Во-вторых, максимальные значения растягивающих напряжений на оси симметрии заготовки при $t = 2500$ с, полученные при задании в расчетах зависимости $E = E(T)$, существенно увеличивают значения σ_x и σ_y, полученные при задании неизменных значений модуля упругости.

Таким образом, учет зависимости модуля упругости стали от температуры является важной предпосылкой для получения адекватных действительности показателей поля термических напряжений в сечении заготовок при их нагреве в печах перед прокаткой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тайц Н.Ю.* Технология нагрева стали. М.: Металлургиздат, 1962. 567 с.
2. Стальной слиток: В 3 т. Т. 3: Нагрев / В.И. Тимошпольский, Ю.А. Самойлович, И.А. Трусова и др.; под ред. В.И. Тимошпольского, Ю.А. Самойловича. Мн.: Бел. наука, 2001. 879 с.
3. Комплексная методология разработки экономичных режимов нагрева в печах / В.И. Тимошпольский, В.А. Тищенко, С.М. Козлов и др. // Сталь. 2002. № 10. С. 102 – 106.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 318 с.
5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
6. *Секулович М.* Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 660 с.

УДК 536.12:518.61

В.И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, д-р техн. наук (ИТМО НАН Беларуси),
Д.Н. АНДРИАНОВ, канд. техн. наук,
П.Э. РАТНИКОВ (БНТУ)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Классификация методов решения задач нестационарной теплопроводности. Существующие методы решения краевых задач теплопроводности можно классифицировать по различным признакам; один из них – форма, в которой получаются результаты решений. Решение задачи может быть представлено в виде формул, позволяющих по заданным значениям аргументов получать значения искомых функций. В таких случаях решение называется аналитическим. С помощью численных методов решение может быть представлено числовыми значениями функции в некоторых заданных числовых значениях аргумента.

Аналитические методы позволяют получать более наглядные решения по сравнению с численными методами; по ним легко проанализировать влияние всех факторов на результат решений. Аналитические методы могут быть точными (классическими) и приближенными.

Важным критерием для использования аналитических методов является возможность решения нелинейных краевых задач. Если метод разработан для решения нелинейных задач, то он применим и для решения линейных задач, обратное же часто невозможно.

Классические методы аналитической теории теплопроводности массивных тел. Дифференциальное уравнение теплопроводности относят к типу параболических дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, решение которых представляет собой одну из задач математической физики. Основными аналитическими методами решения задач теплопроводности являются: метод источников (метод функций Грина), метод разделения переменных (метод Фурье) и операционный метод (метод преобразований Лапласа).

Метод источников. Применению метода источников большое внимание уделено в монографиях Х.С. Карслоу [1] и Н.Н. Рыкалина [2]. Суть этого метода состоит в том, что любой процесс распространения теплоты в теле можно представить в виде суммы процессов выравнивания температур. Эти процессы вызываются действием множества элементарных количеств теплоты (источников), распределенных в пространстве и во времени.

Для случаев теплопроводности в пространстве одного измерения элементарными решениями метода источников являются:

1) сосредоточенный мгновенно действующий плоский источник Q':

$$T(x,\tau,x',\tau') = \frac{Q'}{c\rho\cdot 2\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}};$$

2) сосредоточенный мгновенно действующий плоский диполь:

$$\frac{\partial T(x,\tau,x',\tau')}{\partial x} = \frac{Q''(x-x')}{c\rho\cdot 2a(\tau-\tau')\cdot 2\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}}.$$

Применение сосредоточенного мгновенно действующего источника позволяет определять температуру в плоскости x неограниченного тела в момент τ, вызываемую действием мгновенного источника теплоты производительностью Q', помещенного в плоскость x' в момент τ'.

Решение задач теплопроводности методом источников заключается в правильном выборе и распределении этих источников. Основные методы при решении задач – метод выравнивания, метод непрерывно действующих источников, метод отражений [3].

Применение метода выравнивания позволяет получать распределение температур в теле в различные моменты времени в виде суммы распределения температур, вызываемых действием элементарных мгновенно действующих источников, распределенных в объеме тела.

От процессов распространения теплоты, вызываемых мгновенно действующими источниками, легко перейти к непрерывно действующим источникам, выразив заданное условие нагрева в виде суммы мгновенно-действующих источников, распределенных во времени [3].

Использование метода источников для описания процессов нагрева тел ограниченных размеров приводит к методу отражений (или изображений), суть которого сводится к продолжению ограниченного тела во все стороны и подбору дополнительных источников в продолженных областях для удовлетворения условий на ограниченных поверхностях.

