(x,y)dy.$

1.7. $\int_0^2 dx \int_{1/x^2}^{x^2} f(x,y)dy.$

1.8. $\int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x^3}} f(x,y)dy.$

1.9. $\int_0^1 dx \int_0^{e^x} f(x,y)dy.$

1.10. $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} f(x,y)dy.$

1.11. $\int_{1/4}^{1/2} dx \int_{2x}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy.$

1.12. $\int_0^1 dx \int_0^{e^{-x}} f(x,y)dy.$

1.13. $\int_0^{1/2} dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

1.14. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$

1.15. $\int_{1/2}^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy.$

1.16. $\int_2^3 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy.$

1.17. $\int_1^8 dx \int_{\sqrt[3]{x^2}}^{x} f(x,y)dy.$

1.18. $\int_1^2 dx \int_0^{e^x} f(x,y)dy.$

1.19. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x,y)dy.$

1.20. $\int_0^1 dx \int_{(1-x)/2}^{1-x^2} f(x,y)dy.$

1.21. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

1.22. $\int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

1.23. $\int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{x^3}^{x} f(x,y)dy.$

1.24. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1/2}^{e^{-x}} f(x,y)dy.$

1.25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)dy.$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

2.1. $\iint\limits_{D}(x+y)dxdy,\ D: y=x^3, y=8, y=0, x=3.$

2.2. $\iint\limits_{D}x(2x+y)dxdy,\ D: y=1-x^2, y\geq 0.$

2.3. $\iint\limits_{D}y(1-x)dxdy,\ D: x=y^3, y=x.$

2.4. $\iint\limits_{D}xy^3dxdy,\ D: y^2=1-x, x\geq 0.$

2.5. $\iint\limits_{D}x(5+y)dxdy,\ D: y=x+5, x+y+5=0, x\leq 0.$

2.6. $\iint\limits_{D}(x-y)dxdy,\ D: y=x^2-1, y=3.$

2.7. $\iint\limits_{D}(x+y)y^2dxdy,\ D: y=3x^2, y=3.$

2.8. $\iint\limits_{D}xy^2dxdy,\ D: y=x, y=0, x=1.$

2.9. $\iint\limits_{D}\left(x^3+y\right)dxdy,\ D: x+y=1, x+y=2, x\leq 1, x\geq 0.$

2.10. $\iint\limits_{D}xy^3dxdy,\ D: y=x^3, y\geq 0, y=4x.$

2.11. $\iint\limits_{D}\left(x^3+3y\right)dxdy,\ D: y=x^2-1, x+y=1, x\geq 0.$

2.12. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D: y=\sqrt{x}, y=0, x+y=2.$

2.13. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\,dxdy,\ D: y=x, y=2, xy=1.$

2.14. $\iint\limits_D y\left(1+x^2\right)dxdy,\ D: y=x^3, y=3x.$

2.15. $\iint\limits_D (2x+1)y^2\,dxdy,\ D: x=2-y^2, x=0.$

2.16. $\iint\limits_D e^y\,dxdy,\ D: y=\ln x, y=0, x=2.$

2.17. $\iint\limits_D \left(y+x^2\right)dxdy,\ D: y=x^2, x=y^2.$

2.18. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D: y=x^2, y=2x.$

2.19. $\iint\limits_D (y+x)\,dxdy,\ D: y=x, x=y^2.$

2.20. $\iint\limits_D \left(x^3-2y\right)dxdy,\ D: y=x^2-1, y\le 0, x\ge 0.$

2.21. $\iint\limits_D (y-x)\,dxdy,\ D: y=x, y=x^2.$

2.22. $\iint\limits_D (y+1)\,dxdy,\ D: 5y=x, x=y^2.$

2.23. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,\ D: y=x^2-1, y=-x^2+1.$

2.24. $\iint\limits_D x(y-1)\,dxdy,\ D: y=x, y=5x, x=3.$

2.25. $\iint\limits_D (x-2)\,dxdy,\ D: y=x, y=\frac{1}{2}x, x=2.$

Задание 3. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\rho = \rho(x, y)$.

