В условиях эксплуатации на данный элемент конструкции рамы приходится вес кабины, составляющей не более 20 тонн. На рис. 5 показана схема нагружения и закрепления опоры. Латинскими буквами B, C и D обозначены поверхности приложения закреплений, а к поверхности A прикладываем нагрузку, которую принимает на себя данная часть рамы в процессе эксплуатации самосвала.

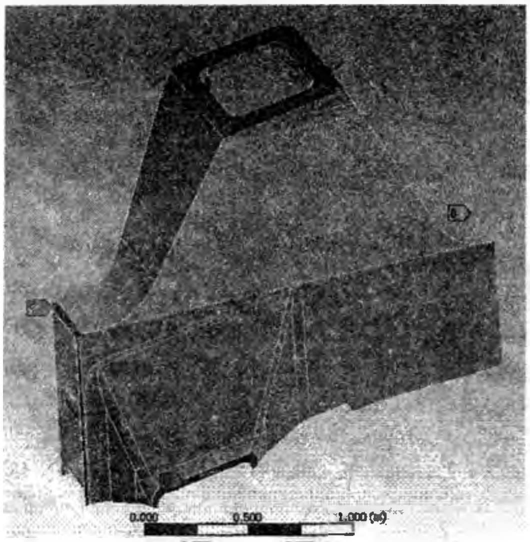

Рис. 5. Схема нагружения

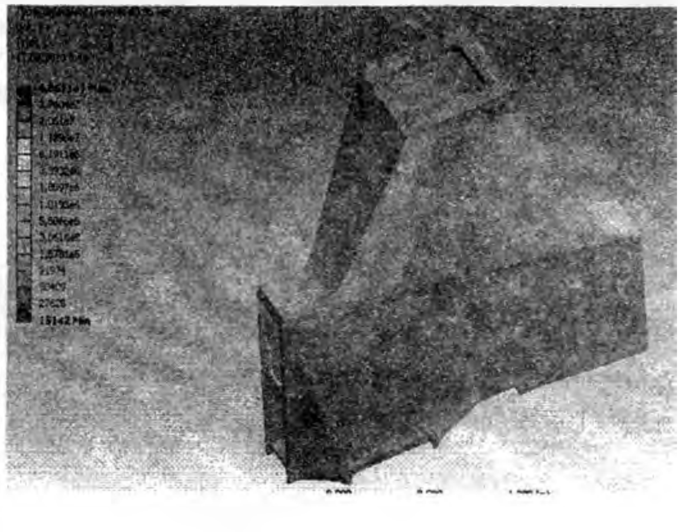

Рис. 6. Распределение напряжений в опоре

Анализ методом конечных элементов показал, что при данной схеме нагружения напряжения в опоре рамы не превышают предел прочности. Модификация не требуется.

Компьютерное моделирование позволяет оценить напряжённо-деформированное состояние в опоре, определить наиболее опасные участки, а затем, при необходимости, внести в неё изменения без дорогостоящих и трудоёмких натурных стендовых испытаний, что немаловажно. На рис. 5 показано напряжённое состояние по критерию Мизеса. Также в режиме постпроцессора можно проанализировать деформации, перемещения, усталостные явления, возникающие в раме процессе эксплуатации, и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Проскуряков “Динамика и прочность рам и корпусов транспортных машин”. – Л.: Машиностроение, 1972, 2. А. И. Гришкевич “Автомобили. Конструкция, конструирование и расчёт. Системы управления и ходовая часть”, Минск, 1987.3. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. –М: Машиностроение, 2004. -506 с.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Галуза И.М.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Построение общего решения смешанных задач теории упругости и термоупругости для анизотропной плоскости с эллиптическим отверстием, а также решением некоторых конкретных задач занимались авторы [1,2]. В настоящей работе дается другое представление общих формул, на основании которых получается более простое решение такого класса граничных задач.

Предположим, что анизотропное тело, обладающее прямолинейной упругой и тепловой анизотропией, занимает в комплексной плоскости $z = x + iy$ бесконечную односвязную область $\mathcal{D}^-$, ограниченную эллипсом $\mathcal{L}$. Будем считать, что когда тело находится в недеформированном состоянии, оси координат x и y совпадают с полуосями эллипса a и b. При этом будем предполагать, что термоупругое состояние в области $\mathcal{D}^-$ определяется по формулам [2]

