МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

С.В. Гончарова
В.А. Акимов

Динамическое действие нагрузок. Упругие колебания систем

Электронное пособие

Минск
2019

УДК 620.1 (075.4)
ББК 30.3я7
Г 65

С о с т а в и т е л и :
С.В. Гончарова, В.А. Акимов.
Р е ц е н з е н т ы :
Кандидат технических наук, доцент *Е.М. Дубовская;*

В электронном пособии изложены теоретические материалы, задачи, контрольные вопросы по теме, предусмотренной программой курса для студентов технических специальностей.

Предлагаемое электронное пособие предназначено для студентов дневной формы обучения, имеет целью помочь студентам изучить один из наиболее трудных разделов курса механики материалов (механики материалов и конструкций) – «Динамическое действие нагрузок. Упругие колебания систем».

В разделе даны краткое изложение теории, различные типы задач с подробным решением, а также приводятся контрольные вопросы.

Электронное пособие будет полезно студентам при изучении курса, а также преподавателям при подготовке к занятиям.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017) 293-92-36
E-mail: smat@bntu.by
Регистрационный №

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Колебания представляют один из наиболее распространённых видов движения, имеющего большую практическую значимость в инженерном деле. Работа машин, приборов и механизмов всегда сопровождается колебаниями, что снижает их надежность, вызывает шум или оказывает вредное влияние на организм человека. Поэтому перед инженерами во всех областях техники встают задачи предупреждения возрастания интенсивности колебаний выше допускаемых значений, что требует проведения соответствующих расчетов деталей машин, а также применение в необходимых случаях дополнительных виброзащитных устройств.

Предлагаемое пособие предназначены для студентов машиностроительных специальностей дневной формы обучения, имеет целью помочь студентам изучить один из наиболее трудных разделов курса механики материалов – «Динамическое действие нагрузок». Упругие колебания системы.

1. Основные определения теории колебаний

Теория колебаний представляет собой обширный раздел современной физики, охватывающий весьма широкий диапазон вопросов механики, электротехники, радиотехники, оптики и прочего. Особое значение теория колебаний имеет для прикладных задач, встречающихся в инженерной практике, в частности, в вопросах прочности машин и сооружений. При изучении колебаний упругих систем их принято различать по числу степеней свободы. Под числом степеней свободы понимается число независимых координат, определяющих положение системы.

При исследовании упругих колебаний различают собственные и вынужденные колебания. Под собственными колебаниями понимается движения, которое совершает система, освобожденная от внешнего активного силового воздействия и предоставленная сама себе. Под вынужденными колебаниями понимается движение упругой системы, происходящие под воздействием изменяющихся внешних сил, называемых возмущениями. Промежуток времени между последующими максимальными отклонениями упругой системы от положения равновесия носит название периода колебаний Т. Величина, ему обратная, называется частотой колебаний $\nu = \dfrac{1}{T}$ и представляет собой число колебаний в единицу времени. Частота измеряется герцами – числом колебаний в одну секунду. В технике вместо частоты ν используется круговая чистота ω, представляющая собой число колебаний за 2π секунд.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Собственные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим простейшую систему, состоящую из массы и пружины (рис. 1.1)

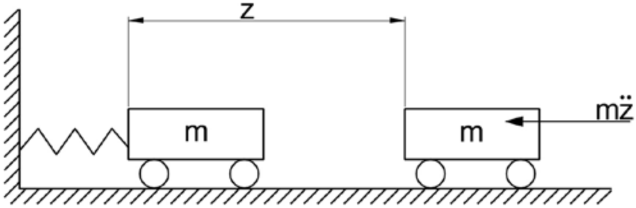

рис. 1.1

Координату Z будем отсчитывать от положения, соответствующего ненапряженной пружине, вправо. То же положительное направление имеет скорость $\dot{z}$ ускорение $\ddot{z}$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} \quad . \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Сила инерции m$\ddot{z}$ направлена влево.

При составлении уравнений движения будем исходить из принципа Даламбера.

Для написания уравнений движения воспользуемся выражением для перемещений в канонической форме.

$$\begin{cases} z_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + ... + \delta_{1n}x_n \\ z_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + ... + \delta_{2n}x_n \\ .... \\ z_3 = \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + ... + \delta_{3n}x_n \end{cases}$$

В данном случае мы имеем только одно перемещение z и силу

$$x_1 = -m\ddot{z} = -\frac{Q}{g}\ddot{z}$$

Таким образом

$$z = \delta_{11}(-m\,\ddot{z})$$

И в итоге дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\ddot{z} + \frac{1}{\delta_{11} m} \cdot z = 0 \text{ или } \ddot{z} + \omega_0{}^2 z = 0 \text{ где } \omega_0{}^2 = \frac{1}{\delta_{11} m}, \text{ где}$$

$$g = \omega_0{}^2 \delta_{ст}.$$

Величина δ_{11} определяется жесткостью пружины. Записанное дифференцированное уравнение представляет собой уравнение простых гармонических колебаний. Решая его, получим

$$z = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные, зависящие от начальных условий движения.

