

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЕМКОСТЕЙ ПОЖАРНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

к. ф.-м. н. ¹ Мартыненко Т.М., ² Пранкевич С.А., к. т. н. ¹ Кулаковский Б.Л.

¹ ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск

² УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Оболочками в теории упругости называют пространственные упругие тела, одно измерение которых мало по сравнению с двумя другими. Они часто применяются в качестве перекрытий, куполов в различных строительных сооружениях, а также в машино-, авиа-, судостроении и других отраслях народного хозяйства в качестве высокопрочных элементов машин и приборов общего и специального назначения. Теоретические основы расчета оболочек на прочность, колебания и устойчивость заложены в работах таких ученых, как В.З. Власов, И.Н. Векуа, И.И. Ворович, А.Л. Гольденвейзер, Г.И. Михасев, А.Н. Гузь, А.И. Лурье, Н.А. Кильчевский, В.В. Новожилов, Х.М. Муштари, А. Ляв, В. Флюгге, С.П. Тимошенко, Э. Рейснер, Л. Доннел и др., которые в своих трудах вывели разрешающие системы уравнений общей, безмоментной и моментной теорий, выполнили решение многочисленных задач при различных предположениях относительно законов деформирования оболочек по толщине и т.д. Эти основополагающие уравнения используются и в настоящее время при решении различных задач расчета оболочек на прочность, исследовании их колебаний и устойчивости.

В частности огромное практическое значение имеет применение выше названных теорий в решении задач оптимального проектирования конструкций, таких как, например, емкостей пожарных автомобилей.

Форма поперечного сечения и размерно-весовые параметры ёмкости во многом зависят от компоновки и назначений пожарных аварийно-спасательных автомобилей (ПАСА). На вооружении подразделений по чрезвычайным ситуациям находятся разнообразные ПАСА для перевозки огнетушащих веществ: воды, пенообразователя, порошка. Эти вещества перевозятся в ёмкостях различной формы:

- прямоугольного и эллиптического сечения, которые применяются на пожарных автоцистернах;
- цилиндрического сечения – на автомобилях порошкового пожаротушения.

При проектировании ПАСА эллиптические оболочки применяются наравне с цилиндрическими и прямоугольными, однако обладают более сложными геометрическими параметрами и их расчет представляет определенных интерес.

Зададим эллиптическую оболочку произвольного поперечного очертания. Линиями главной кривизны в данном случае будут направляющие S и образующие X цилиндра, которые и примем в качестве криволинейных ортогональных координат поверхности. При этом криволинейная координата X будет измеряться вдоль образующих от одного из оснований цилиндра, а криволинейная координата S - вдоль направляющих от одной из образующих цилиндра.

Для решения такой задачи привлечем общую теорию тонких оболочек. При этом имеется в виду, что конструкция оболочки удовлетворяет условиям существования безмоментного напряженного состояния, согласно которым эллиптическая оболочка должна быть достаточно короткой, иметь поперечное сечение плавного очертания с плавно изменяющимися толщиной, радиусом кривизны сечения и плавным изменением нагрузки, действующей на оболочку.

Перемещения u , v и w отсчитываются по направлениям касательных к криволинейным координатам X , S и по нормали \bar{e}_n . Если длина оболочки L , тогда ее торцевые сечения будут определяться координатами $x = 0$ и $x = L$. Обозначим радиус кривизны поперечного сечения оболочки через $r(s)$. Этот радиус будет функцией только криволинейной координаты s . Оболочка нагружена равномерным давлением p . Под действием этого давления в оболочке возникают усилия, T_1 – направлено вдоль по образующей, а усилие T_2 – по касательной к направляющей, $S(x; s)$ – обобщённые растягивающие и касательные силы.

Для определения возникающих в оболочке усилий воспользуемся системой дифференци-

альных уравнений равновесия элемента оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии. Подставим в эту систему дифференциальных уравнений значения параметров Ляме срединной поверхности некруговой цилиндрической оболочки $A_1 = A_2 = 1$, а также значения главных радиусов кривизны $R_1 = \infty$, $R_2 = r(s)$.

В результате приходим к следующей системе уравнений [1]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + q_1 = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} + q_2 = 0; \quad T_2 = q_n r(s). \quad (1)$$

Полученная система интегрируется в замкнутом виде. При этом одно из основных усилий безмоментной оболочки T_2 дается в явном виде. Это усилие не зависит от x , т. е. по длине оболочки не меняется.

Сделав аналогичную подстановку A_1 , A_2 и R_1 , R_2 в систему, получим систему дифференциальных уравнений для определения перемещений безмоментной цилиндрической оболочки [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E\delta} (T_1 - \mu T_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\omega}{r(s)} = \frac{1}{E\delta} (T_2 - \mu T_1); \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E\delta} S. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученная система также интегрируется в замкнутом виде.

