УДК 621.311

ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ НОРМ МАТРИЦ ДЛЯ АНАЛИЗА СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Бруцкий-Стемпковский Н.А.

Научный руководитель - м.т.н., старший преподаватель Волков А.А.

Итерационные методы - это численные и приближенные методы решения систем уравнений. Суть метода заключается в нахождении по приближенному значению величины следующего значения, которое является более точным. Метод позволяет получить решение в виде предела:

$$X_* = \lim_{k\to\infty} X^{\langle k\rangle},$$

где $X^{\langle k\rangle}$ - вектор значений величины, полученный на k-той итерации.

Для того, чтобы решить систему уравнений итерационным методом, необходимо построить рекуррентное соотношение вида

$$X = \varphi(X)$$

и организовать циклические вычисления

$$X^{\langle k+1\rangle} = \varphi(X^{\langle k\rangle}).$$

В общем виде система уравнений имеет вид

$$X = \beta + \alpha \cdot X.$$

Для сходимости итерационного процесса решения системы, подготовленной к итерациям и приведенной к виду $X = \beta + \alpha \cdot X$, необходимо и достаточно, чтобы наибольшее по модулю собственное значение матрицы α, подготовленной к итерационному процессу, было меньше 1

$$\left|\lambda_{\alpha\max}\right| < 1.$$

Однако нахождение собственных значений - трудоемкий процесс. Для этого необходимо от каждого элемента, находящегося на главной диагонали, отнять некоторые λ_i и найти их, прировняв определитель данной матрицы к нулю.

Вместо собственных значений матрицы можно использовать более доступные величины - канонические нормы, а именно l, m или k-норму Доказано, что любая из этих канонических норм больше любого из собственных значений λ_i [1].

l -норма - наибольшая из сумм элементов всех строк матрицы.

m -норма - наибольшая из сумм элементов всех столбцов матрицы.

k -норма - корень из суммы квадратов всех элементов матрицы (Евклидова норма).

Отыскание норм матрицы можно применить для решения системы уравнений режима электрической сети методом Ньютона [2]. В этом методе нелинейная система уравнений заменяется линейной. Коэффициенты в системе так же, как и значения напряжений в узлах, уточняются на каждой итерации. В этом и заключается вся сложность. Даже у заведомо расходящегося итерационного процесса в начале и собственные значения матрицы коэффициентов, и её нормы могут быть по модулю меньше единицы.

В программе Mathcad отыскание собственных значений и норм матрицы реализовано с помощью встроенных функций:

eigenvals(M) - возвращает вектор собственных значений матрицы М.

norm1(M) - возвращает наибольшую из *m* и *l*-норм матрицы М.

norme(M) - возвращает Евклидову норму матрицы М.

Аргументом всех функций является квадратная матрица М.

Пример реализации алгоритма решения системы уравнений методом Ньютона:

$$
\begin{array}{l}
B := \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow 0 \\
M \leftarrow 0 \\
\text{while } 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
W \leftarrow Y_y + \operatorname{diag}\left[\dfrac{\bar{S}}{\left(U^{\langle k+1\rangle}\right)^2}\right] \\
\text{for } i \in 1..\operatorname{rows}(S) \\
\quad F_i \leftarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{\operatorname{rows}(S)} \left[Y_{y_{i,j}} \cdot \left(U^{\langle k+1\rangle}\right)_j\right] - \sum_{j=1}^{\operatorname{rows}(S)} \left(Y_{y_{i,j}}\right) \cdot U_{bu} - \dfrac{\bar{S}_i}{\left[\left(\bar{U}\right)^{\langle k+1\rangle}\right]_i} \\
U^{\langle k+2\rangle} \leftarrow U^{\langle k+1\rangle} - W^{-1} \cdot F \\
\lambda^{\langle k+1\rangle} \leftarrow \operatorname{eigenvals}(W) \\
\text{for } i \in 1..\operatorname{rows}(\lambda) \\
\quad \text{for } j \in 1..\operatorname{cols}(\lambda) \\
\quad\quad \lambda_{i,j} \leftarrow \left|\lambda_{i,j}\right| \\
B^{\langle 4\cdot k+1\rangle} \leftarrow U^{\langle k+2\rangle} \\
B^{\langle 4\cdot k+2\rangle} \leftarrow \lambda^{\langle k+1\rangle} \\
B_{1,4\cdot k+3} \leftarrow \operatorname{norm1}(W) \\
B_{1,4\cdot k+4} \leftarrow \operatorname{norme}(W) \\
\text{break if } \left|\left|U^{\langle k+2\rangle}\right| - \left|U^{\langle k+1\rangle}\right|\right| < \varepsilon \\
\text{for } i \in 1..\operatorname{rows}(B) \\
\quad M \leftarrow B_{i,4\cdot k+2} \text{ if } B_{i,4\cdot k+2} > M \\
\text{if } M > 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..\operatorname{rows}(B) \\
\quad B_{i,4\cdot k+1} \leftarrow 0 \\
B
\end{array}
\right. \\
\text{break if } M > 1 \\
k \leftarrow k + 1
\end{array}
\right. \\
B
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

