

О ВЫБОРЕ ПОЛЮСОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ (СПОСОБ ДВУХ МОМЕНТОВ)

к. т. н. Холодарь Б.Г.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

Определение опорных реакций представляет собой одну из основных операций при расчете конструкций на прочность. Возникающие реактивные силовые факторы зависят от конструктивного исполнения опорных устройств, геометрии системы и характера нагружения.

Традиционно реакции ищутся в декартовой системе координат с помощью уравнений равновесия. При этом для системы, состоящей из нескольких тел, одновременно приходится определять и реакции внутренних связей, решая системы линейных уравнений. Более рациональным является использование принципа возможных перемещений (ПВП), который позволяет определить искомую реакцию из одного уравнения, независимо от других реакций [1]. При этом, как будет понятно из дальнейшего, разделение реакции на компоненты R_x и R_y вдоль общих осей координат является не самым удобным способом ее представления и затрудняет получение общих выводов.

Освободив систему от внешних связей и используя условия совместности движения в узлах соединения ее частей, можно выразить перемещение любой точки конструкции в зависимости от некоторого описывающего ее движение параметра, который в этом случае будет являться обобщенной координатой. Соответствующее совокупное движение всех точек системы будем называть ее обобщенным движением. Равенство нулю возможной работы или возможной мощности сил системы на выбранном обобщенном движении трансформируется в условие равенства нулю обобщенной силы, из которого определяется соответствующий реактивный силовой фактор.

Приложенная к телам системы активная нагрузка может быть приведена к какой-либо точке, и в этом случае она представится двумя силовыми факторами – главным вектором и главным моментом, каждый из которых в частном случае может оказаться равным нулю. Сведение нагрузки к двум силовым факторам позволяет определить реакции связей методом суперпозиции. При использовании ПВП телам придают соответствующие обобщенные движения, однако расчетные схемы при этом могут оказаться достаточно сложными и не вполне удобными, что ограничивает применение метода. Далее рассматривается методика расчета реакций опорных устройств, которая, как нам представляется, является менее громоздкой и позволяет сами вычисления свести к минимуму. Она является комбинированной и использует одновременно ПВП и условия равновесия. Хотя методология является общей для систем различного конструктивного исполнения, рассмотрим построение решения более подробно для нескольких схем в отдельности.

Применение метода становится понятным из рассмотрения расчетных схем для одного тела (рис.1). Всю активную нагрузку приведем к точке А (F – главный вектор, M_A – главный момент относительно этой точки).

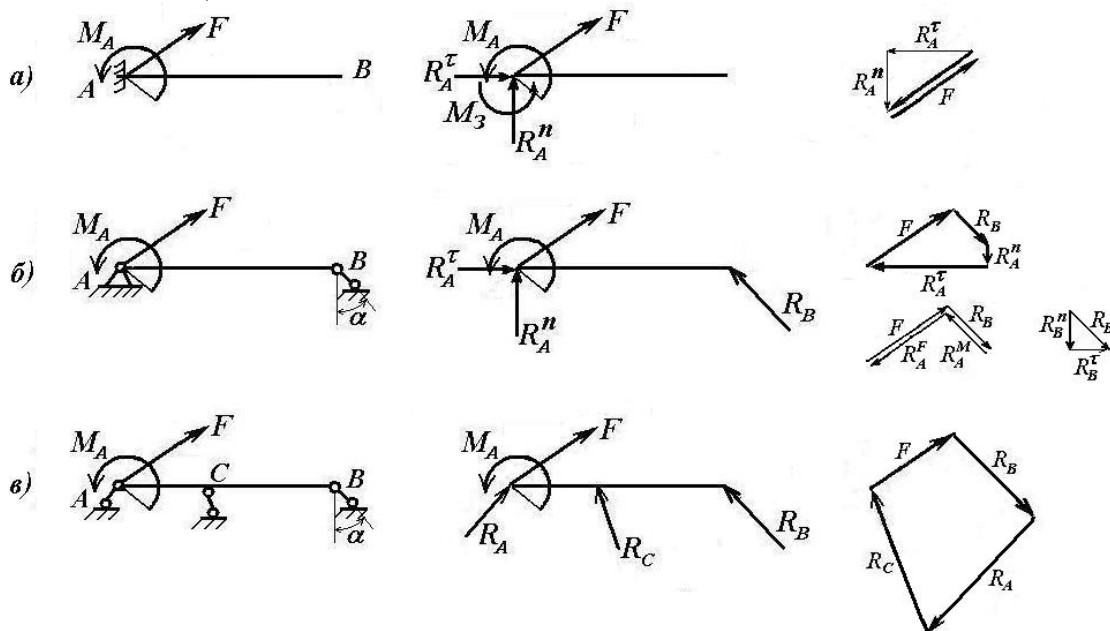


Рис.1. – Схемы закрепления тела – жесткая заделка (а), шарнирное крепление (б), стержневые опоры (в)