Метод источников является разновидностью интегрального метода решения задач теплопроводности, заключающегося в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к интегральным уравнениям.

Особенностью метода источников является расчленение сложного процесса на элементарные аддитивные составляющие, что делает удобным использование этого метода для изучения связи разнообразных случаев нагрева тел.

Применение метода источников позволяет получать решения задач в наиболее простом виде в случае неограниченных размеров тела для моментов времени, достаточно близких от начала нагрева. Наибольшее применение этот метод получил в теории сварочных процессов [2]. Недостатком метода источников является сложность решений для тел ограниченных размеров в конечной стадии нагрева.

М е т о д р а з д е л е н и я п е р е м е н н ы х. Этот метод часто называют методом Фурье. Основой применения метода разделения переменных является возможность представления частных решений уравнения теплопроводности в виде произведения двух функций: $T(x, \tau) = \varphi(x)\psi(\tau)$, одна из которых зависит от пространственных координат, а другая – от времени [3]. В случае применения метода разделения переменных вначале находится совокупность частных решений линейного однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющего однородным граничным условиям, затем в силу принципа суперпозиции составляют ряд из этих решений. Функции для координат обладают свойствами ортогональности функций, что позволяет, используя начальные условия, определять постоянные, входящие в решение задачи.

Следует отметить, что метод разделения переменных применим в основном для уравнений с конечными интервалами изменений пространственных координат.

Недостатком метода является сложность решений для начальной стадии нагрева (охлаждения) тел. Применение метода разделения переменных к задачам нагрева и охлаждения тел ограниченных размеров показано Г. Гребером [4], Г.П. Иванцовым [5] и др. [6, 7].

Операционный метод. Для исследования вопросов теплопроводности широкое распространение получили методы операционного исчисления. Этому способствовали работы Э.М. Гольдфарба [3], А.В. Лыкова [8], Х.С. Карслоу и Д. Егера [9].

Операционное исчисление в современном виде основано на линейном функциональном преобразовании, которое представляет собой интегральное преобразование Лапласа:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau .$$

В результате преобразования функция $f(\tau)$, которую называют оригиналом, переходит в другую функцию $f_L(p)$ комплексного параметра p, которую называют изображением. Изображение функций $f_L(p)$ выглядит иначе, чем их оригиналы $f(\tau)$, и обладает иными свойствами. Основное свойство преобразований Лапласа, определяющее значение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений, заключается в том, что операции дифференцирования и интегрирования над оригиналами функций заменяют алгебраическими операциями над их изображениями.

Самым трудным этапом применения метода Лапласа является, как показывает практика [3], нахождение оригинала по его изображению, т.е. обращение преобразования Лапласа.

Приближенные аналитические методы расчета нестационарной теплопроводности. В монографии [10] указывается, что наиболее перспективной с точки зрения получения приемлемых инженерных результатов является разработка достаточно эффективных приближенных аналитических методов решения нелинейных задач теплового переноса.

К настоящему времени создан ряд оригинальных приближенных методов, которые с тем или иным успехом можно использовать при решении задач теплопроводности в различных постановках, причем каждый известный метод имеет свои преимущества и недостатки, область наиболее эффективного применения. Преимущества таких методов по сравнению с точными методиками заключаются в следующем:

1) приближенный метод нередко позволяет учесть большее число параметров, чем точный;

2) конечный вид приближенного решения, с одной стороны, значительно проще точного, а с другой – точнее первого члена ряда, входящего в точное решение;

3) приближенные методы позволяют решать ряд прикладных нелинейных задач, точные решения которых отсутствуют.

Следует прежде всего отметить приближенные методы решения задач теплопроводности, объединенные А.В. Лыковым [8] под общим названием «методы термического слоя». Это прежде всего интегральный метод Т. Гудмена [11], метод исключения переменных А.И. Вейника [12], метод мгновенного регулярного этапа Э.М. Гольдфарба [3], вариационный метод М.А. Био [13], метод осреднения функциональных поправок Ю.Д. Соколова [14], метод эквивалентных источников (МЭИ) Ю.С. Постольника [15 – 18], метод уточненного регулярного этапа В.И. Тимошпольского [19 – 21].

В основу этих методов положена идея разбиения единого (по Фурье) процесса на два этапа (рис. 1): инерционный, длящийся до тех пор, пока температурное возмущение не достигнет центра заготовки, и регулярный, где идет нагрев всех точек сечения тела, с дальнейшим использованием того или иного интегрального выражения. Простота конечных результатов явилась основным фактором, обусловившим применение указанных методов в практических расчетах.