$$\begin{gathered} \sigma_x = 2\mathrm{Re}[\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Psi_1(z_2)], \\ \sigma_y = 2\mathrm{Re}[\Phi_1(z_1) + \Psi_1(z_2)], \\ \tau_{xy} = -2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Psi_1(z_2)], \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u = 2\mathrm{Re}[p_1\varphi_1(z_1) + p_2\varphi_1(z_2) + \beta_1\varphi_0(z_3)], \\ \upsilon = 2\mathrm{Re}[q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_1(z_2) + \beta_2\varphi_0(z_3)], \end{gathered} \tag{2}$$

$$T = \Psi_0(z_3) + \overline{\Psi_0(z_3)}, \tag{3}$$

где $z_j = x + \mu_j y$; μ_j, p_j, q_j и β_j- известные коэффициенты [2]; $\varphi_1(z_1) = \int \Phi_1(z_1)dz_1$, $\varphi_1(z_2) = \int \Psi_1(z_2)dz_2$- комплексные потенциалы, подлежащие определению; $\varphi_0(z_3) = \int \Psi_0(z_3)dz_3$ комплексный потенциал температурного поля T будем считать известным; остальные обозначения общеприняты.

Положим, что температура T_∞ и компоненты напряжения σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞ на бесконечности области ограничены, а функции $\Phi_1(z_1)$, $\Psi_1(z_2)$ и $\Psi_0(z_3)$ голоморфны в $\mathcal{D}^-$ и на бесконечности имеют вид

$$\begin{gathered} \Phi_1(z_1) = \Gamma + {}^{a_0}/_{z_1} + 0({}^1/_{z_1^2}), \\ \Psi_1(z_2) = \Gamma' + {}^{b_0}/_{z_2} + 0({}^1/_{z_2^2}), \\ \Psi_0(z_3) = 0{,}5T_\infty + {}^{b}/_{z_3} + 0({}^1/_{z_3^2}), \end{gathered} \tag{4}$$

где Γ и Γ' определяются по формулам

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}(\Gamma\mu_1^2 + \Gamma'\mu_2^2) = \sigma_x^\infty, \\ 2\mathrm{Re}(\Gamma\mu_1 + \Gamma'\mu_2) = -\tau_{xy}^\infty, \\ 2\mathrm{Re}(\Gamma + \Gamma') = \sigma_y^\infty, \\ \mathrm{Re}[(q_1 - p_1\mu_1)\Gamma + (q_2 - p_2\mu_2)\Gamma'] = \varepsilon_\infty \text{ (заданное на бесконечности вращение);} \end{gathered}$$

a_0, b_0 и b - определены в [2].

Пусть на участках $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} - \mathcal{L}'$ контура $\mathcal{L}$ заданы соответственно смещения u, υ и компоненты внешних напряжений X_n, Y_n; где $\mathcal{L}' = \sum \mathcal{L}_k$- совокупность непересекающихся дуг $\mathcal{L}_k = a_k b_k$, $\mathcal{L}''$–остальная часть контура $\mathcal{L}$; X_n и Y_n- проекции внешних напряжений на оси координат x и y, n-нормаль к контуру, направленная в область $\mathcal{D}^-$. В этом случае граничные условия для функций $\varphi(z_1)$ и $\varphi(z_2)$ на $\mathcal{L}$ можно записать в форме

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_1(z_2)] = \int_0^S Y_n\, ds + c_k' \text{ на } \mathcal{L}z_k'', \\ 2\mathrm{Re}[\mu_1\varphi_1(z_1) + \mu_2\varphi_1(z_2)] = -\int_0^S X_n\, ds + c_k'' \text{ на } \mathcal{L}_k'', \end{gathered} \tag{5}$$

$$(p_1 + Nq_1)\varphi_1(z_1) + (p_2 + Nq_2)\varphi_1(z_2) + \overline{(p_1 + Nq_1)}\,\overline{\varphi_1(z_1)} + \overline{(p_2 + Nq_2)}\,\overline{\varphi_1(z_2)} = g_0 \text{ на } \mathcal{L}', \quad (6)$$

где $g_0 = u + Nv + c_k^0 - (\beta_1 + N\beta_2)\Psi_0(z_2) - \overline{(\beta_1 + N\beta_2)}\,\overline{\varphi_0(z_2)}$; c_k' и c_k''- произвольные вещественные постоянные; N- произвольная комплексная постоянная; $c_k^0(k = 1,2,\ldots,n)$постоянная, принимающая различные значения на разных дугах $\mathcal{L}_k$; S-длина дуги на участке контура $\mathcal{L}_k' = b_k a_{k+1}$, принадлежащем $\mathcal{L}''$(отсчет дуги S ведется от точек b_k в направлении, при котором область $\mathcal{D}^-$ остается справа).

