Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Инженерная математика»

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лабораторный практикум для студентов специальностей
1-60 01 01 «Техническое обеспечение эксплуатации спортивных объектов»,
1-60 02 02 «Проектирование и производство спортивной техники»

Электронный учебный материал

Минск
БНТУ 2019

УДК 519.21

Авторы: Гундина М.А., Кондратьева Н.А., Юхновская О.В.

Рецензент: Габец В.Л.

Белорусский национальный технический университет пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь Тел.(017) 292-67-84
E-mail: hundzina@bntu.by
http://www.bntu.by/ru/struktura/facu1t/psf/im/
Регистрационный № БНТУ/ПСФ85-95.2019

Лабораторный практикум содержит четыре лабораторные работы, целью которых является ознакомить студентов с дискретными и непрерывными случайными величинами, научить строить функцию распределения этих величин, определять основные числовые характеристики. Учебное пособие может быть использовано для самостоятельной работы студентами как заочного, так и дневного отделения специальности, изучающих дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», «Математика».

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах, раскрывает объективные законы, присущие массовым явлениям.

Развитие как науки теории вероятностей берет свое начало с переписки Паскаля и Ферма (1654 г.). Но и до этого многих ученых интересовали задачи, относящиеся к азартным играм, теоретико-вероятностные задачи, имеющие прикладное значение (Кардано, Галилей).

Кроме задач азартных игр появлялся интерес к построению таблиц смертности и вопросам страхования (Граунт, Ван Худде, Ван де Витт).

Факты устойчивости частот случайных событий в задачах обработки демографических данных были известны еще в Древнем Китае и Древнем Риме.

С течением времени объект изучения теории вероятностей менялся. Если вначале основной интерес вызывало исследование вероятностей случайных событий, то уже в XIX веке интерес вызывали исследования случайных величин.

Теория вероятностей тесно связана с прикладными исследованиями различной природы. Она применима как в задачах экономики, производства, так и задачах лингвистики и истории. Сейчас без применения понятия доверительного интервала, корреляции, уровня значимости, нормального закона распределения случайной величины сложно представить обширное исследование в педагогике, физике, механике и других науках.

В основе квантовой механики лежат принципы теории вероятностей. В случае радиоактивного распада нет закона природы, позволяющего определить точное время деления ядра. Существуют только законы, согласно которым можно говорить о вероятности распада ядра за определенный промежуток времени.

В данном учебно-методическом пособии будет рассмотрено применение информационных технологий для реализации базовых задач теории вероятности на компьютере.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 ПО ТЕМЕ: «ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ»

Теоретические сведения

В азартных играх интерес играющих вызывает не наступление случайного исхода, а связанный с ним выигрыш или проигрыш, т.е. определенная числовая величина, которая соответствует исходу.

Примером случайной величины может быть число очков, выпавших при подбрасывании кубика, число бракованных изделий среди общего числа изделий.

Случайная величина представляет собой число, которое ставится в соответствие каждому возможному исходу эксперимента, т.е. ее можно рассматривать как функцию на пространстве элементарных событий.

Случайная величина — переменная, значения которой представляют собой исходы какого-нибудь **случайного** феномена или эксперимента. Простыми словами: это численное выражение результата **случайного** события.

Определим функцию распределения случайной величины, которая несет всю информацию, заложенную в случайной величине.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F_X(x): R \to [0,1]$, такая, что для любого действительного x выполняется:

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}.$$

Дискретная случайная величина – это случайная величина, которая принимает не более чем счетное число значений.

Пусть ее значения $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ такие, что $P(X = x_k) = p_k > 0, k = 1, 2, ...$.

Закон распределения такой величины может быть представлен таблично следующим образом:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2		p_n	

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически в виде полинома: строятся точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2), \dots$, $M_n(x_n, p_n)$, где x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности; и их соединяют отрезками прямых.

Задание 1

Построить полигоны распределения основных дискретных случайных величин.