Для схем рис.1 соответствующие обобщенные движения очевидны и сводятся к вращению вокруг трех мгновенных центров вращения (МЦВ), два из которых могут быть бесконечно удаленными (случай жесткой заделки). Для схемы "1в" МЦВ находятся на пересечениях линий действия реакций. Определив реакцию одной из опор от моментной нагрузки M_A (для зашпеленной балки это будет момент заделки M_3 , для других – реакция R_B), мы имеем возможность найти остальные неизвестные из векторного условия $\bar{F}^e = \bar{F} + \sum \bar{R}_i = 0$ простым геометрическим построением (показано справа на схемах) или же сделать это в аналитической форме через суммы проекций на выбранные оси координат. Для схемы "1б" видим, что стержневая опора уравнивает только моментную нагрузку, ее реакция равна $R_B = \frac{M_A}{L \cos \alpha}$ и при угле установки опоры $\alpha=0$ бу-

дет минимальной (здесь L – длина балки, МЦВ совпадает с точкой А). На схеме, кроме того, показано графическое определение реакции R_A и ее разложение на составляющие в зависимости от их направления или в связи с вызвавшей их нагрузкой. Для схемы "1в" соответствующий МЦВ находится в точке пересечения линий действия реакций R_A и R_C . Фактически для схем "1б" и "1в" достаточно элементарным вычислением определить только нормальную компоненту реакции R_B ($R_B^n = \frac{M_A}{H}$, где H – расстояние между МЦВ и точкой В), а величина полной реакции может быть

найдена графически (на построениях направление реакции правой опоры согласовано с направлением момента M_A). В связи с возможным применением AutoCad'a или других подобного рода пакетов точность графического способа не уступает аналитическому, неизбежно использующему при вычислениях разного рода округления.

Анализируя схемы, можно сделать заключение, что в схеме "1б" ось стержневой опоры не должна совпадать с прямой АВ ($\alpha \neq 90^\circ$), а в схеме "1в" – все три МЦВ не должны сливаться в одну точку. Целесообразно также в этой схеме иметь две крайних опоры установленными нормально к АВ (чем обеспечиваются минимальные поперечные реакции), а среднюю – вдоль АВ.

Если конструкция состоит из двух тел, то при их шарнирном соединении могут быть реализованы схемы крепления, показанные на рис.2. Активные нагрузки на обоих телах (правом и левом) считаем приведенными к точке А.

Для такой системы независимо от фактической формы тел удобно ввести в рассмотрение их представление двумя прямыми АВ и АС, соединенными шарниром А.