Применяя функцию $z = R(\xi + m/\xi)$, конформно отображающую область $\mathcal{D}^-$ на область $|\xi| > 1$ (где $\xi = \rho e^{i\theta}, R = 0{,}5(a + b), m = (a - b)/(a + b)$), соотношения (5), (6), после дифференцирования их по θ, преобразуем к виду

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Re}[\Phi(\sigma) + \Psi(\sigma)]i = f_1 \text{ на } \gamma'', \\ &2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi(\sigma) + \mu_2\Psi(\sigma)]i = f_2 \text{ на } \gamma'', \end{aligned} \quad (7)$$

$$(p_1 + Nq_1)\Phi(\sigma) + (p_2 + Nq_2)\Psi(\sigma) - \overline{(p_1 + Nq_1)}\,\overline{\Phi(\sigma)} - \overline{(p_2 + Nq_2)}\,\overline{\Psi(\sigma)} = g \text{ на } \gamma', \quad (8)$$

где $g = -i\frac{\partial}{\partial\theta}(u + Nv) - (\beta_1 + N\beta_2)\Psi_*(\sigma) + \overline{(\beta_1 + N\beta_2)}\,\overline{\Psi_*(\sigma)}$; γ' и γ''- участки контура $\gamma_0(|\xi| = 1)$, соответствующие $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ на контуре $\mathcal{L}$, $\sigma = e^{i\theta}$, $\Phi(\sigma) = \sigma\omega_1'(\sigma)\Phi_1[\omega_1(\sigma)]$, $\Psi(\sigma) = \sigma\omega_2'(\sigma)\Psi_1[\omega_2(\sigma)]$, $\Psi_*(\sigma) = \sigma\omega_2'(\sigma)\Psi_0[\omega_2(\sigma)]$,

$$\begin{aligned} f_1 &= -0{,}5\left[(\tau_{\rho\theta} - i\sigma_\rho)\sigma\omega'(\sigma) + (\tau_{\rho\theta} + i\sigma_\rho)\overline{\sigma\omega'(\sigma)}\right], \\ f_2 &= 0{,}5\left[(\sigma_\rho + i\tau_{\rho\theta})\sigma\omega'(\sigma) + (\sigma_\rho - i\tau_{\rho\theta})\overline{\sigma\omega'(\sigma)}\right], \\ z_j &= \omega_j(\xi) = 0{,}5\left[(1 - i\mu_j)\omega(\xi) + (1 + i\mu_j)\omega(1/\xi)\right], \end{aligned}$$

σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$- компоненты внешних нормальных и касательных напряжений на контуре $\mathcal{L}''$. При этом будем предполагать, что функции f_k и g удовлетворяют условию Гельдера на γ_0, а потенциалы $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ в точках $\sigma = \alpha_k'$ и $\sigma = \beta_k'$, соответствующих концам дуг $\mathcal{L}_k = a_k b_k$, имеет интегрируемые особенности.

Условием (7) удовлетворим, если положить

$$\begin{aligned} &i[\Phi(\xi) + \Psi(\xi)] = 0{,}5[J_1(\xi) - \overline{J_1}(1/\xi)] + iB_0, \\ &i[\mu_1\Phi(\xi) + \mu_2\Psi(\xi)] = 0{,}5[J_2(\xi) - \overline{J_2}(1/\xi)] - k_0A_0 + in_0B_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $J_k(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma''}\frac{f_k d\sigma}{\sigma - \xi}$, k=1,2; $A_0 = F(\xi) - \overline{F}(1/\xi), B_0 = F(\xi) + \overline{F}(1/\xi)$, k_0, n_0- произвольные вещественные постоянные, $F(\xi)$- произвольная кусочно-голоморфная функция, удовлетворяющая на γ'' условию $F^+(\sigma) = F^-(\sigma)$. Знаками (+) и (-) вверху справа у символов функций обозначаются значения функций на γ_0 со стороны областей $S^+(|\xi| < 1)$ и $S^-(|\xi| > 1)$ соответственно.

При удовлетворении условиям (7) необходимо учесть, что $\overline{\varphi}(1/\xi) = \overline{\varphi(1/\overline{\xi})} = \overline{\varphi^+(\sigma)}$ на γ_0, Re$\overline{\varphi^+(\sigma)}$=Re $\varphi^+(\sigma)$, $I_m\overline{\varphi^+(\sigma)}$=-$I_m$ $\varphi^+(\sigma)$, где $\varphi(\xi)$- любая из функций $J_k(\xi)$, $F(\xi)$.