3.1. $D: y^2 = 1 - x, x = 0, \rho = 2 - x - y.$

3.2. $D: y = \sqrt{x}, y = x, \rho = 2 - x - y.$

3.3. $D: y = x^2 - 1, y = 1, \rho = 3x^2 + 2y^2 + 1.$

3.4. $D: x = 1, y = 0, y = x, \rho = x^2 + 2y^2 + 10.$

3.5. $D: y = 0, y = 2x, x + y = 6, \rho = x^2.$

3.6. $D: x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, \rho = 4 - x^2.$

3.7. $D: y = x^2, y = 2, \rho = 2 - y.$

3.8. $D: x = 0, y = 0, y + x = 1, \rho = x^2 + y^2.$

3.9. $D: y = x^2 + 1, x + y = 3, \rho = 4x + 5y + 2.$

3.10. $D: y = x^2 - 1, x + y = 1, \rho = 2x + 5y + 8.$

3.11. $D: y^2 = x, x = 3, \rho = x.$

3.12. $D: x = 0, y = 0, x + y = 1, \rho = x^2.$

3.13. $D: x = 0, y = 0, 2x + 3y = 6, \rho = \dfrac{y^2}{2}.$

3.14. $D: x = 0, y = 1, y = x, \rho = x^2 + 2y^2.$

3.15. $D: y = x, y = -x, y = 1, \rho = \sqrt{1 - y}.$

3.16. $D: x = 0, y = 2x, x + y = 2, \rho = 2 - x - y.$

3.17. $D: x = 1, x = y^2, \rho = 4 - x - y.$

3.18. $D: y = 0, x^2 = 1 - y, \rho = 3 - x - y.$

3.19. $D: y = x^2, y = 4, \rho = 3x + 2y + 6.$

3.20. $D: y = x^2, x = y^2, \rho = 2x + 5y + 10.$

3.21. $D: x = 0, y = 0, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}, \rho = x.$

3.22. $D: x=2, y=x, y=3x, \rho=2x^2+y^2$.

3.23. $D: y=x, y=x^2, \rho=2x+3y$.

3.24. $D: x=0, x+2y+2=0, x+y=1, \rho=x^2$.

3.25. $D: x=0, y=0, x+2y=1, \rho=2-\left(x^2+y^2\right)$

Задание 4. Вычислить массу m дуги кривой L, между указанными точками, если плотность в каждой её точке $\rho=\rho(x,y)$.

4.1. $L: y=x^2, O(0,0), A(1,1), \rho=x+\sqrt{y}$.

4.2. $L: x^2+y^2=1, A(0,1), B(1,0), \rho=xy$.

4.3. $L: y=e^x, A(0,1), B(1,e), \rho=y^2$.

4.4. $L: \begin{cases} x=2t, \\ y=3t, \end{cases} A(2,3), B(4,6), \rho=x+y$.

4.5. $L: xy=1, A(1,1), B\left(2,\dfrac{1}{2}\right), \rho=\dfrac{x^3}{y^2}$.

4.6. $L: y=2x, O(0,0), A(1,2), \rho=x^2+y^2$.

4.7. $L: \begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \end{cases} A(0,1), B(1,0), \rho=\cos 3t$.

4.8. $L: y=x+1, A(1,2), B(2,3), \rho=x^2+y$.

4.9. $L: \begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases} t=0, t=2\pi, \rho=\sqrt{y}$.

4.10. $L: xy=1, A(1,1), B\left(2,\dfrac{1}{2}\right), \rho=y^2\sqrt{1+x^4}$.

4.11. $L: y=x^3, O(0,0), A(1,1), \rho=y$.

4.12. $L: 4y=x^4, O(0,0), A\left(1,\dfrac{1}{4}\right), \rho=\dfrac{y}{\sqrt{x^6+1}}$.

4.13. L: ломаная ABC, где $A(1,0), B(2,0), C(2,1)$,

$\rho = 3x + 2y^2$.

4.14. $L: y = \sin x, O(0,0), A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \rho = \frac{y}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

4.15. $L: \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} A(1,4), B(2,4), \rho = x + y^2$.

4.16. $L: y = x^2, A(1,1), B(2,4), \rho = x$.

4.17. $L: x^2 + y^2 = 4, A(0,2), B(2,0), \rho = x^3 y$.

4.18. L : отрезок AB, где $A(1,3), B(3,5), \rho = x^2 y^2$.

4.19. $L: y = \cos 2x, O(0,1), A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \rho = \frac{\sin^3 2x}{\sqrt{1+4\sin^2 2x}}$.

4.20. $L: y = 2x^3, O(0,0), A(2,16), \rho = y$.

4.21. $L: y = tgx, O(0,0), A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \rho = \frac{\cos^4 x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

4.22. $L: \begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = 2\cos t, \end{cases} A(0,2), B(2,0), \rho = xy$.