Поскольку на оболочку действует только равномерное давление, в полученных уравнениях (1) и (2) следует положить $q_1 = q_2 = 0$; $q_n = p$. Тогда вместо системы (1) будем иметь:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} = 0; \quad T_2 = q_n r(s). \quad (3)$$

Рассмотрим статически определимый вариант граничных условий на торцевых сечениях некруговой оболочки, прежде чем производить интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений (2) и (3) примем:

$$T_1 = 0, \quad v = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L \quad (4)$$

Теперь произведем интегрирование системы (3). Из третьего уравнения системы (3) усилие T_2 уже определено и равно:

$$T_2 = pr(s). \quad (5)$$

Подставляя (5) во второе уравнение (3), получим $\frac{\partial S}{\partial x} + p \frac{dr}{ds} = 0$.

Проинтегрировав полученное равенство по x , приходим к следующему выражению для касательного усилия S , $S = -px \frac{dr}{ds} + f_1(s)$ где $f_1(s)$ неизвестная функция.

В силу симметрии оболочки, граничных условий и нагрузки относительно среднего сечения $x = \frac{L}{2}$, касательные усилия в этом сечении должны отсутствовать, что дает основание записать $-p \frac{L}{2} \frac{dr}{ds} + f_1(s) = 0$.

Таким образом, функция $f_1(s)$ определена, и касательное усилие будет равно:

$$S = p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{ds}. \quad (6)$$

Взяв производную по s от (6) и подставив ее в первое уравнение (3), получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{d^2 r}{ds^2} = 0.$$

Проинтегрировав последнее равенство по x , будем иметь:

$$T_1 = -p \left(x \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} + f_2(s) \right) \quad (7)$$

где $f_2(s)$ - вторая неизвестная функция.

Используя граничные условия (4), из выражения (7) находим $f_2(s) = 0$, и усилие T_1 оказывается равным:

$$T_1 = -px \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} \quad (8)$$

Таким образом, при данном варианте граничных условий мы определили все усилия, не прибегая к определению перемещений оболочки. Однако это не всегда оказывается возможным. Выпишем окончательные формулы для усилий цилиндрической оболочки при статически определенном варианте граничных условий:

$$T_1 = -px \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2}; \quad T_2 = pr(s); \quad S = p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{ds}. \quad (9)$$

Формулы (9) при заданной форме поперечного сечения и размерах оболочки дают возможность определить усилия в любой точке оболочки.

Примем следующие обозначения: a – большая полуось эллипса, b – малая полуось эллипса; φ – угол, образуемый нормалью к эллипсу с его малой осью, $r(\varphi)$ – радиус кривизны эллипса, ε – эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$, F – фокус эллипса (рис. 1).

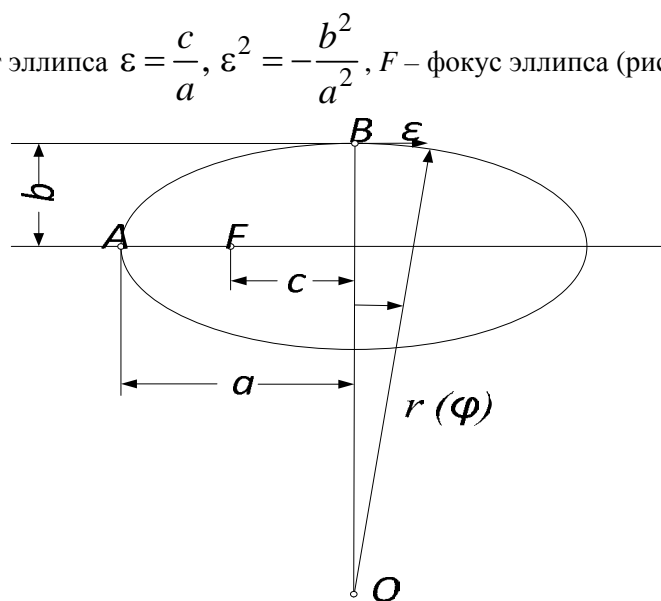


Рисунок 1. - Эллиптическая оболочка произвольного поперечного очертания

Радиус кривизны эллипса $r(\varphi)$ определяется по выражению, известному из аналитической геометрии [3]:

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Продифференцируем выражение (10) от радиуса кривизны r по s до четвертого порядка включительно, принимая во внимание соотношение $ds = rd\varphi$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}; \quad \frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}; \\ \frac{d^3 r}{ds^3} &= -\frac{6a^2}{b^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi; \\ \frac{d^4 r}{ds^4} &= -\frac{6a^3}{b^6} \varepsilon^2 \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \right)^{\frac{3}{2}} \left(\left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив соотношения (11) в зависимости (9), придем к следующим формулам для усилий:

$$\begin{aligned} T_1 &= -px \frac{L-x}{2} \frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}; \\ T_2 &= p \frac{b^2}{a} \frac{1}{\left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \right)^{\frac{3}{2}}}; \\ S &= -p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как при расчетах нас интересуют наибольшие значения усилий, напряжений и перемещений, то и произведем их определение.