Основная идея интегрального метода теплового баланса Т. Гудмена заключается в том, что искомое решение должно удовлетворять не исходному уравнению теплопроводности, а записанному в интегральной форме закону сохранения энергии, т.е. интегралу теплового баланса. Задаваясь априори зависимостью искомой функции температуры от пространственной переменной, задачу сводят к решению обыкновенного дифференциального уравнения с независимой временно́й переменной.

С помощью этого метода в работах Т. Гудмена [11, 22, 23] получен ряд практически приемлемых решений для полубесконечного тела и пластины при различных граничных условиях нагрева, включая и некоторые нелинейные задачи. Для цилиндрических и сферических тел результаты несколько хуже, что было показано в работах [24, 25].

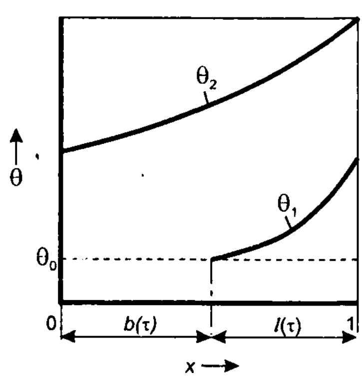

Рис. 1. Схема симметричного нагрева неограниченной пластины в соответствии с моделью термического слоя

Основной недостаток метода – необходимость априорного выбора координатной зависимости функции температуры. Как указывает автор метода [11], окончательный результат во многом зависит от того, насколько удачно «угадан» профиль температурного поля. Принимая ту или иную функцию, мы каждый раз будем приходить к различным решениям, т.е. данный метод не обладает однозначностью решения. Отсюда и вытекает проблема точности. Для улучшения решения чаще всего прибегают к аппроксимации полиномом высших степеней, однако в этом случае возникает необходимость поиска недостающих граничных условий. На малую пригодность метода в решении нелинейных задач указывается в работах [26, 27].

Метод исключения переменных А.И. Вейника [12] основан на исключении пространственных координат из уравнения переноса. С этой целью задаются функцией распределения температуры в виде степенной параболы. Закон продвижения фронта прогрева и температуру центра сечения определяют из уравнения теплового баланса. Степень параболы подлежит определению путем сравнения полученного решения с точными решениями этой же задачи численными методами. Уравнение теплового баланса следует из закона Фурье.

Методом исключения переменных решен ряд задач по нагреву пластины, цилиндра и шара при сравнительно простых граничных условиях [12]. В работе [12] показана также возможность применения метода для расчета теплопроводности тел сложной формы на основе принципа стабильности теплового потока. Результаты расчета уточняются путем сравнения полученных приближенных решений с точными, на основе чего корректируется степень параболы.

Применяя свой метод, А.И. Вейник решил целый ряд практических задач, связанных с теплофизикой литейного производства [12, 28].

Основным недостатком метода исключения переменных является необходимость априорного выбора температурных функций, что с усложнением граничных условий оказывается затруднительным, а для многих нелинейных задач – малопригодным.

Метод мгновенного регулярного режима Э.М. Гольдфарба [3] основан на допущении, что в каждый момент времени по всей толщине пограничного слоя мгновенно устанавливается регулярный режим, при котором скорость изменения температуры в различных точках прогретой зоны одинакова. Таким образом, инерционный период представляется как совокупность регулярных состояний, различающихся толщиной прогретого слоя.

При решении соответствующей задачи теплопроводности входящая в уравнение Фурье производная температуры по времени заменяется средней по объему скоростью изменения температуры, и уравнение переноса в частных производных интегрируется как обыкновенное дифференциальное уравнение.

Рассматриваемый метод по сравнению с методами Т. Гудмена и А.И. Вейника имеет то преимущество, что профиль температуры здесь получается непосредственно в процессе решения задачи. Э.М. Гольдфарб [3] успешно применил этот метод для теплового расчета многослойных стенок, для исследования процессов, связанных с фазовыми превращениями, и других задач металлургической теплотехники. И все же область эффективного применения метода определена сравнительно простыми граничными условиями. Этот метод дает хорошие результаты при граничных условиях второго рода. Недостатком метода является также отсутствие рекомендаций по уточнению полученных результатов.

