

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ СОСТАВНЫХ БАЛОК ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

д. т. н. Дудяк А.И., асп. Гурковская О.И.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

В данной статье описывается определение перемещений при изгибе составных балок из неоднородных материалов методом начальных параметров.

Если рассматривать чистый изгиб консольной балки прямоугольного сечения составленного из двух неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости (E_1, E_2) и неравными площадями их сечений (A_1, A_2) (рис.1), то уравнение кривизны нейтрального слоя имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E_1 I_{x1} + E_1 I_{x2} + E_2 I_{x3}} \quad (1)$$

где ρ - кривизна нейтрального волокна, I_{x1}, I_{x2}, I_{x3} - момент инерции частей поперечного сечения балки, относительно ее нейтральной оси; E_1, E_2 - модули упругости материала; $E_1 I_{x1} + E_1 I_{x2} + E_2 I_{x3}$ - жесткость сечения балки при изгибе.

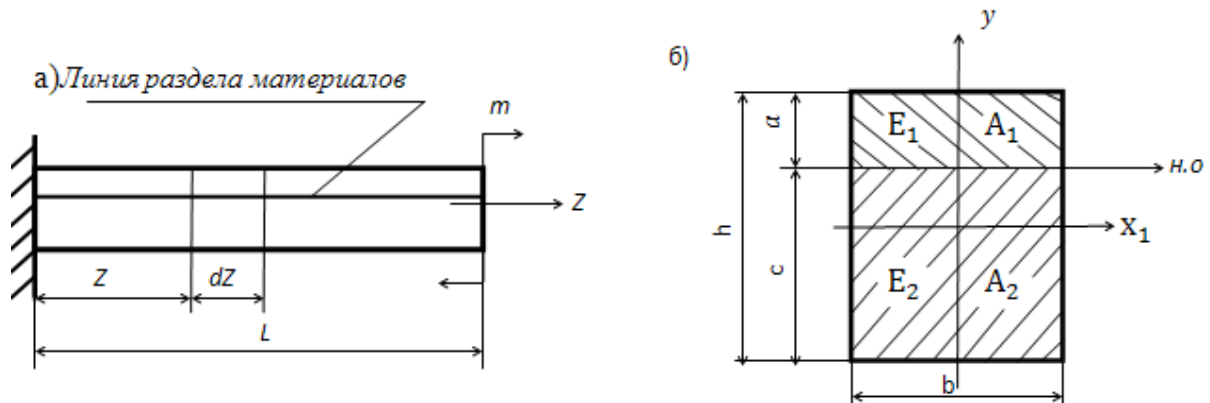


Рисунок 1. – Схема нагружения (а) и форма сечения балки (б)

Тогда, если консольная балка прямоугольного сечения составленного из n неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости ($E_1, E_2 \dots E_n$) и неравными площадями сечений ($A_1, A_2 \dots A_n$) подвергается чистому изгибу, то уравнение кривизны нейтрального слоя можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{\sum_{i=1}^n E_i I_{xi}} \quad (2)$$

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При поперечном изгибе ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия поперечных нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения, а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений принимаются равными углам наклона φ , касательной к изогнутой оси балки (рис. 2).

Прогибы и углы поворотов в балках являются функциями координаты z и их определение необходимо для расчета жесткости. Рассмотрим изгиб стержня в одной из главных плоскостей например, в плоскости yz . Как показывает практика, в составе реальных сооружений стержни испытывают весьма малые искривления ($\frac{y_{\max}}{l} = 10^{-2} - 10^{-3}$, где y_{\max} - максимальный прогиб; l - пролет балки).

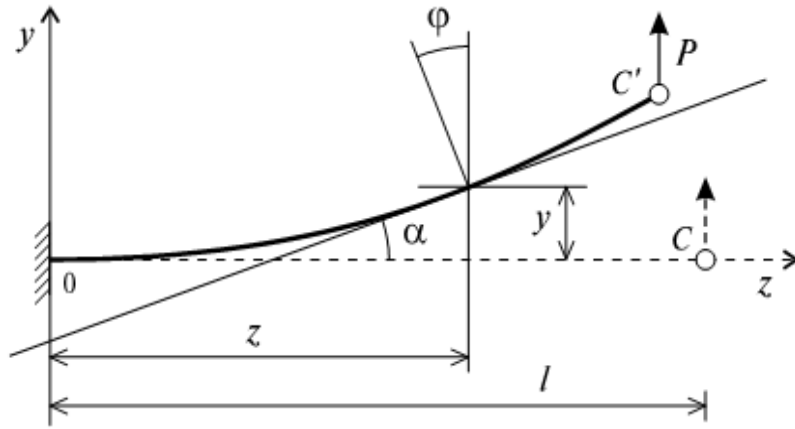


Рисунок 2. – Схема искривления оси балки при изгибе.