В результате мы получаем матрицу В, у которой количество строк равно количеству узлов без балансирующего, а количество столбцов равно количеству итераций, умноженное на 4. За одну итерацию алгоритм заполняет сразу 4 столбца. В первый записываются напряжения в узлах в алгебраической форме, во второй - собственные значения матрицы Якоби, третий - наибольшая из m и l-норм матрицы, четвертый - Евклидова норма матрицы.

Далее эти значения можно разложить по отдельным матрицам:

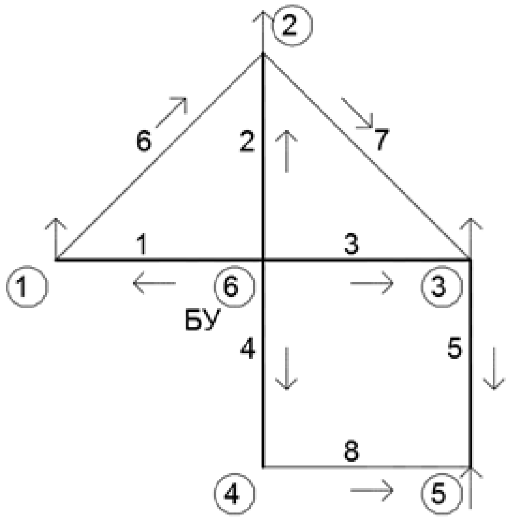
```
U :=  | a ← 1
      | for k ∈ 1..cols(B)
      |   if mod(k,4) = 1
      |     | U⟨a⟩ ← B⟨k⟩
      |     | a ← a + 1
      | U

λ :=  | a ← 1
      | for k ∈ 1..cols(B)
      |   if mod(k,4) = 2
      |     | λ⟨a⟩ ← B⟨k⟩
      |     | a ← a + 1
      | λ

norm1 :=  | a ← 1
          | for k ∈ 1..cols(B)
          |   if mod(k,4) = 3
          |     | norm1⟨a⟩ ← B1,k
          |     | a ← a + 1
          | norm1

norme :=  | a ← 1
          | for k ∈ 1..cols(B)
          |   if mod(k,4) = 0
          |     | norme⟨a⟩ ← B1,k
          |     | a ← a + 1
          | norme
```

Рассчитаем режим электрической сети с различными коэффициентами утяжеления по нагрузке.



$$U_{bu} = 120$$

$$Z_v = \begin{pmatrix} 4.235 + 14.175i \\ 5.203 + 17.415i \\ 6.966 + 17.759i \\ 11.484 + 24.36i \\ 6.966 + 17.759i \\ 6.534 + 21.87i \\ 23.54 + 24.42i \\ 18.404 + 19.092i \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 - Схема электрической сети с нумерацией узлов и ветвей, сопротивления ветвей

Расчет выполним в программах MathCad и RASTR.

Режим при номинальной нагрузке:

$$S = \begin{pmatrix} -57 - 20.688i \\ -26 - 13.32i \\ -21 - 11.335i \\ 0 \\ 45 + 23.054i \end{pmatrix} \quad Y_y = \begin{pmatrix} 0.032 - 0.107i & -0.013 + 0.042i & 0 & 0 & 0 \\ -0.013 + 0.042i & 0.049 - 0.116i & -0.02 + 0.021i & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 + 0.021i & 0.059 - 0.119i & 0 & -0.019 + 0.049i \\ 0 & 0 & 0 & 0.042 - 0.061i & -0.026 + 0.027i \\ 0 & 0 & -0.019 + 0.049i & -0.026 + 0.027i & 0.045 - 0.076i \end{pmatrix}$$

При номинальной нагрузке итерационный процесс сошелся за 4 итерации.