Вариационный метод М.А. Био [13] предлагает новый подход к решению задач теплопроводности. Нагреваемое тело рассматривается как термодинамическая система, в которой происходит необратимый процесс распространения теплоты, протекающий по пути, характеризующемуся минимальной скоростью возрастания энтропии. Это положение используется в виде вариационного принципа, аналогичному принципу «наименьшего действия» в механике, что в конечном счете приводит к термодинамическому эквиваленту уравнений Лагранжа.

В работе [27] обращается внимание на то, что многие исследователи, например Э.М. Гольдфарб, О.С. Ересковский [29], считают метод Био наиболее точным среди других подобных методов, обосновывая это тем, что он приводит к уравнению теплопроводности. Однако такое обоснование точности иллюзорное, поскольку конкретная реализация метода требует априорного представления температурного поля. Так как этот метод требует априорного задания искомой функции, то он не имеет особых преимуществ перед рассмотренными ранее интегральными методами, тем более что в практическом отношении он более громоздок и менее доступен для широких инженерных кругов.

Вариационный метод Рэлея – Ритца и более универсальный метод Бубнова – Галеркина основаны на априорном задании искомой функции по всем переменным, что в конечном счете сводит ту или иную краевую задачу к решению системы алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Эти методы получили широкое распространение при решении задач математической физики. Достаточно сослаться, например, на работы [30 – 32]. И все же методы Рэлея – Ритца и Бубнова – Галеркина обладают существенным недостатком – они требуют предварительного задания закона изменения искомого решения по всем переменным. Однако при использовании большого числа координатных функций в случае их неудачного подбора возможны большие ошибки из-за накапливающихся погрешностей вычислений.

В работе [30] изложен предложенный В.Л. Канторовичем вариационный метод, который занимает промежуточное положение между точным решением задачи и методом Ритца. Приближенное решение при использовании вариационного метода получают путем задания поведения неизвестной функции по одной из независимых переменных, оставляя ее произвольной от других независимых переменных. При подстановке выбранной формы решения в функционал и интегрирования по выделенной переменной находится функционал от неизвестных функций, зависящих от других переменных. Эти функции выбираются из условия минимума полученного функционала, что приводит к системе дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа. Довольно часто расчет по такому методу проще и обладает большей точностью по сравнению с методом Ритца.

К преимуществам вариационного метода относят и то, что структура приближенного решения по одной из переменных определяется априори, а по другим переменным – в соответствии с характером задачи; к недостаткам – то, что он, как и предыдущие методы, требует априорного задания искомого решения. Метод осредненных функциональных поправок [14] свободен от этого недостатка, однако полученные приближенные решения не обладают достаточной для практического применения простотой.

Теория теплового пограничного слоя в настоящее время получила должное признание и распространение. Исключительная простота конечных результатов явилась основным фактором, обусловившим широкое применение методов термического слоя в практических расчетах. Однако большинству методов присущ общий недостаток – необходимость априорного выбора пространственных зависимостей температурной функции, что ставит точность решения в зависимость от интуиции и опыта исследователя.

По сравнению с другими методами термического слоя метод эквивалентных источников (МЭИ) обладает рядом преимуществ [33]:

1) МЭИ не требует априорного задания искомой функции;

2) МЭИ обладает единственностью решения;

3) приемлемая для практики точность достигается, как правило, в первом приближении;

4) при использовании МЭИ появляется возможность повышения точности решения.

Сопоставление показывает, что точность предложенного [34] приближенного решения вполне достаточна для инженерных расчетов. Вместе с этим оно обладает исключительной простотой, что также имеет большое практическое значение. Например, по точному решению [3] нет возможности получить явную формулу для расчета времени нагрева тела до требуемой температуры. МЭИ такие формулы дает [34].

Использование МЭИ для решения дважды нелинейных задач нестационарной теплопроводности выполнено Ю.С. Постольником и В.И. Тимошпольским [18, 20] и продемонстрировало его универсальность и достаточную для практических целей точность. Расчеты показывают что метод эквивалентных источников привел к результатам, практически совпадающим с результатами, полученными при использовании гидростатического интегратора [35].

В.И. Тимошпольский ввел в практику расчетов нагревательных печей разработанный им метод уточненного регулярного этапа [36]. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах В.И. Тимошпольского с соавторами [37 – 39].

Метод уточненного регулярного этапа, используя преимущества МЭИ, позволяет: выполнить на основе численной схемы вычисления по существу для любого ΔFo; избежать трансцендентного уравнения при стыковке пространственной и временнóй переменных; получить при сопоставлении

4. Зак. 3598

с численным методом лучшее совпадение результатов, чем при использовании МЭИ [38].