4.23. $L: 2y - x^2 = 4, A(1,1), B(2,4), \rho = \sqrt{1+x^2}$.

4.24. $L: y = x^4 - 1, A(0,-1), B(1,0), \rho = x^5$.

4.25. $L: y = \ln(\sin x), A\left(\frac{\pi}{6}, \ln\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{\pi}{4}, \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\rho = \sin^2 x \cos x$.

Задание 5. Вычислить работу силового поля $\vec{F}$ при перемещении материальной точки вдоль пути L.

5.1. $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = t, y = t^2, z = t^3$ между точками $A(0, 0, 0)$ и $B(1, 1, 1)$.

5.2. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^2\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = x^2$ между точками $A(1, 2)$ и $B(3, 9)$.

5.3. $\vec{F} = y^2\vec{i} + y^3\vec{j}$ по дуге кривой $L: y^2 = x$ между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$.

5.4. $\vec{F} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$ по дуге кривой $L: x = 2t,\ y = 3t$ между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 3)$.

5.5. $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = 4t,\ y = t^2,\ z = t$ между точками $A(0, 0, 0)$ и $B(4, 1, 1)$.

5.6. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + y^2\vec{j}$ по дуге кривой $L: x = y^3$ между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$.

5.7. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ по дуге кривой $L: x = \sin t,\ y = \cos t$ между точками $A(0, 1)$ и $B(1, 0)$.

5.8. $\vec{F} = x\vec{i} - y^2\sqrt{x^2 - 1}\vec{j}$ по дуге кривой $L: x^2 - y^2 = 1$ между точками $A(1, 0)$ и $B(\sqrt{10}, 3)$.

5.9. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = 2t,\ y = t,\ z = 3t$ между точками $A(2, 1, 3)$ и $B(4, 2, 6)$.

5.10. $\vec{F} = xy\vec{i} - y\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = 6 - 3x$ между точками $A(0, 6)$ и $B(2, 0)$.

5.11. $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = t^3,\ y = t + 1,\ z = t^2$ между точками $A(0, 1, 0)$ и $B(1, 2, 1)$.

5.12. $\vec{F} = 2y\vec{i} + x^3\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = x^2$ между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

5.13. $\vec{F} = x\vec{i} - y^2\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = e^x$ между точками $A(1, e)$ и $B(0, 1)$.

5.14. $\vec{F} = (xy - 3x)\vec{i} + x^2\vec{j}$ по дуге кривой $L: x = 2t - 1,\ y = 2t + 3$ между точками $A(-1, 3)$ и $B(1, 5)$.

5.15. $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + x)\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = t,\ y = t - 1,\ z = t + 1$ между точками $A(3, 2, 4)$ и $B(4, 3, 5)$.

5.16. $\vec{F} = xy\vec{i} - x^2\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = x^3$ между точками $A(1, 0)$ и $B(2, \sqrt{5})$.

5.17. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ по дуге кривой $L: x = 2\cos t,\ y = 3\sin t$ между точками $A(2, 0)$ и $B(0, 3)$.

5.18. $\vec{F} = \dfrac{3x}{x^2+y^2}\vec{i} - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\vec{j}$ по дуге кривой $L: x^2 + y^2 = 9$ между точками $A(0, 3)$ и $B(3, 0)$.

5.19. $\vec{F} = (x+y)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + 3z\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ между точками $A(2, 4, 6)$ и $B(3, 6, 9)$.

5.20. $\vec{F} = \left(x^3 - y^2\right)\vec{i} + 2y\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = x + 3$ между точками $A(1, 4)$ и $B(-1, 2)$.

5.21. $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (z+2y)\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = t-1,\ y = 2t,\ z = t+2$ между точками $A(-1, 0, 2)$ и $B(0, 2, 3)$.

5.22. $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + y\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = e^x$ между точками $A(0, 1)$ и $B(1, e)$.

5.23. $\vec{F} = \sin y\vec{i} + \cos x\vec{j} + (z-2)\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = 2t$, $y = 3t,\ z = t+2$ между точками $A(0, 0, 2)$ и $B\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi+24}{12}\right)$.

5.24. $\vec{F} = 3y^2\vec{i} + \cos^2 x\vec{j}$ по дуге кривой $L: y = tgx$ между точками $A(0, 0)$ и $B\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$.