В узлах были получены следующие напряжения:

$$U_{last} = \begin{pmatrix} 115.839 - 4.769i \\ 116.923 - 2.841i \\ 120.212 - 0.558i \\ 122.025 + 1.993i \\ 124.543 + 3.212i \end{pmatrix} \qquad U_{mod} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(U_{last}) \\ \quad U_{mod_i} \leftarrow \left|U_{last_i}\right| \\ U_{mod} \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 115.94 \\ 116.96 \\ 120.21 \\ 122.04 \\ 124.58 \end{pmatrix}$$

Также видно, что на каждой итерации собственные значения матрицы и канонические нормы не превышали по модулю единицу:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.183 & 0.183 & 0.183 & 0.183 \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 \\ 0.097 & 0.097 & 0.097 & 0.097 \\ 0.069 & 0.069 & 0.069 & 0.069 \\ 0.031 & 0.031 & 0.031 & 0.031 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{norm1} = (0.213 \;\; 0.213 \;\; 0.213 \;\; 0.213) \\ \\ \text{norme} = (0.269 \;\; 0.269 \;\; 0.269 \;\; 0.269) \end{array}$$

По данным напряжениям и сопротивлениям были получены следующие токи в ветвях, кА:

$$I_v := \frac{dY_v \cdot M^T \cdot (U_{last} - U_{bu})}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 0.225 - 0.102i \\ 0.114 - 0.068i \\ 0.013 + 0.012i \\ -0.057 + 0.021i \\ -0.154 + 0.08i \\ -0.055 + 0.012i \\ -0.067 + 0.013i \\ -0.057 + 0.021i \end{pmatrix} \qquad I_{vmod} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(I_v) \\ \quad I_{vmod_i} \leftarrow \left|I_{v_i}\right| \\ I_{vmod} \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 0.247 \\ 0.133 \\ 0.018 \\ 0.061 \\ 0.174 \\ 0.056 \\ 0.068 \\ 0.061 \end{pmatrix}$$

А также мощности в ветвях, МВ·А:

$$S_n := \text{diag}(\overline{I_v}) \cdot U_n \cdot \sqrt{3} = \begin{pmatrix} 46.724 + 21.264i \\ 23.787 + 14.096i \\ 2.779 - 2.522i \\ -11.879 - 4.376i \\ -32.157 - 16.586i \\ -11.051 - 2.018i \\ -13.601 - 2.372i \\ -12.007 - 4.647i \end{pmatrix} \qquad S_k := \text{diag}(\overline{I_v}) \cdot U_k \cdot \sqrt{3} = \begin{pmatrix} 45.949 + 18.67i \\ 23.511 + 13.172i \\ 2.772 - 2.54i \\ -12.007 - 4.647i \\ -32.788 - 18.195i \\ -11.112 - 2.223i \\ -13.929 - 2.712i \\ -12.212 - 4.859i \end{pmatrix}$$

Результаты расчета режима электрической сети в программе RASTR представлены на рисунке 2.

Тип	Номер	Название	U_ном	N...	Район	P_н	Q_н	P_г	Q_г	V_зд	Q_min	Q_max	B_ш	V	Delta
База	6		120		1			61,4	28,5					120,00	
Нагр	5		110		1			45,0	23,0					124,58	1,48
Нагр	4		110		1									122,04	0,94
Нагр	3		110		1	21,0	11,3							120,21	-0,27
Нагр	2		110		1	26,0	13,3							116,96	-1,39
Нагр	1		110		1	57,0	20,7							115,94	-2,36

Рисунок 2 - Результаты расчета в RASTR при номинальной нагрузке

При увеличении нагрузки в узлах 6 раз итерационный процесс сходится за 37 итераций.

$$a := 6$$

$$S := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(S) \\ \quad S_i \leftarrow S_i \cdot a \;\text{ if }\; \mathrm{Re}(S_i) < 0 \\ S \end{array} \right. \qquad S = \begin{pmatrix} -342 - 124.129i \\ -156 - 79.921i \\ -126 - 68.008i \\ 0 \\ 45 + 23.054i \end{pmatrix}$$

На каждой итерации собственные значения матрицы и ее канонические нормы не превышают единицу по модулю:

λ =

	29	30	31	32	33	34	35	36	37
1	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157
2	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172
3	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
4	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097
5	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	...

norm1 =

	29	30	31	32	33	34	35	36	37
1	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	...

norme =

	29	30	31	32	33	34	35	36	37
1	0.281	0.281	0.281	0.281	0.281	0.281	0.281	0.281	...

Напряжения в узлах:

$$U_{last} = \begin{pmatrix} 64.158 - 29.937i \\ 81.177 - 20.327i \\ 99.209 - 13.675i \\ 115.096 - 3.597i \\ 109.385 - 5.403i \end{pmatrix} \qquad U_{mod} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(U_{last}) \\ \quad U_{mod_i} \leftarrow \left|U_{last_i}\right| \\ U_{mod} \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 70.8 \\ 83.68 \\ 100.15 \\ 115.15 \\ 109.52 \end{pmatrix}$$

Результаты расчета режима электрической сети в программе RASTR представлены на рисунке 3.