В этом случае неизвестными функциями, определяющими положение точек поперечных сечений балки являются $y(z)$ и $\varphi(z) = \alpha(z)$ (рис.2). Совокупность значений этих параметров по длине балки образуют две функции от координаты z - функцию перемещений $y(z)$ и функцию углов поворота $\varphi(z)$. Из геометрических построений (рис. 2) наглядно видно, что угол наклона касательной к оси z и угол поворота поперечных сечений при произвольном z равны между собой. В силу малости углов поворота можно записать:

$$\varphi(z) \approx \text{tg } \alpha(z) = \frac{dy}{dz} \quad (3)$$

Из курса математического анализа известно, что кривизна плоской кривой $y(z)$ выражается

следующей формулой:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \right]^3}$$

В связи с малостью величины $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ по сравнению с единицей последнее выражение можно существенно упростить, и тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2} \quad (4)$$

Учитывая (2) и (4), получим следующее важное дифференциальное соотношение

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \frac{d^2y}{dz^2} = M_{\sigma(z)} \quad (5)$$

Введем еще одно упрощение, связанное с углом поворота поперечного сечения. Если изогнутая ось балки является достаточно пологой кривой, то углы поворота сечений с высокой степенью точности можно принимать равными первой производной от прогибов. Отсюда следует, что прогиб балки принимает экстремальные значения в тех сечениях, где поворот равен нулю.

В общем случае, для того, чтобы найти функции прогибов $y(z)$ и углов поворота $\varphi(z)$, необходимо решить уравнение (5), с учетом граничных условий между смежными участками.

Если момент и жесткости являются непрерывными по всей длине балки функциями $M_x(z)$ и $E_i I_{xi}(z)$, то решение может быть получено, как результат последовательного интегрирования уравнения (5) по всей длине балки:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \frac{dy}{dz} = \varphi(z) \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} = \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 \quad (6)$$

интегрируя один раз, получаем закон изменения углов поворота:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n E_i I_{xi}} \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 \quad (7)$$

Интегрируя (13), получаем:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{(z)} = \int_z^l dz \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 z + D_1 \quad (8)$$

Тогда функция прогибов будет иметь вид:

$$y_{(z)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n E_i I_{xi}} \left(\int_z^l dz \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 z + D_1 \right) \quad (9)$$

Здесь C_1 и D_1 произвольные постоянные интегрирования могут быть определены из граничных условий.

Для нахождения C_1 , рассмотрим балку в координате $z = 0$, получим:

$$\int_z^l M_{x(z)} dz = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_0 = C_1 \quad (10)$$

Из (10) определим C_1 как угол поворота сечения в начале координат умноженный на приведенную жесткость сечения балки.

Для нахождения D_1 , рассмотрим балку при $z = 0$, учитывая (10), получим:

$$D_1 = \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \cdot y_0 \quad (11)$$

Из (11) определим D_1 как перемещение сечения по оси y в начале координат умноженное на приведенную жесткость сечения балки.

Если балка имеет постоянное поперечное сечение по длине, то для определения функций прогибов и углов поворота удобно применить *метод начальных параметров*, суть которого в следующем.

Рассмотрим балку (рис. 3) с постоянным поперечным сечением, нагруженную взаимоуравновешенной системой положительных силовых факторов (т.е., вызывающих вертикальные перемещения сечений балки в положительном направлении оси y). Начало системы координат поместим на левом конце балки так, чтобы ось z проходила вдоль оси балки, а ось y была бы направлена вверх. На балку действуют: момент M , сосредоточенная сила P и равномерно распределенная на участке бруса нагрузка интенсивностью q (рис. 3).

Определим особенности, вносимые в уравнение упругой линии, различными типами внешних силовых факторов. Для этого составим выражение изгибающих моментов для каждого из пяти участков заданной системы.

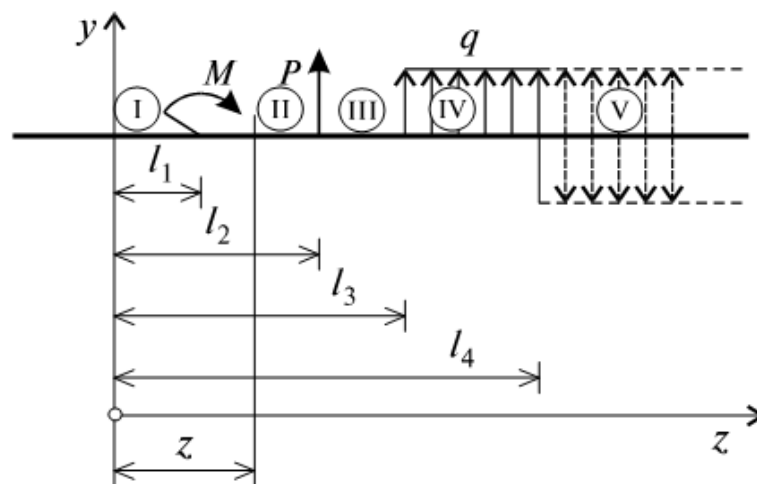


Рисунок 3. – Балка, нагруженная взаимоуравновешенной системой положительных силовых факторов

Участок I ($0 < z < l_1$)

$$M_{x(z)} = 0$$

Участок II ($l_1 < z < l_2$)

$$M_{x(z)} = M$$

Участок III ($l_2 < z < l_3$)

$$M_{x(z)} = M + P(z - l_1)$$

$$\text{Участок IV } (l_3 < z < l_4) \quad M_{x(z)} = M + P(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} \quad (12)$$

$$\text{Участок V } (l_4 < z < L) \quad M_{x(z)} = M + P(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}$$

На участке V, где распределенная нагрузка отсутствует, при выводе выражения для изгибающего момента, с целью сохранения рекуррентности формул для разных участков была приложена взаимоуравновешенная распределенная нагрузка.