Из (9) находим

$$\Phi(\xi) = \varphi_0 + a_1A_0 + b_1B_0, \quad \Psi(\xi) = \varphi_0' + a_2A_0 + b_2B_0, \quad (10)$$

где $a_1 = ik_0/(\mu_1 - \mu_2)$, $a_2 = -a_1, b_1 = (n_0 - \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2)$, $b_2 = (n_0 - \mu_1)/(\mu_1 - \mu_2)$; φ_0 и φ_0' -известные функции, зависящие от $J_k(\xi)$, $\overline{J_k}(1/\xi)$. В дальнейшем будем считать $\varphi_0 = \varphi_0' = 0$, считая тем самым $\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0$ на γ'', и положим, что искомые коэффициенты k_0 и n_0 выражаются через некоторый произвольный параметр λ в виде

$$k_0 = i(\lambda - \bar{\lambda})/2,\ n_0 = (\lambda + \bar{\lambda})/2.$$

Подставим (10) в (6) и приравняем нулю коэффициенты при $F^{+}(\sigma)$ и $F^{-}(\sigma)$. В результате получим граничное условие для функции $F(\xi)$

$$æF^{-}(\sigma) + F^{+}(\sigma) = g\mu_0$$

и два уравнения, на основании которых следует

$$N = -\frac{p_1(a_1-b_1)+p_2(a_2-b_2)}{q_1(a_1-b_1)+q_2(a_2-b_2)} = \frac{\overline{p_1}(\overline{a_1}+\overline{b_1})+\overline{p_2}(\overline{a_2}+\overline{b_2})}{\overline{q_1}(\overline{a_1}+\overline{b_1})+\overline{q_2}(\overline{a_2}+\overline{b_2})}.$$

Отсюда для определения k_0 и n_0 имеем уравнение

$$\lambda^2 m_1 - \lambda[(\mu_2 + \overline{\mu_2})a_0 + c_0(\overline{\mu_2} + \mu_2) - \overline{c_0}(\overline{\mu_2} + \mu_1) + b_0(\overline{\mu_1} + \mu_1)] + \mu_2\overline{\mu_2}a_0 + \overline{\mu_1}\mu_2 c_0 - \mu_1\overline{\mu_2}\overline{c_0} +,$$
$$+b_0\mu_1\overline{\mu_1} = 0 \qquad (11)$$

если учесть, что между коэффициентами a_k и b_k имеют место зависимости

$$a_2 + b_2 = -(a_1 + b_1) + 1,\ a_2 - b_2 = -(a_1 - b_1) - 1.$$

Здесь приняты обозначения

$$m_1 = a_0 + b_0 + c_0 - \overline{c_0},\ a_0 = p_1\overline{q_1} - q_1\overline{p_1},\ b_0 = p_2\overline{q_2} - q_2\overline{p_2},\ c_0 = q_1\overline{p_2} - p_1\overline{q_2};$$
$$æ = (a_1 + b_1)(p_1 + Nq_1) + (a_2 + b_2)(p_2 + Nq_2)\mu_0,$$
$$\mu_0 = [(\overline{a_1} - \overline{b_1})(\overline{p_1} + N\overline{q_1}) + (\overline{a_2} - \overline{b_2})(\overline{p_2} + N\overline{q_2})]^{-1}.$$

Из (11) определим значение λ (которое соответствует $\lambda = i$ при предельном переходе к изотропному телу)

$$\lambda = \frac{1}{2m_1}\{a_0(\mu_2 + \overline{\mu_2}) + c_0(\overline{\mu_1} + \mu_2) - \overline{c_0}(\mu_1 + \overline{\mu_2}) + b_0(\overline{\mu_1} + \mu_1) +$$
$$+\{[a_0(\mu_2 + \overline{\mu_2}) + c_0(\overline{\mu_1} + \mu_2) - \overline{c_0}(\mu_1 + \overline{\mu_2}) + b_0(\overline{\mu_1} + \mu_1)]^2 - 4m_1(\mu_2\overline{\mu_2}a_0 + \overline{\mu_1}\mu_2 c_0 - \mu_1\overline{\mu_2}\overline{c_0} + b_0\mu_1\overline{\mu_1})\}^{1/2}$$

В соответствии с (4) будем считать, что при $\xi \to 0$ и $|\xi| \to \infty$

$$F(\xi) = a_\infty + c_\infty\xi + 0(1/\xi),\ F(\xi) = a_* + c_*/\xi + 0(\xi), \qquad (12)$$

где a_∞, c_∞, a_* и b_*- произвольные постоянные.
При $\varphi_0 = \varphi'_0 = 0$ из(10) имеем

$$\Phi_1(z_1) = \left[(\bar{\lambda} - \mu_2)F(\xi) + (\lambda - \mu_2)\bar{F}\left(1/\xi\right)\right]/\xi\omega'_1(\xi)(\mu_1 - \mu_2), \qquad (13)$$
$$\Psi_1(z_2) = \left[(\mu_1 - \bar{\lambda})F(\xi) - (\lambda - \mu_1)\bar{F}\left(1/\xi\right)\right]/\xi\omega'_2(\xi)(\mu_1 - \mu_2).$$