Численные методы решения задач нестационарной теплопроводности. В последнее время в связи с бурным ростом быстродействия компьютерной техники более широкое распространение, чем раньше, получили численные методы решения теплотехнических задач, в том числе задач теоретического противоточного нагрева тел произвольной формы.

Преимуществом численных методов является возможность решения различных дифференциальных уравнений с разными граничными условиями (в том числе с нелинейными граничными условиями третьего рода, что представляет существенную трудность для аналитических расчетов) и переменными теплофизическими характеристиками (теплопроводность, теплоемкость, плотность и т.д.).

Все численные методы различаются математическими подходам. Они предназначены для получения приближенных решений, когда невозможно получить результат в замкнутой форме (или, как говорят, в квадратах), т.е. в виде выражения, включающего разные функции (экспоненты, косинусы и т.п.), или хотя бы в форме одного интеграла, который несложно вычислить приближенным методом.

В настоящее время разработано множество приближенных аналитических и численных методов решения задач тепломассопереноса. Разнообразие идей, заложенных в их основу, препятствует созданию всеобъемлющей классификации.

На основании анализа литературных источников [40 – 43] можно выделить следующие основные инженерные методы: 1) метод конечных разностей; 2) метод конечных элементов; 3) метод граничных элементов.

Следует отметить, что из этих методов наиболее часто при решении задач тепломассопереноса в металлургии используется метод конечных разностей, по которому существует обширная учебная и научная литература. Решение, полученное методом конечных элементов, оказывается точнее результатов, которые дают все схемы метода конечных разностей, за исключением метода контрольного объема. При этом нет необходимости сильно упрощать математическую модель исследуемых процессов. Метод конечных разностей характеризуется повторяемостью одинаковых операций, что особенно удобно при использовании современной вычислительной техники.

Как видно, среди численных методов наиболее универсальным и часто применяемым для решения задач тепло- и массообмена является метод конечных разностей.

Метод конечных разностей. Идея метода конечных разностей состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов заменяется расчетной сеткой – дискретным множеством точек (узлов). Вместо функции непрерывных аргументов вводятся функции дискретных аргументов – сеточные функции, определяемые в узлах сетки. Частные производные, входящие в дифференциальное уравнение, и граничные условия аппроксимируются разностными соотношениями.

В результате такой замены краевая задача в частных производных сводится к системе разностных (алгебраических) уравнений. Если решение системы разностных уравнений существует и при измельчении сетки стремится к решению поставленной задачи, то это решение и является искомым численным решением краевой задачи. Расположение узлов сетки может быть произвольным и определяется спецификой решаемой задачи, поэтому можно выделить равномерные и неравномерные сетки. В сетках первого типа все узлы по данной координате расположены на равном расстоянии друг от друга, называемом шагом сетки. Равномерные сетки используются в тех случаях, когда все элементарные объемы исследуемой области равноценны в физическом плане и не ожидается каких-либо особенностей в изменениях переменных процесса. Неравномерные сетки используются при решении задач, относительно которых априори известно, что в некоторых элементарных объемах исследуемой области имеют место (или возможны) особенности искомой функции [44].

Характерной чертой метода является его неоднозначность, приводящая к свободе выбора (более или менее полной) параметров разностной схемы, определяющих заданную по условию точность решения задачи. Такими параметрами являются шаги по координате и времени и степень неявности разностных уравнений [45].

Конечно-разностные схемы подразделяются на явные (будущие температуры в узлах сетки легко выражаются через температуры на предыдущем временно́м слое) и неявные (здесь для определения неизвестных температур в узлах сетки на каждом временно́м интервале необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой соответствует числу узловых точек).

Достоинством явной разностной схемы является ее простота. Но она устойчива не для любого шага по времени. Поэтому для сходимости явной разностной схемы должно быть наложено ограничение на шаг по времени [44]:

$$\Delta\tau \le \Delta x^2 /(2a).$$

В работе [46] на конкретном примере нагрева цилиндра показано, что для быстропротекающих процессов явные методы могут быть более эффективными, чем неявные.

Неявная разностная схема устойчива при произвольных значениях шага $\Delta\tau$ [44] и по этой причине получила название абсолютно устойчивой. В связи с этим, несмотря на более сложный расчетный алгоритм, неявные разностные аппроксимации применяются чаще.

В настоящее время разработано много вариантов неявных разностных схем [47, 48], обладающих высокими порядками аппроксимации по координатному и временно́му шагу. Анализ свойств большого количества схем дан в работе [49]. В [50] предложена методика повышения точности разностных схем на последовательности сеток, построенная на базе метода Л.Ф. Ричардсона [51].