Тип	Номер	Название	U_ном	N...	Район	P_н	Q_н	P_г	Q_г	V_зд	Q_min	Q_max	B_ш	V	Delta
База	6		120		1			716,0	675,0					120,00	
Нагр	5		110		1			45,0	23,0					109,51	-2,83
Нагр	4		110		1									115,15	-1,79
Нагр	3		110		1	126,0	68,0							100,14	-7,85
Нагр	2		110		1	156,0	79,9							83,68	-14,06
Нагр	1		110		1	342,0	124,1							70,80	-25,02

Рисунок 3 - Результаты расчета в RASTR утяжеленного режима

Увеличив нагрузку в 6,1 раза, мы получили, что на 66 итерации и собственные значения матрицы, и канонические нормы превысили единицу по модулю. Итерационный процесс расходится.

$$S = \begin{pmatrix} -347.7 - 126.198i \\ -158.6 - 81.253i \\ -128.1 - 69.141i \\ 0 \\ 45 + 23.054i \end{pmatrix} \qquad \lambda^{\langle 66 \rangle} = \begin{pmatrix} 1.283 \\ 0.169 \\ 0.119 \\ 0.097 \\ 0.031 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{norm1}^{\langle 66 \rangle} = (1.326)$$

$$\mathrm{norme}^{\langle 66 \rangle} = (1.305)$$

При расчете режима с такими нагрузками программа RASTR выдает сообщение о критическом снижении напряжения в одном из узлов и прекращает расчет режима (рисунок 4).

Ит	Max.неб.		Узлы		>V	Узел	<V	Узел	Угол	Линия	Rk	Шаг
0	326.4	55.0	1	1	1.00	6	1.00	6	0.0	4-5	0.00	1.000
1	3.7	4.4	2	1	1.05	4	0.64	1	25.4	6-1	52.57	1.000
2	2.0	1.0	1	1	1.04	4	0.60	1	27.2	6-1	3.26	1.000
3	2.6	1.0	1	1	1.04	4	0.55	1	29.5	6-1	0.78	1.000
4	2.0	0.8	1	1	1.04	4	0.59	1	27.5	6-1	1.30	1.000
5	4.1	1.6	1	1	1.04	4	0.54	1	30.3	6-1	0.50	1.000
6	1.8	0.7	1	1	1.04	4	0.58	1	28.4	6-1	2.25	1.000
7	32.7	13.3	1	1	1.05	4	0.73	1	20.6	6-1	0.05	1.000
8	8.7	3.8	1	1	1.05	4	0.65	1	24.5	6-1	3.72	1.000
9	2.8	1.2	1	1	1.04	4	0.61	1	26.7	6-1	3.16	1.000
10	1.9	0.7	1	1	1.04	4	0.57	1	28.6	6-1	1.49	1.000
11	8.0	3.2	1	1	1.05	4	0.65	1	24.7	6-1	0.23	1.000
12	2.6	1.1	1	1	1.04	4	0.61	1	26.9	6-1	3.11	1.000
13	2.0	0.8	1	1	1.04	4	0.57	1	28.9	6-1	1.29	1.000
14	4.2	1.7	1	1	1.04	4	0.62	1	26.0	6-1	0.48	1.000
15	1.8	0.7	1	1	1.04	4	0.59	1	27.8	6-1	2.32	1.000
16	10.0	3.8	1	1	1.04	4	0.50	1	32.2	6-1	0.18	1.000
*** Недопустимое снижение напряжения в узле 1 **												

Рисунок 4 - Результаты расчета в RASTR режима с нагрузкой выше предельной

По результатам проведенных расчётов можно отметить:

- метод Ньютона очень удобен при расчетах стационарных режимов сети. Дает быструю и устойчивую сходимость, что дает возможность точно и надежно определять параметры номинальных, а также тяжелых и близких к предельным режимов;

- для ускорения расчетов расходящихся итерационных процессов вместо определения собственных значений можно определять канонические нормы матриц, которые рассчитываются быстрее и задействуют меньше вычислительной мощности.

Литература

1. Применение матричных методов для расчета и анализа режимов электрических сетей: методическое пособие по выполнению курсовой работы и изучению дисциплины «Математические модели в энергетике» для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети»/ Т.А. Шиманская-Семенова. - Минск: БНТУ, 2010. - 158 с.

2. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / Под ред. В.А. Веникова - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1981. - 288 с.

3. Передача и распределение электрической энергии: Учебное пособие/ А. А. Герасименко, В. Т. Федин. - Ростов-н/Д.: Феникс; Красноярск: Издательские проекты, 2006. - 720 с.