<table>
<tr><td>Случайная величина Бернулли</td><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>P</td><td>P</td><td>1-p</td></tr></table>$0 < p < 1$</td></tr>
<tr><td>Биномиальная случайная величина</td><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>…</td><td>n</td></tr><tr><td>P</td><td>$P_n(0)$</td><td>$P_n(1)$</td><td></td><td>P_n(n)</td></tr></table>$P_n(m) = C_n^k p^k q^{n-k}$</td></tr>
<tr><td>Случайна величина Пуассона</td><td>$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$,
$a > 0$,
$a = np$,
$n \to \infty$,
$p \to 0$.</td></tr>
<tr><td>Геометрическая случайная величина</td><td>$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$
$0 < p < 1$</td></tr>
<tr><td>Гипергеометрическая случайная величина</td><td>$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$</td></tr>
<tr><td>Равномерная случайная величина</td><td><table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>…</td><td>N</td></tr><tr><td>p</td><td>1/n</td><td>1/n</td><td></td><td>1/n</td></tr></table></td></tr>
</table>

Необходимая информация для представления законов распределения случайной величины изображена на рисунках 1–7.

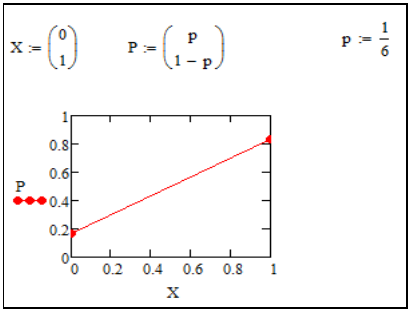

Рисунок 1. – Построение полигона распределения случайной величины Бернулли

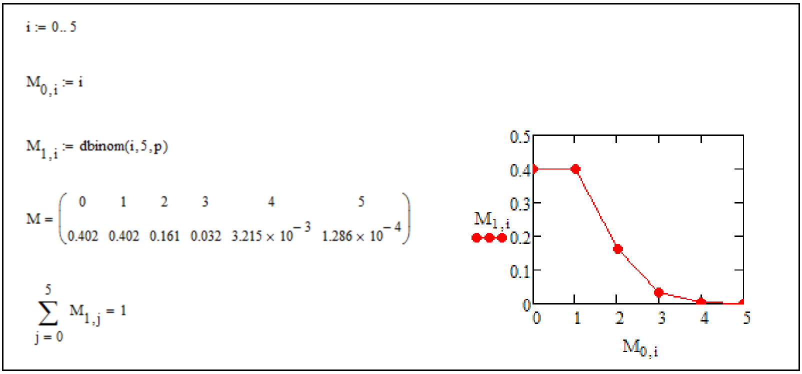

Рисунок 2. – Построение полигона распределения биномиальной случайной величины

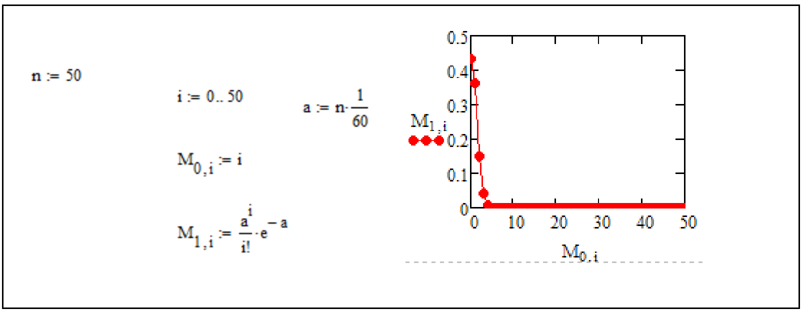

Рисунок 3. – Построение полигона распределения случайной величины Пуассона

$n := 50$

$ORIGIN := 1$

$i := 1..50$

$M_{1,i} := i \qquad M_{2,i} := p\cdot(1-p)^{i-1}$

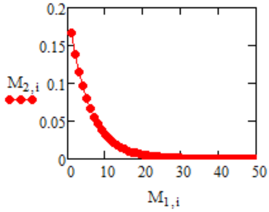

Рисунок 4. – Построение полигона распределения геометрической случайной величины

$ORIGIN := 0$

$N := 10$

$M := 4$

$N - M = 6$

$n := 2$

$i := 0..n$

$M1_{0,i} := i \qquad M1_{1,i} := \frac{\mathrm{combin}(M,i)\cdot\mathrm{combin}(N-M,n-i)}{\mathrm{combin}(N,n)}$