При разработке конечно-разностного аналога конкретной задачи тепломассопереноса необходимо определить способы выбора сетки и построения разностной схемы, точность аппроксимации исходной задачи разностной схемой, проверить устойчивость разностной схемы, выявить скорость сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи тепломассопереноса.

Среди множества методов построения разностных аналогов для дифференциальных операторов в методе конечных разностей можно выделить следующие: метод формальной замены производных конечно-разностными выражениями; метод неопределенных коэффициентов; метод интегральных тождеств. Необходимо упомянуть также вариант метода взвешенных невязок, когда в качестве базисных функций используются дельта-функции Дирака, однако он пригоден только для решения стационарных задач.

Метод формальной замены производных конечно-разностными выражениями прост и шаблонен. Он основан на разложении в ряд Тейлора достаточно гладких функций. Полученный с его помощью разностный аналог дифференциального уравнения аппроксимирует это уравнение в узле сетки, т.е., строго говоря, не вполне справедлив в межузловом пространстве. Недостатком данного метода является отсутствие наглядности и физического содержания.

Суть *метода неопределенных коэффициентов* заключается в том, что для аппроксимации производной записывают линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах наперед заданного шаблона. Неопределенные постоянные коэффициенты этой комбинации определяют из условия получения необходимого порядка аппроксимации в данном узле. Метод неопределенных коэффициентов отличается от предыдущего лишь порядком действий. И здесь используется разложение в ряд Тейлора, однако в отличие от метода формальной замены производных конечными разностями порядок аппроксимации является исходной (заданной) величиной, а не следствием преобразований. Метод неопределенных коэффициентов особенно удобен для конструирования разностных аналогов граничных условий требуемой точности.

Метод интегральных тождеств (метод контрольного объема) широко применяется при решении уравнений тепломассопереноса (теплопроводность, конвекция, диффузия и т.д.), которые характеризуются некоторыми интегральными законами сохранения (теплоты, массы, энергии и т.д.). Естественно потребовать, чтобы при переходе к конечно-разностным аналогам дифференциальных уравнений основные свойства описываемого ими физического процесса сохранились. Такими свойствами являются прежде всего законы сохранения. Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называют консервативными (или дивергентными). Законы сохранения для всей сеточной области (интегральные законы сохранения) для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

При получении консервативных разностных схем исходят из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями.

Метод контрольного объема особенно полезен для уравнений с негладкими и разрывными коэффициентами, поскольку именно интегральная запись законов сохранения выделяет из всех математически доступных решений физически правильное обобщенное решение.

Расчеты показывают высокую точность метода контрольного объема даже при грубой конечно-разностной сетке. Большая точность обусловливается консервативностью получаемого уравнения, т.е. тем, что оно обеспечивает выполнение закона сохранения энергии для сколь угодно малого и для сколь угодно большого объемов (при использовании рядов Тэйлора разностный аналог удовлетворяет исходному уравнению только в узле сетки).

Для решения нестационарных задач теплопроводности широкое применение находят методы конечных элементов [52, 53] и граничных элементов [54].

Использование метода конечных элементов в силу его универсальности позволяет создавать обширные пакеты прикладных программ для расчетов тепловых процессов в телах сложной геометрии и сложных составных телах. Как указывается, например, в [53], использование метода конечных элементов в нестационарном случае сводит решения уравнения в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Практический и теоретический интерес имеет информация из работ [55 – 57], где представлен анализ сравнительной эффективности методов конечных разностей и конечных элементов. Например, в [56] для случая граничных условий 1, 2 и 3-го рода и форм элементов доказывается, что в случае одномерной нестационарной теплопроводности при использовании метода конечных элементов необходимо выполнение условия

$$a\Delta\tau / h^2 = 1/6.$$

Решения многомерных задач теплопроводности методами конечных разностей рассмотрены в [58 – 60], где приведен анализ их устойчивости и аппроксимации, а также представлены сведения об их сравнительной численной эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карслоу Х.С.* Теория теплопроводности. М.: Гостехиздат, 1947. 216 с.

2. *Рыкалин Н.Н.* Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 157 с.

3. *Гольдфарб Э.М.* Теплотехника металлургических процессов. М.: Металлургия. 1967. 439 с.

4. *Гребер Г., Эрк С.* Основы учения о теплообмене. ОНТИ, 1936. 189 с.

5. *Иванцов Г.П.* Нагрев металла. Свердловск; М.: Металлургиздат, 1948. 192 с.