Интегрируя (12), получим выражения для углов поворотов сечений балки:

$$\begin{aligned} \text{Участок I } (0 < z < l_1) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z1} = C_1 \\ \text{Участок II } (l_1 < z < l_2) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z2} = M(z - l_1) + C_2 \\ \text{Участок III } (l_2 < z < l_3) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z3} = M(z - l_1) + P \frac{(z - l_2)^2}{2} + C_3 \\ \text{Участок IV } (l_3 < z < l_4) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z4} = M(z - l_1) + P \frac{(z - l_2)^2}{2} + q \frac{(z - l_3)^3}{6} + C_4 \\ \text{Участок V } (l_4 < z < L) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z5} = M(z - l_1) + P \frac{(z - l_2)^2}{2} + q \frac{(z - l_3)^3}{6} - q \frac{(z - l_4)^3}{6} + C_5 \end{aligned} \quad (13)$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 , из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } z = l_1, \quad & \varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow C_1 = C_2 \\ \text{при } z = l_2, \quad & \varphi_2 = \varphi_3 \rightarrow C_2 = C_3 \\ \text{при } z = l_3, \quad & \varphi_3 = \varphi_4 \rightarrow C_3 = C_4 \\ \text{при } z = l_4, \quad & \varphi_4 = \varphi_5 \rightarrow C_4 = C_5 \end{aligned}$$

Учитывая выражение (16) получаем: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{(0)}$

Интегрируя (19), получим выражения для прогибов:

$$\begin{aligned} \text{Участок I } (0 < z < l_1) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z1} = C_1 z + D_1 \\ \text{Участок II } (l_1 < z < l_2) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z2} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + C_2 z + D_2 \\ \text{Участок III } (l_2 < z < l_3) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z3} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + P \frac{(z - l_2)^3}{6} + C_3 z + D_3 \\ \text{Участок IV } (l_3 < z < l_4) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z4} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + P \frac{(z - l_2)^3}{6} + q \frac{(z - l_3)^4}{24} + C_4 z + D_4 \\ \text{Участок V } (l_4 < z < L) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z5} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + P \frac{(z - l_2)^3}{6} + q \frac{(z - l_3)^4}{24} - q \frac{(z - l_4)^4}{24} + C_5 z + D_5 \end{aligned} \quad (14)$$

Определим постоянные интегрирования D_1, D_2, D_3, D_4 и D_5 , из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } z = l_1, \quad & y_1 = y_2 \rightarrow D_1 = D_2 \\ \text{при } z = l_2, \quad & y_2 = y_3 \rightarrow D_2 = D_3 \\ \text{при } z = l_3, \quad & y_3 = y_4 \rightarrow D_3 = D_4 \\ \text{при } z = l_4, \quad & y_4 = y_5 \rightarrow D_4 = D_5 \end{aligned}$$

Учитывая выражение (17) получаем $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{(0)}$

Тогда формула для углов поворотов сечений балки примет следующий окончательный вид:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_z = \varphi_0 \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} + \sum_{i=1}^n M_i (z - l_1) + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(z - l_2)^2}{2} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_3)^3}{6} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_4)^3}{6} \quad (15)$$

Соответственно, формула для прогибов примет окончательный вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{(z)} = & y_0 \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} + \varphi_0 z \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} + \sum_{i=1}^n m_i \frac{(z - l_1)^2}{2} + \\ & + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(z - l_2)^3}{6} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_3)^4}{24} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_4)^4}{24} \end{aligned} \quad (16)$$

Как видно, для определения прогибов и углов поворота балок данным методом начальных параметров достаточно знание лишь значений прогиба y_0 , угла поворота φ_0 в начале системы координат.

РЕЗЮМЕ

В данной статье описывается определение перемещений при изгибе консольной балки прямоугольного сечения составленного из n неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости ($E_1, E_2 \dots E_n$) и неравными площадями сечений ($A_1, A_2 \dots A_n$) методом начальных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Издательство «Наука», 1972. – 541с.
2. Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов. – Издательство «Техника», Киев, 1967. – 783с.
3. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. - М.: Издательство «Наука», 1972 – 559с.
4. Дудяк А.И., Хмелев А.А., Сахнович Т.А., Гурковская О.И.. Особенности расчета на прочность составных балок из неоднородных материалов. – Минск, БНТУ, 2013 – 25с.

SUMMARY

This article describes the determination of the bending motion cantilever beam of rectangular cross-section composed of n heterogeneous materials with different values of the elastic moduli ($E_1, E_2 \dots E_n$) and uneven areas of sections ($A_1, A_2 \dots A_n$) by initial parameters method.

Поступила в редакцию 21.10.2013