$M1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.333 & 0.533 & 0.133 \end{pmatrix} \qquad \sum_{j=0}^{n} M1_{1,j} = 1$

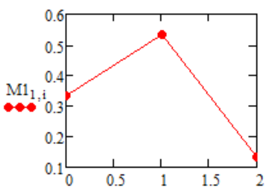

Рисунок 5. – Построение полигона распределения гипергеометрической случайной величины

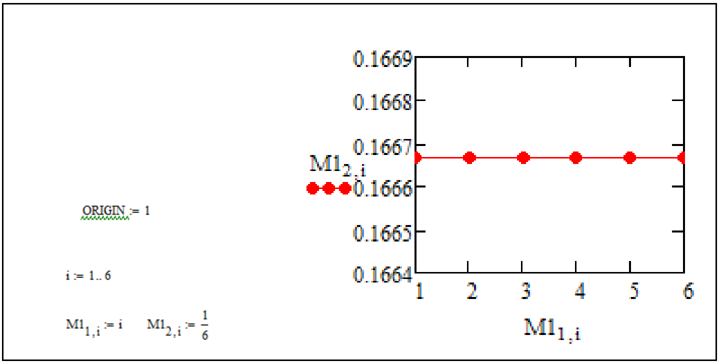

Рисунок 6. – Построение полигона распределения равномерной случайной величины

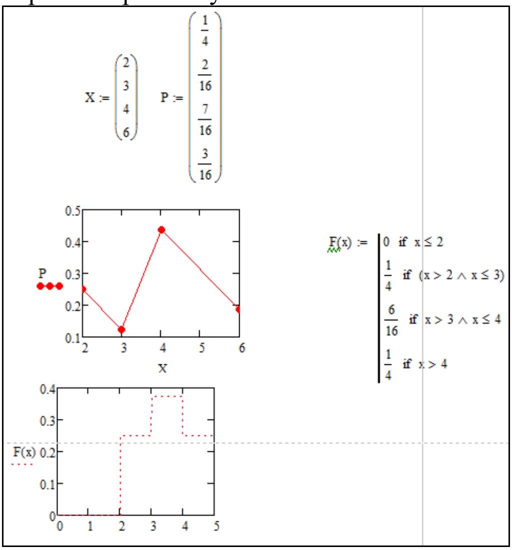

Рисунок 7. – Построение функции распределения дискретной случайной величины Пуассона

Задание 2

Описать дискретную случайную величину X, заданную законом распределения. Построить график функции распределения:

1.	X_i	2	3	4	6

	P_i	¼	2/16	7/16	3/16
2.	X_i	1	2	3	5
	P_i	0,3	0,2	0,2	0,3
3.	X_i	–5	2	3	4
	P_i	0,4	0,3	0,1	0,2
4.	X_i	2	4	6	8
	P_i	0,1	0,2	0,3	0,4
5.	X_i	3	5	7	9
	P_i	0,2	0,1	0,4	0,3
6.	X_i	1	3	4	6
	P_i	0,1	0,3	0,2	0,4
7.	X_i	0	1	2	3
	P_i	0,729	0,343	0,027	0,001
8.	X_i	3	4	7	10
	P_i	0,2	0,4	0,1	0,3
9.	X_i	–2	0	2	4
	P_i	0,21	0,15	0,36	0,28
10.	X_i	0	1	2	3
	P_i	0,225	0,245	0,255	0,275

Задание 3

Построить ряд распределения, функцию распределения и ее график случайной величины X – числа наступлений случайного события A в указанной ниже серии независимых испытаний.

1. Стрелок стреляет по мишени 3 раза. A – попадание при одном выстреле,
$$P(A) = 0{,}6 \cdot$$
2. Элементарная частица может быть зарегистрирована прибором (событие A) с вероятностью
$$P(A) = 0{,}7 \cdot$$
Перед прибором поочередно пролетают три частицы.
3. Извлеченная наугад с книжной полки книга может оказаться учебником (событие A) с вероятностью
$$P(A) = 0{,}4 \cdot$$
Извлекается три книги.