6. *Коган М.Г.* Нестационарная теплопроводность в твердых телах, ограниченных ортогональными координатами // ЖТФ. 1956. Т. 26. № 7. С. 214 – 217.

7. *Рыкалин Н.Н.* Об условиях расщепления решений линейного параболического уравнения на ортогональные составляющие // ДАН СССР. 1959. Т. 125. № 3. С. 163 – 168.

8. *Лыков А.В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109 – 150.

9. *Карслоу Х.С., Егер Д.* Операционные методы в прикладной математике. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 277 с.

10. *Саломатов В.В.* Методы расчета нелинейных процессов теплового переноса. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1976. 242 с.

11. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах стационарной теплопроводности // Проблемы теплообмена. Пер. с англ. М.: Атомиздат. 1967. С. 41 – 96.

12. *Вейник А.И.* Приближенный расчет процессов теплопрводности. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959. 184 с.

13. *Biot M.A.* New methods in heat flow analyses with application to flight structures // Journal of aeronavtic science. 1957. V. 24. № 1. P. 857 – 873.

14. *Соколов Ю.Д.* Метод осреднения функциональных поправок. Киев: Наук. думка, 1957. 336 с.

15. *Постольник Ю.С.* Метод эквивалентных источников в задачах нестационарной теплопроводности // В кн.: Теплообмен и гидродинамика. Киев: Наук. думка. 1977. С. 161 – 167.

16. *Постольник Ю.С.* Обобщение и дальнейшее развитие методов теплового пограничного слоя // Изв. вузов. Черная металлургия. 1982. № 2. С. 137 – 141.

17. *Постольник Ю.С., Тимошпольский В.И., Сичевой А.П.* Анализ технологии нагрева металла в пламенных печах // Изв. вузов. Черная металлургия. 1979. № 2. С. 110 – 114.

18. *Постольник Ю.С., Тимошпольский В.И.* Радиационно-конвективный нагрев неограниченного цилиндра с функционально-зависящими теплофизическими характеристиками // Изв. вузов. Энергетика. 1980. № 3. С. 121 – 124.

19. *Тимошпольский В.И.* Теплотехнологические основы металлургических процессов и агрегатов высшего технического уровня. Мн.: Навука і тэхніка, 1995. 255 с.

20. *Тимошпольский В.И.* Инженерный способ расчета массивных тел в условиях лучистого теплообмена // Изв. вузов. Черная металлургия. 1986. № 7. С. 126 – 128.

21. Усовершенствование технологии термической обработки катаных осей железнодорожного транспорта / В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, А.П. Сичевой и др. // Изв. вузов. Черная металлургия. 1987. № 8. С. 89 – 92.

22. *Гудмен Т.* Интеграл теплового баланса, дальнейшее рассмотрение и уточнение // Теплопередача: Тр. Ам. общ. инж.-мех. (русский перевод). 1961. № 1. С. 107 – 111.

23. *Goodman T.P.* The Heat-Balance Integral and its Application to Problem Involving a Change of Phase // Transaction of the American Society of Mechanical Engineers (ASME). 1958. V. 80. № 2. P. 335 – 342.

24. *Lander T.J., Pohle F.V.* Application of Biot's Variational Principle in Heat Conduction. Polytechnic Inst. Of Brooklyn. Dept. of Aero. Eng and Appl. Mech. PIBAL. 1961. May. № 587. P. 211 – 217.

25. *Lander T.J., Pohle F.V.* Biot's Variational Principle in Heat Conduction. Polytechnic Inst. Of Brooklyn. Dept. of Aero. Eng and Appl. Mech. PIBAL. 1961. July. № 595. P. 187 – 193.

26. *Каганар М.Г.* Решение задачи о монотонном нагреве пластины различными методами // ИФЖ. 1968. Т. 15. № 3. С. 505 – 513.

27. *Флидлидер Г.М.* О применении интегральных оценок для решения нелинейного уравнения теплопроводности // ИФЖ. 1973. Т. 24. № 5. С. 908 – 915.

28. *Вейник А.И.* Расчет отливки. М.: Машиностроение, 1964. 403 с.

29. *Гольдфарб Э.М., Ересковский О.С.* Вариационный принцип Био в задачах теплопроводности с изменением фазового состояния при плоской границе раздела фаз // Теплофизика высоких температур. 1965. Т. 4. № 5. С. 317 – 324.

30. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехиздат, 1952. 695 с.