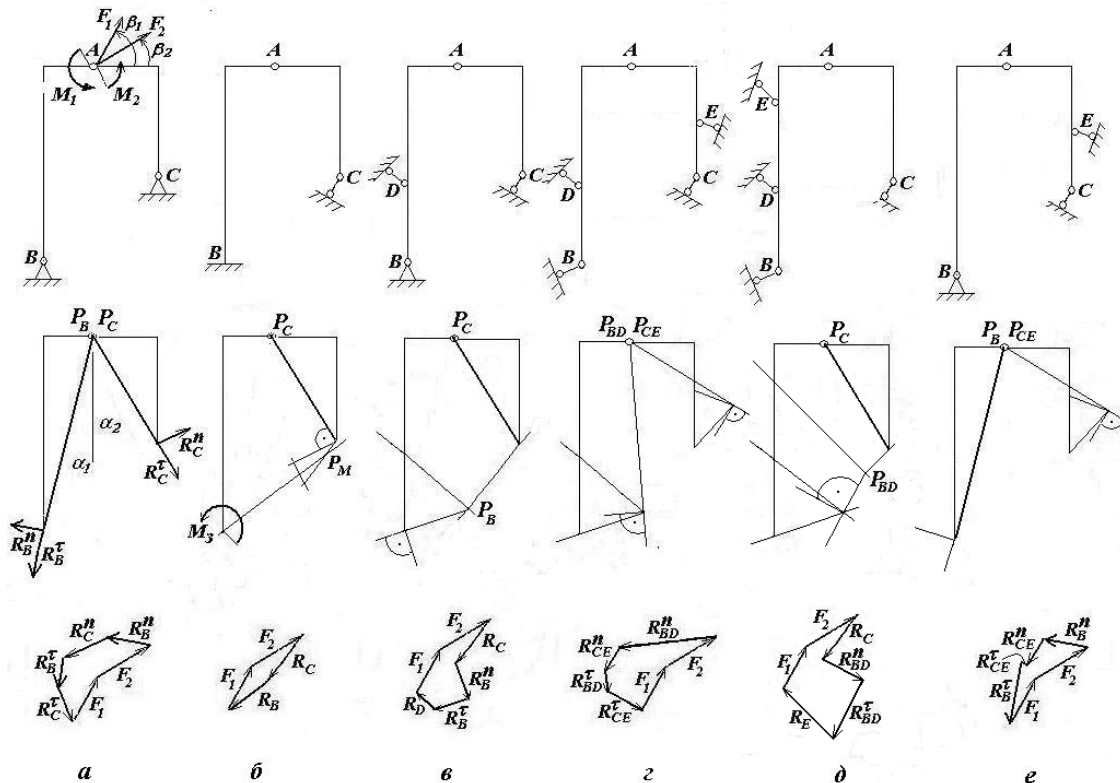


Рисунок 2. – Системы двух тел с различными вариантами установки опор

Для схемы “2а” сразу видно, что если в точках В и С разложить реакции на нормальные и касательные составляющие к этим аппроксимирующим прямым, то определение нормальных составляющих через ПВП можно провести на простейших движениях – вращениях каждого из тел вокруг точки А, при которых из двух активных нагрузок на этих телах (F_1 и M_1 или F_2 и M_2) только моменты, приложенные к каждому из тел, будут производить работу. Т.о., нормальные реакции в опорных точках каждого из тел не зависят от главного вектора \bar{F}^a , а зависят только от момента активных нагрузок на соответствующем теле относительно точки соединения с другим телом, как это, собственно, имело место и для одного тела (рис.1б). Реакции составят $R_B^n = \frac{M_1}{AB}$ и

$$R_C^n = \frac{M_2}{AC}. \text{ Величины касательных компонент реакций } R_B^r \text{ и } R_C^r \text{ зависит от всех 4-х нагрузок } (M_1,$$

$M_2, F_1, F_2)$. Для определения каждой с помощью ПВП необходимо дать системе обобщенное движение, состоящее из двух вращений вокруг соответствующих МЦВ, что ведет к достаточно громоздким вычислениям. Однако эти компоненты легко могут быть найдены графически из векторного равенства $\bar{F}^e = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{R}_D^n + \bar{R}_C^n + \bar{R}_D^r + \bar{R}_C^r = 0$ поскольку их направления известны. При этом отпадает необходимость и в выборе видов обобщенных движений и МЦВ механической системы для определения касательных компонент реакций в опорах В и С, в связи с чем эти схемы не приводятся. Точками Р с соответствующими индексами на схемах отмечены мгновенные центры вращения тел системы для определения той или иной реакции (обращаем внимание, что не используются поступательные движения).

Вместо касательных составляющих при разложении реакций R_B и R_C могут быть выбраны и другие направления, которые представляют интерес для конструктора, так как с точки зрения их определения в принципе ничего не меняется. Еще раз отмечаем, что несложно от графического построения перейти к аналитическому способу вычисления этих реакций. Ввиду простоты получения результата отсутствует необходимость приводить выражения для каждой касательной реакции, которые будут зависеть от формы тел, геометрических и силовых параметров нагружения. В рассматриваемой комбинированной методике эти данные (величины активных силовых факторов, положение точек приложения, углы ориентации сил относительно выбранной системы координат) используются только при приведении системы сил к заданной точке, а решение шести уравнений равновесия с шестью неизвестными, включая внутренние силы в соединении, не требуется.

Поясним кратко построение решения для каждой из оставшихся схем. В случаях, когда реакции связей в разных схемах крепления одинаковы, то при построении силовых многоугольников это отражено векторами одинаковой длины. На фигурах среднего ряда на рис.2 указаны линии действия реакций и некоторые дополнительные построения, поясняющие определение реакций через их компоненты.

Для схемы “2б” после определения реакции R_C аналогично предыдущему случаю находим реакцию R_B из условия равновесия (равенства нулю главного вектора внешних сил системы) $\bar{F}^e = 0$, строим ее линию действия на схеме конструкции, находим МЦВ, относительно которого реакции не дают момента (точка Р_м), и далее определяем момент в заделке M_3 из уравнения $M_P = M_1 + M_2 + M_P(F_1) + M_P(F_2) + M_3 = 0$, соответствующего обобщенному движению всей системы в виде вращения вокруг точки Р_м, лежащей на пересечении линий действия реакций R_C и R_B .