4. Поезд может прибыть по расписанию (событие A) с вероятностью

$$P(A)=0{,}9\cdot$$

Рассматриваются три рейса.

5. В течение суток молоко в горшке может прокиснуть (событие A) с вероятностью

$$P(A)=0{,}4\cdot$$

Рассматривается случай трех горшков.

6. В среднем при наборе страницы текста оператор совершает ошибку (событие A) в 30% случаев. Статья содержит 4 страницы текста.
7. Рыболов при поклевке может вытащить рыбу (событие A) с вероятностью

$$P(A)=0{,}6.$$

Поклевка произошла у 4 рыболовов.

8. На фотографии, полученной в камере Вильсона частица регистрируется в опыте (событие А) с вероятностью

$$P(A)=0{,}5\cdot$$

Проведено 4 опыта.

9. В ядерной реакции может образоваться резонансная частица (событие А) с вероятностью

$$P(A)=0{,}2\cdot$$

Рассматриваются три реакции.

10. Наличие синей глины указывает на возможность алмазного месторождения (событие А) с вероятностью

$P(A)=0{,}4$.

Синяя глина обнаружена в трех районах.

Контрольные вопросы:

Что такое случайная величина?

Может ли случайная величина принимать отрицательные значения?

Может ли функция распределения принимать значение 0,2; 2?

Какую случайную величину называют дискретной?

Каким образом можно задать случайную величину?

Является ли дискретной биномиальная случайная величина?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 ПО ТЕМЕ: «СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ»

Под *испытанием* следует понимать эксперимент со случайным исходом.

Пусть производятся *n* независимых испытаний. Известно, что в каждом испытании возможны два исхода: либо происходит событие *A* (успех), либо событие *A* не происходит (неудача). Данная схема называется схемой Бернулли. При этом предполагается, что вероятность *p* успеха и *q* = 1– *p* неудачи не изменяются при переходе от испытания к испытанию.

$\Omega=\{(\omega_1,...\omega_n),\omega_i=0,1\}$, $\tilde{A}$ – множество всех подмножеств Ω.

$$P_n(m)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Формула Бернулли	$P_n(m)=C_n^k p^k q^{n-k}$	В каждом из 5 опытов событие А может появится с вероятностью p=0,4. Найти вероятность того, что событие А появится 3 раза.
Локальная теорема Муавра-Лапласа	$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$	Найти вероятность того, что в 243 испытаниях событие А наступит ровно 70 раз, если вероятность появления этого события p=0,25 в каждом испытании.
Интегральная теорема Муавра-Лапласа	$P_n(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$	Фабрика выпускает 70% продукции I сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий I сорта будет в диапазоне [652, 760].

Задание

В партии из n изделий каждое может оказаться стандартным с вероятностью p. С помощью локальной и интегральной формул Муавра-Лапласа вычислить вероятность того, что число стандартных деталей в партии будет: а) равно m; б) заключено между m_1 и m_2.

Вар.	p	n	m	m_1	m_2
1	0,3	100	32	25	35
2	0,2	300	38	14	67
3	0,5	400	67	16	86
4	0,3	100	43	37	75
5	0,4	180	23	48	67
6	0,6	430	45	53	65
7	0,8	450	65	43	89
8	0,4	430	64	23	89
9	0,2	230	23	35	76
10	0,1	210	19	47	78

Реализация поставленной задачи в пакете инженерных расчетов Mathcad представлена на рисунках 8,9.

$$p := 0.1$$

$$n := 150$$

$$k := 87$$

$$x := \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

$$fi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$P := \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} \cdot fi(x)$$

$$P = 0$$

Рисунок 8. – Решение задачи с помощью локальной теоремы Муавра-Лапласа

$$p := 0.1 \qquad m1 := 60$$

$$n := 150 \qquad m2 := 87$$

$$x1 := \frac{m1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

$$x2 := \frac{m2 - n \cdot p}{}$$

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

$$P := F(x2) - F(x1) = -3.485 \times 10^{-12}$$

Рисунок 9. – Решение задачи с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 ПО ТЕМЕ: «КЛАССИФИКАЦИЯ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Если случайная величина X принимает любые значения из некоторых интервалов или отрезков числовой оси, то она называется непрерывной случайной величиной. Примерами такой величины являются дальность полета снаряда, время безотказной работ прибора.