5.25. $\vec{F} = x\vec{i} + 4y\vec{j} + 3z\vec{k}$ по дуге кривой $L: x = t-2$, $y = t+1,\ z = 2t$ между точками $A(-2, 1, 0)$ и $B(-1, 2, 2)$.

Задание 6. Применив формулу Грина, вычислить $\oint\limits_L Pdx + Qdy$ для заданной линии L (пробегаемой в положительном направлении) и подынтегральных функций P и Q.

6.1. $L: y = x^2,\ y = 4;\ P = x^2 - 2xy,\ Q = y^2 - 2xy$.

6.2. L : треугольник OAB, где $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$; $P=6xy$, $Q=-2x^2$.

6.3. $L: y=\sin x$, $y=0$, между точками $O(0,0)$, $A(\pi,0)$; $P=-y\cos x$, $Q=\sin x$.

6.4. $L: 3y=x^2$, $y=3$; $P=y^2-10x^2y$, $Q=x-\dfrac{1}{y}$.

6.5. $L: \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1$; $P=xy-1$, $Q=x^2y$.

6.6. $L: y=x^3$, $y=8$, $x=0$; $P=x^2+y^2$, $Q=-2xy$.

6.7. $L: y^2=4-4x$, $x=0$; $P=y-1$, $Q=x^2y$.

6.8. $L: y=\ln x$, $y=0$, $x=e$; $P=\dfrac{y}{x}$, $Q=y$.

6.9. L : треугольник ABC, где $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$; $P=x^2+y^2$, $Q=x+y^2$.

6.10. $L: y^2=x$, $x=4$; $P=y$, $Q=xy^2$.

6.11. $L: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; $P=3xy^2-x$, $Q=x^2y^2-2y$.

6.12. $L: 4y=x^2$, $y=4$; $P=xy-y^2$, $Q=x$.

6.13. L : треугольник ABC, где $A(2,0)$, $B(5,0)$, $C(5,3)$; $P=x^2-y$, $Q=x+y^2$.

6.14. $L: y=x^3$, $y=1$, $x=0$; $P=xy$, $Q=y-x$.

6.15. $L: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; $P=xy-1$, $Q=x^2y$.

6.16. $L: y=\cos 2x$, $y=0$, между точками $O\left(\dfrac{-\pi}{4},0\right)$, $A\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$; $P=4y$, $Q=y\cos 2x$.

6.17. L : треугольник, образованный $y = |x|$, $y = 2$;
$P = x^2 + y^2$, $Q = x^2 - y^2$.

6.18. $L : y^2 = 4x$, $x = 4$; $P = xy - x$, $Q = x^2$.

6.19. $L : y = 2x^2$, $y = 8$; $P = x - xy$, $Q = \dfrac{x^2}{2}$.

6.20. $L : y = \sin 2x$, $y = 0$, между точками $O(0,0)$, $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$;
$P = 2y \sin 2x$, $Q = \cos 2x$.

6.21. $L : x^2 + y^2 = 4$; $P = x + 4xy$, $Q = x^2 - y$.

6.22. $L : y = \dfrac{x^2}{9}$, $y = 9$; $P = -2xy$, $Q = x^2$.

6.23. L : треугольник OAB, где $O(0,0)$, $A(1,2)$,
$B(0,2)$; $P = xye^x$, $Q = (x+1)e^x$.

6.24. $L : \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; $P = x^2 + y^2$, $Q = x^2 - y^2$.

6.25. $L : y^2 = 5x$, $x = 5$; $P = 2xy - x$, $Q = x^2 y^3$.

Литература

1. Каплан, И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 4. – Харьков, издательство Харьковского государственного университета им. А.М. Горького, 1966.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 2. – М.: Наука, 1985.
3. Щипачев, В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 3/ Под общей ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2004.
5. Сухая, Т.А., Бубнов, В.Ф. Задачи по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2. – Минск: Выш. шк., 1993.

Содержание

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
и задания к контрольной работе № 3
для студентов-заочников II курса ФТУГ
специальностей 1-43 01 06 «Энергоэффективные
технологии и энергетический менеджмент»,
1-36 20 02 «Упаковочное производство»

Составители:
АЛЕЙНИКОВА Зинаида Михайловна
КУРАЛЕНКО Маргарита Владимировна
ПОКАТИЛОВА Маргарита Николаевна
ШИДЛОВСКАЯ Анна Федосовна

Технический редактор М.И. Гриневич
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

Подписано в печать 17.05.2007.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 1.82. Тираж 300. Заказ 293.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Независимости, 65.