Усилие T_2 достигает максимума при наибольшем значении r , т. е. в концах малой полуоси эллипса $\varphi = 0$, $T_2 = p \frac{b^2}{a}$.

Касательное усилие достигает наибольшего значения в торцевых сечениях оболочки $x = 0$ и $x = L$. Определим, в какой точке направляющей этих сечений касательное напряжение имеет максимальное значение. Поскольку усилие S пропорционально $\frac{dr}{ds}$ то и максимум S соответ-

ствует максимуму $\frac{dr}{ds}$. Взяв производную по s от $\frac{dr}{ds}$ и приравняв ее нулю, определим значение φ , при котором усилие S имеет максимум. Получим

$$\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi = 0. \quad \text{Откуда } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}.$$

Подставляя эти значения в третью формулу (12), находим $S_{\max} = -\frac{3}{4} pL \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$. Что касает-

ся усилия T_1 , то оно достигает наибольшего значения в среднем поперечном сечении оболочки $x = \frac{L}{2}$. По длине направляющей эллипса усилие T_1 четырежды меняет свой знак при значениях угла φ , лежащих между 0 и 2π . При этом экстремальные значения усилия принимает в концах

(точка A) и (точка B) полуосей, оказываясь при этом равным $T_{1_{\max}} = \frac{3}{8} \frac{paL^2}{b^2} \varepsilon^2$,

$$T_{1_{\min}} = -\frac{3}{8} \frac{paL^2}{b} \varepsilon^2.$$

Из перемещений наибольший интерес представляет перемещение ω (прогиб оболочки). Это перемещение можно определить, подставив зависимости (11) в выражение (9). В результате получим

следующие значения этого перемещения в конце большой $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и малой $\varphi = 0$ полуосей:

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{pa^4}{E\delta b^2} \left(-\frac{b^6}{a^6} + \frac{3}{4} \frac{L^2 b^2}{a^4} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \frac{L^4}{a^2 b^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \right); \\ \omega_b &= -\frac{pa^4}{E\delta b^2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{L^2}{a^2} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \frac{L^4}{a^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Из формул (13) видно, что под действием внутреннего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета. Таким образом полученные зависимости позволяют предусмотреть соответствующие инженерные решения при конструировании эллиптических оболочек повышенной прочности как например применение вертикальных ребер жесткости из композитных материалов. (См. рис)

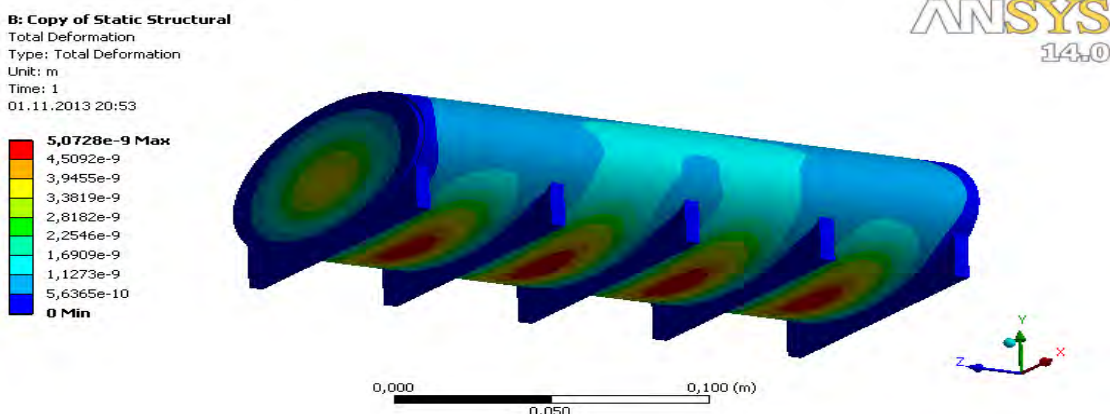


Рисунок 2. - Распределение деформации в эллиптической оболочке.

Расчет показал, что для упрочнения конструкций оболочки заданной длины необходимо предусмотреть пять ребер жесткости.

РЕЗЮМЕ

Проведено математическое исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической оболочки с использование программного комплекса ANSYS. Из которого видно, что под действием внутреннего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Белов. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компания, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов // Томск: STT, 2004.- 465с.
2. Bangash M. Y. H. Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies. // Bangash M. Y. H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. - 450 p.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.-Л.: Физматгиз, 1949. – 784 с.
4. Белкин А.Е., Гаврюшин С. С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 232с.

SUMMARY

A mathematical study hard- exponential status An elliptic shell with the use of software package ANSYS. From which it appears, That under the action of high pressure shaft increases, A low is shortened, i.e. side-to-side cross section becomes a ellipse with eccentricity.