Принимая во внимание, что $z_j = 0.5(a - i\mu_j b)\xi + 0(1/\xi)$ для больших $|\xi|$, из формул (12), (13) следует

$$\Phi_1(z_1) = \left[\frac{2c_{\infty}(\bar{\lambda}-\mu_2)+2\bar{c}_*(\lambda-\mu_2)}{a-i\mu_1 b} + \frac{a_{\infty}(\bar{\lambda}-\mu_2)+\bar{a}_*(\lambda-\mu_2)}{z_1}\right](\mu_1-\mu_2)^{-1} + 0\left(1/z_1^2\right), \tag{14}$$

$$\Psi_1(z_{12}) = \left[-\frac{2\bar{c}_*(\bar{\lambda}-\mu_1)+2c_{\infty}(\bar{\lambda}-\mu_1)}{a-i\mu_2 b} - \frac{a_{\infty}(\bar{\lambda}-\mu_1)+\bar{a}_*(\lambda-\mu_1)}{z_2}\right](\mu_1-\mu_2)^{-1} + 0\left(1/z_2^2\right)$$

Сравнивая правые части (4) и (14), получим соотношения для определения $a_{\infty}, c_{\infty}, a_*, c_*$

$$\frac{(\lambda-\mu_2)\bar{c}_*+c_{\infty}(\bar{\lambda}-\mu_2)}{0{,}5(a-i\mu_1 b)} = (\mu_1-\mu_2)\Gamma,\ a_{\infty}(\bar{\lambda}-\mu_2)+\bar{a}_*(\lambda-\mu_2) = (\mu_1-\mu_2)a_0, \tag{15}$$
$$\frac{2c_{\infty}(\mu_1-\bar{\lambda})-2\bar{c}_*(\lambda-\mu_1)}{a-i\mu_2 b} = (\mu_1-\mu_2)\Gamma',\ a_{\infty}(\mu_1-\bar{\lambda})-\bar{a}_*(\lambda-\mu_1) = (\mu_1-\mu_2)b_0.$$

Определив функцию $F(\xi)$, компоненты напряжения σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ на $\mathcal{L}$ найдем по формулам (7) с учетом (10)

$$\sigma_\rho = \frac{4}{\overline{\omega'(\sigma)}\omega'(\sigma)}\operatorname{Re}[c_1\Phi(\sigma)+c_2\Psi(\sigma)],\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{4}{\overline{\omega'(\sigma)}\omega'(\sigma)}\operatorname{Re}[c_1'\Phi(\sigma)+c_2'\Psi(\sigma)],$$

где $c_j = [\omega'(\sigma)\sigma(1-i\mu_j)+\overline{\omega'(\sigma)}\sigma(1+i\mu_j)]$, $c_j' = [\omega'(\sigma)\sigma(1+\mu_j)+\overline{\omega'(\sigma)}\sigma(1-\mu_j)]$, $j=1,2$.

Учитывая, что $\sigma_\rho+\sigma_\theta = \sigma_x+\sigma_y$ для определения σ_θ на $\mathcal{L}$ имеем выражение

$$\sigma_\rho+\sigma_\theta = 2\operatorname{Re}\left\{\left[\frac{(1+\mu_1^2)(\bar{\lambda}-\mu_2)}{(\mu_1-\mu_2)\sigma\omega_1'(\sigma)} + \frac{(1+\mu_2^2)(\mu_1-\bar{\lambda})}{(\mu_1-\mu_2)\sigma\omega_2'(\sigma)}\right]F^-(\sigma) + \left[\frac{\sigma}{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}\left(\frac{(1+\bar{\mu}_1^2)(\bar{\lambda}-\bar{\mu}_2)}{\omega_1'(\sigma)} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{(1+\bar{\mu}_2^2)(\bar{\lambda}-\bar{\mu}_1)}{\omega_2'(\sigma)}\right)\right]F^+(\sigma)\right\}$$

Таким образом, исходя из заданных граничных условий, на основе приведенных формул определяют комплексные потенциалы, являющиеся основой расчета компонент напряжений и деформаций в анизотропной пластине с эллиптическим отверстием.

ЛИТЕРАТУРА

1.Попович Б.И., Грилицкий Д.В. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием при смешанных граничных условиях. Прикладная механика,т.1Х, вып. 6, 1973. 2. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Издательство БГУ, Мн.,1975