Плотностью распределения вероятностей $p(x)$ случайной величины X в точке x называется предел:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Теорема. Для того, чтобы случайная величина ξ была абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall x \in R : F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt.$$

Распределение случайной величины ξ называется непрерывным, а сама случайная величина – абсолютно непрерывной случайной величиной, если

$$\forall B \in \tilde{B}(R) : P_\xi(B) = \int_B p_\xi(x)dx,$$

где $\tilde{B}$ – минимальная σ - алгебра.

Примеры абсолютно непрерывных случайных величин представлены в таблице.

Нормальная случайная величина (Случайна величина Гаусса)	$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$, $P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$
Экспоненциальная случайная величина	$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}$, $\lambda > 0$
Равномерная случайная величина	$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \end{cases}$

Случайная величина Коши	$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{c}{x^2+c^2}$, $c>0, x\in R$
Гамма-распределенная величина	$\alpha,\lambda>0$, $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}, x>0\end{cases}$ $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$
Логистическая случайная величина	$p_\xi(x)=\frac{e^{-\frac{x-a}{b}}}{b(1+e^{-\frac{x-a}{b}})^2}, b>0, a\in R$
Случайная величина Парето	$p_\xi(x)=\begin{cases}0, x<a\\ a^b x^{-b-1}b, x\ge a\end{cases}, a,b>0$
Случайна величина Гнеденко	$p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha}, x>0\end{cases}$
Случайная величина Рэлея	$p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{1}{\sigma^2}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x>0\end{cases}$

Графики плотности распределения различных непрерывных случайных величин представлены на рисунках 10 – 14.

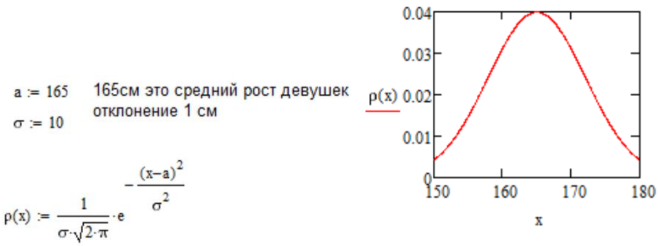

Рисунок 10. – Построение графика плотности нормально распределенной случайной величины

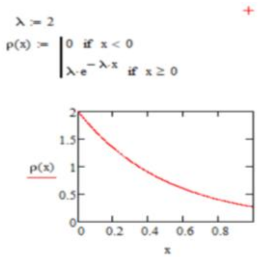

Рисунок 11. – Построение графика плотности
экспоненциальной случайной величины

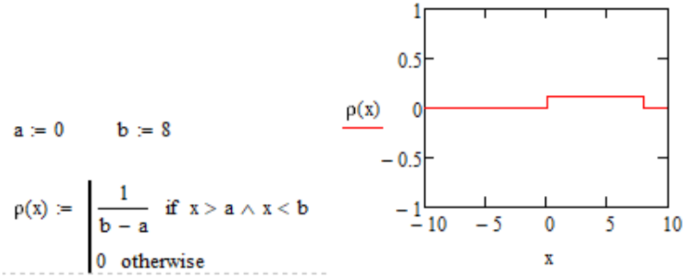

Рисунок 12. – Построение графика плотности
равномерной случайной величины

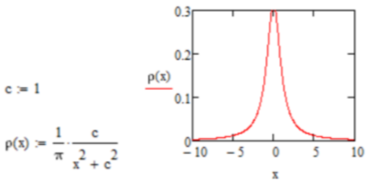

Рисунок 13. – Построение графика плотности
случайной величины Коши

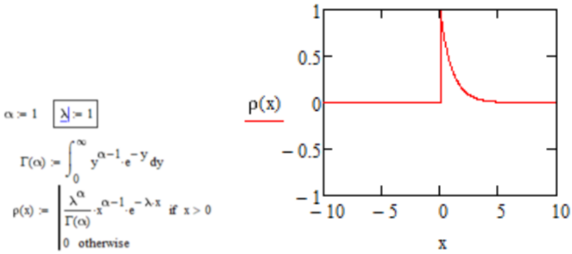

Рисунок 14. – Построение графика плотности
Гамма-распределенной случайной величины

Контрольные вопросы и задания:

Какая случайная величина называется абсолютно-непрерывной?