Для схемы “2в” после определения реакции R_C можно определить R_B^n , задавая всей системе обобщенное движение в виде вращения вокруг точки Р_в (рис.2в). После этого две оставшиеся реакции находятся графически, как показано рядом на рисунке для той же схемы.

Для схемы “2г” равнодействующие реакций R_B и R_D , R_C и R_E пройдут через точки пересечения их линий действия Р_{вд} и Р_{се} соответственно. Поэтому, задавая поочередно телам обобщенное движение в виде вращения вокруг точки А, находим нормальные компоненты равнодействующих R_{BD}^n и R_{CE}^n . Далее графически из условия $\bar{F}^e = 0$ находим касательные компоненты этих равнодействующих (схема на рис.2г), после чего можно определить сами реакции стержневых связей R_B, R_D, R_C, R_E , используя положение их линий действия.

Для схемы “2д” найдя, как и прежде, реакцию R_C , можем определить нормальную компоненту любой из равнодействующих двух реакций ($R_{BD}^n, R_{BE}^n, R_{DE}^n$) тела АВ, задавая обобщенное движение в виде вращения всей системы вокруг точки пересечения линий действия третьей реакции с линией действия реакции R_C (для построения на рис.2д конкретно выбрана равнодействующая R_{BD}

и реакция R_E). После этого графическим построением определяем касательную компоненту равнодействующей двух реакций и полную реакцию третьей опоры тела АВ. По компонентам равнодействующей далее находим обе реакции.

Для схемы “2е”, найдя нормальную компоненту реакции R_B и нормальную компоненту R_{CE}^n равнодействующей двух реакций R_C и R_E , имеем возможность касательными компонентами R_{CE}^r и R_B^r замкнуть силовой многоугольник (рис.2е) и затем определить сами реакции по аналогии с рассмотренными выше случаями.

Имея опорные реакции и разделив систему на части, нетрудно определить и реакции в соединительном шарнире С.

ПВП позволяет, анализируя различные схемы крепления тел, находить оптимальные или, наоборот, недопустимые углы установки стержневых опор. Например, для схемы “2д”, как и для одного тела, нельзя допускать совпадения трех МЦВ тела АВ, для схемы “2г” при произвольных F_1 и F_2 нельзя допускать, чтобы точки P_{BC} и P_{DE} лежали на одной прямой, проходящей через точку А и т.п.

Отметим, что во всех рассмотренных схемах для определения реакции (или ее компоненты) обобщенное движение задавалось в виде вращения вокруг одного МЦВ. Поэтому решение задач можно построить в рамках общепринятой методики (без использования понятий об обобщенных движениях), составляя в каждом случае по два уравнения моментов вокруг определенным образом выбранных полюсов (совпадают с соответствующими МЦВ для ПВП). Необходимость решать системы уравнений при этом отсутствует.

Если тел более двух, то при сохранении статической определенности задачи можно по такой же методике определить все неизвестные, идя от последнего присоединенного тела к двум начальным и передавая на предыдущее тело найденную реакцию связи.

Дополнительно затронем вопрос о действии на тела моментной нагрузки.

Как и силы, моментную нагрузку также нельзя переносить с тела на тело. Это хорошо видно, например, на схеме рис.2а с тремя шарнирами. Если момент M приложен к правому

телу, то $R_C^n = \frac{M}{L_2}$ (здесь $L_2=AC$), а так как тело АВ находится в равновесии под действием только

двух сил, то направление реакций в точке А и точке С идет по линии АС, и мы легко находим эти реакции и касательную компоненту R_B^r реакции R_B из условия равновесия $\bar{F} = 0$ графическим построением или через проекции. При переносе момента M на левое тело величины реакций и их направления изменятся. Отметим, что для определения всех реактивных нагрузок в этом случае требуется всего одно вычисление – величина нормальной реакции одной из опор.

Здесь представляет интерес попутная задача – как распределить между двумя телами момент $M=M_1+M_2$, чтобы реакции опор были такими же, как при приложении момента M к жесткой системе тел (сварка вместо шарнира в точке А), когда они составляют $R_B=R_C=M/BC$ и ориентированы перпендикулярно прямой ВС. Для тел, соединенных шарниром, компоненты реакции на опоре В от моментов M_1 и M_2 будут равны:

$$R_B^n = M_1 / L_1, \quad R_B^r = \frac{M_1}{L_1 \operatorname{tg} \beta} + \frac{M_2}{L_2 \sin \beta},$$

где $L_1=AB$, $L_2=AC$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$.