31. *Лейбензон Л.С.* Вариационные методы решения задач теории упругости. М.: Гостехиздат, 1943. 287 с.

32. *Цой П.В.* Методы решения отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. 383 с.

33. *Постольник Ю.С.* Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев; Донецк: Вища шк., 1984. 158 с.

34. *Постольник Ю.С.* К расчету температур и времени нагрева массивных тел при противоточном теплообмене // Изв. вузов. Черная металлургия. 1990. № 6. С. 84 – 86.

35. *Кавадеров А.В., Калугин В.Н.* Закономерности нагрева массивного тела излучением в противотоке // Нагрев металла и работа нагревательных печей: Сб. науч. тр. № 6. ВНИИМТ. Свердловск: Металлургиздат. 1960. С.59 – 70.

36. *Тимошпольский В.И.* Расчетные формулы теплового процесса в толстостенной трубе // Изв. вузов. Черная металлургия. 1985. № 7. С. 171 – 172.

37. *Малевич Ю.А., Тимошпольский В.И., Лигун А.А.* К расчету нагрева массивных тел // Изв. вузов. Энергетика. 1985. № 10. С. 104 – 107.

38. Анализ и обобщение некоторых результатов нагрева массивных тел излучением / В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, Д.Г. Седяко, В.А. Темкин // Научные и прикладные проблемы энергетики. Мн.: Выш. шк., 1986. Вып 13. С. 3 – 6.

39. Способы расчета лучистого нагрева массивных тел / В.И. Тимошпольский, Ю.А. Малевич, Д.Г. Седяко и др. Мн., 1985. С. 19. Деп. в ВИНИТИ 26.07.85. № 5988 – 85.

40. Элементы теории систем и численных методов моделирования процессов тепломассопереноса / В.С. Швыдкий, Н.А. Спиркин, М.Г. Ладыгичев и др. М.: Интермет Инжиниринг, 1999. С. 174 – 231.

41. *Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А.* Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей. М.: Металлургия, 1990. 239 с.

42. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997. 320 с.

43. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. 544 с.

44. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, А.Б. Стеблов, И.А. Павлюченков. Мн.: Выш. шк., 1992. 217 с.
45. *Бухмиров В.В., Крупенников С.А., Созинова.* Оценка эффективности разностных схем решения задачи теплопроводности // Изв. вузов. Черная металлургия. 1999. № 9. С. 84 – 87.
46. *Дюзимбер Г.М.* Замечания о неявном методе конечно-разностного расчета теплопроводности // Теплопередача. Серия С. 1961. Т. 83. № 1. С. 121 – 122.
47. *Grändall S.H.* An optimum implicit recurrence formula for the heat conduction equation // Quarterly of Aplied Mathematics. 1955. V. 13. P. 318 – 320.
48. *Douglas J.* The solution of the diffusion equation of a higner order correct difference equation // Journal of Mathematics and Physics. 1956. V. 35. P. 145 – 151.
49. *Рихтмайер Р.Д.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 263 с.
50. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решения разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
51. *Richardson L.F.* The approximates arifhmetical solution by finite differences of physical problems involving differencial equations with an application to the stress in a masonry dam // Phylos. Trans. Roy. Soc. London. 1910. V. 210. Ser. A. P. 307 – 357.
52. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
53. *Митчелл Э., Уэйт Ф.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. 216 с.
54. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
55. *Сегерлинг Л.* Применения метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
56. *Reinbard H.J.* A-posterior error estimates and adaptive element computations for circular perturbed one space dimentional parabolic equations. Anal. And Numer. Approaches Asymptotic Probl. Anal. Amsterdam. 1981. P. 213 – 233.
57. *Schreuer Y.L.* Nonlinear finite-element heat conduction analyses with direct implicit time integration. Numer. Heat Transfer. 1981. V. 4. № 3. P. 377 – 391.
58. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. 1967. 195 с.
59. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1977. 456 с.
60. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.

УДК 699.046.554

Б.М. НЕМЕНЕНОК, д-р техн. наук, О.Н. КАЛЕНИК, канд. техн. наук, В.Л. ТРИБУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук, Г.В. ПАВЛОВИЧ (БНТУ)

ОСВОЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ФЕРРОАЛЮМИНИЯ ДЛЯ РАСКИСЛЕНИЯ СТАЛЕЙ

Раскисление стали является одной из важнейших операций в технологии производства стальных заготовок. Конечное раскисление осуществляется в большинстве случаев алюминием. Его остаточное содержание может оказывать как положительное, так и отрицательное влияние на свой-