Приведите пример нормальной случайной величины.

Чему будет равен интеграл на всей числовой прямой от плотности распределения экспоненциальной случайной величины?

Чему будет равен интеграл на всей числовой прямой от плотности распределения равномерной случайной величины?

Может ли плотность распределения случайной величины на конечном отрезке принимать значение -1? Почему?

Приведите пример экспоненциальной случайной величины.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 ПО ТЕМЕ: «ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Основные числовые характеристики случайных величин

	Дискретная случайная величина	Абсолютно непрерывная случайна величина
Математическое ожидание	$M(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

Величина $M\left|\xi^m\right|$ называется абсолютным моментом m-го порядка случайной величины ξ.

Моменты случайной величины $\xi - M\xi$ называются центральными моментами случайной величины ξ.

Центральные моменты четного порядка случайной величины ξ характеризуют степень разброса значений относительно ее среднего значения.

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, число $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ.

	Дискретная случайная величина	Абсолютно непрерывная случайна величина
Дисперсия	$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - MX)^2 p_i$	$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 p(x)dx$

Задание 1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа наступлений случайного события A в указанной ниже серии независимых испытаний.

1. Баскетболист делает 5 бросков. Событие A – попадание при одном броске,
$$P(A)=0{,}7\cdot$$
2. Безотказно работает в гарантийный срок прибор с вероятностью
$$P(A)=0{,}4\cdot$$
Выбираются случайным образом 4 прибора.

3. Извлеченная наугад с книжной полки книга может оказаться учебником (событие A) с вероятностью

$$P(A) = 0{,}4 \cdot$$

Извлекается три книги.

4. Поезд может прибыть по расписанию (событие A) с вероятностью

$$P(A) = 0{,}9 \cdot$$

Рассматриваются три рейса.

5. В течение суток молоко в горшке может прокиснуть (событие A) с вероятностью

$$P(A) = 0{,}4 \cdot$$

Рассматривается случай трех горшков.

6. В среднем при наборе страницы текста оператор совершает ошибку (событие A) в 30% случаев. Статья содержит 4 страницы текста.
7. Рыболов при поклевке может вытащить рыбу (событие A) с вероятностью

$$P(A)=0{,}6.$$

Поклевка произошла у 4 рыболовов.

8. На фотографии, полученной в камере Вильсона частица регистрируется в опыте (событие А) с вероятностью

$$P(A) = 0{,}5 \cdot$$

Проведено 4 опыта.

9. В ядерной реакции может образоваться резонансная частица (событие А) с вероятностью

$$P(A) = 0{,}2 \cdot$$

Рассматриваются три реакции.

10. Наличие синей глины указывает на возможность алмазного месторождения (событие А) с вероятностью

$$P(A) = 0{,}4 .$$

Синяя глина обнаружена в трех районах.

Реализация поставленной задачи в пакете инженерных расчетов Mathcad представлена на рисунке 15.

$$n := 5$$

$$p := 0.2$$

$$i := 0..n$$

$$M_{0,i} := i$$

$$M_{1,i} := \mathrm{combin}(n,i) \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{n-i}$$

$$MX := \sum_{i=0}^{n} \left(M_{0,i} \cdot M_{1,i}\right) = 1$$

$$DX := \sum_{i=0}^{n} \left[\left(M_{0,i} - MX\right)^{2} \cdot M_{1,i}\right] = 0.8$$

Рисунок 15. – Определение числовых характеристик биномиальной случайной величины

Задание 2

Найти значение параметра *c*, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Известна плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} cx/N, 0 < x \le c \\ 0, x \le 0 \end{cases},$$

N – номер варианта.

Контрольные вопросы:

1. Может ли дисперсия принимать значение 1?
2. Может ли среднеквадратическое отклонение принимать значение -1?
3. Что такое математическое ожидание?
4. Каким образом может быть найдена дисперсия для дискретной случайной величины?
5. Какие выделяют основные числовые характеристики случайной величины?

СОДЕРЖАНИЕ