Введя безразмерные параметры

$$m_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \quad m_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \xi = \frac{L_1}{L_2}$$

из условия $(R_B^n)^2 + (R_B^r)^2 = (M / BC)^2$ находим функции

$$m_1 = \frac{\xi(\xi - \cos \beta)}{1 + \xi^2 - 2\xi \cos \beta}, \quad m_2 = 1 - m_1.$$

Их графики приведены на рис.3 и показывают достаточную сложную зависимость решения от параметров ξ и β . При найденной связи между величинами моментов M_1 и M_2 реакции на опорах будут минимальными из возможных.

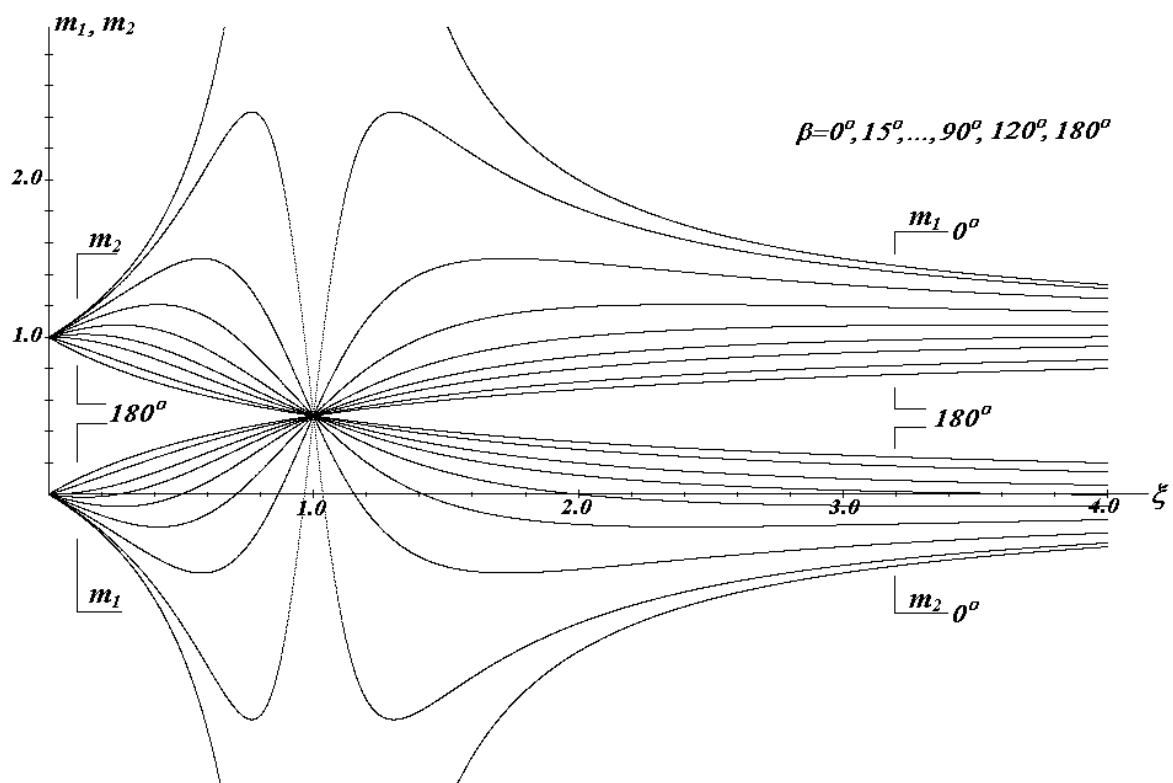


Рис.3. Влияние параметров ξ и β на функции m_1, m_2

РЕЗЮМЕ

Определение реакций независимо друг от друга базируется на их разложении по специальному образом выбираемым направлениям и соответствующем выборе полюсов при использовании уравнений моментов. Методика реализуется в аналитической или графо-аналитической форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.В. Бутенин, Я.Л. Луни, Д.Р. Меркин. Курс теоретической механики. В двух томах. СПб, издательство «Лань», 1998. -736 с.

SUMMARY

Determination of the reactions independently from each other is based on their decomposition along specially chosen axes and on a corresponding choice of poles when using the equations of the moments. The technique is realized either in an analytical or graphic-analytical form.

Поступила в редакцию 05.09.2013