Выражение для z может быть записано также в форме

$$z = A \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

где произвольными постоянными являются амплитуды *A* и фаза φ, также определяемые из начальных условий.

Период колебаний *T* определяется из условия, что при увеличении времени *t* на период *T* аргумент под знаком sin изменяется на 2π. (Рис. 1.2)

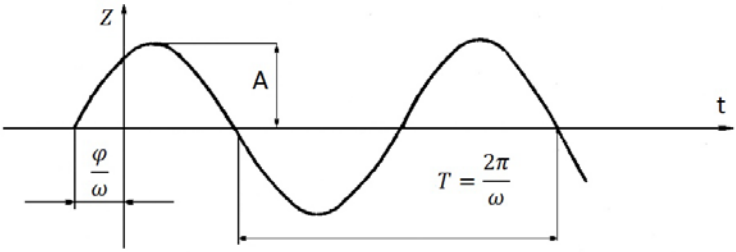

рис.1.2

$$\left(\omega\left(t + T\right) + \varphi\right) - \left(\omega t + \varphi\right)) = 2\pi \text{ откуда } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ величина } \omega$$

представляет собой круговую частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Собственные колебания систем с линейным затуханием.

Всегда существует внешние силы, направленные против движения масс и приводящие к постоянному уменьшению амплитуды собственных колебаний. По истечению некоторого времени собственные колебания полностью прекращаются. Для простоты принимают, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения т.е. $\alpha \cdot z$, где α – коэффициент пропорциональности. (Рис. 1.3)

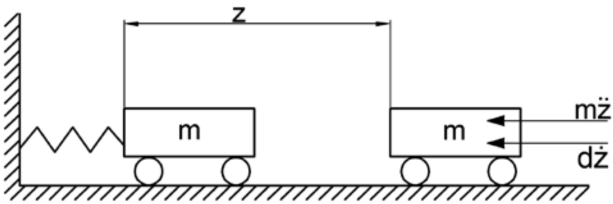

рис.1.3

Как и в предыдущем случае,

$$x_1 = -m\ddot{z} - \alpha\dot{z}$$

$$z = \delta_{11}\left(-m\ddot{z} - \alpha\dot{z}\right) \text{ или } \ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega^2 z = 0$$

где $2n = \dfrac{\alpha}{m}\omega^2 = \dfrac{1}{m\delta_{11}} \quad \omega^2 = \dfrac{1}{m\delta_{11}}$

Общее решение дифференцированного уравнения с учетом расстояния энергии.

$$z = Ae^{-nt}\sin\left(\omega_1 t + \varphi\right)$$

$n = \dfrac{\alpha}{2m}$ коэффициент затухания $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ (Рис. 1.4)

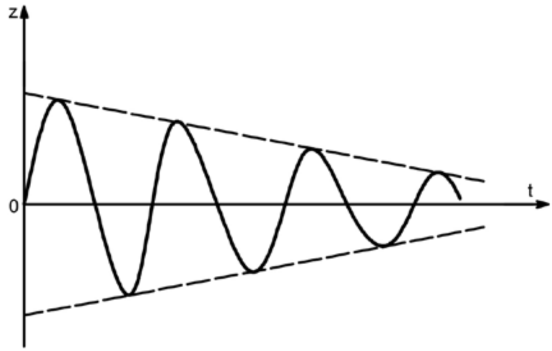

рис.1.4

При линейном затухании колебания происходят с уменьшающейся амплитудой и частотой ω_1. Величина n^2 практически мала по сравнению с $\omega_0{}^2$, следовательно $\omega_1 = \omega_0$.

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления

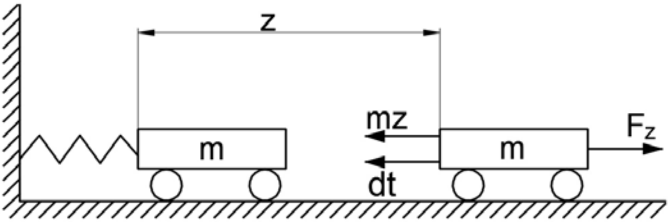

рис.1.5

$F_t = F_0 \sin \omega_в t$

где F – максимальное значение возмущений силы;

$\omega_в$ – круговая чистота изменения возмущений силы.

Уравнение движения:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_0{}^2 z = \frac{F_0}{m} \sin \omega_в t$$

Общее решение дифференциального уравнения

$z = Ae^{-nt}\sin\left(\omega_1 t + \varphi\right) + z$, где выражение $z = A_{вын}\sin\left(\omega t - \varphi\right)$ характеризует вынужденные колебания $A_{вын} = \Delta F_0 \beta$, ΔF_0 перемещение массы m при статическом приложении силы F_0, β – коэффициент нарастания колебаний.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_в^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right)^2 + \frac{4n^2\omega_в^{\,2}}{\omega_0^{\,4}}}}$$

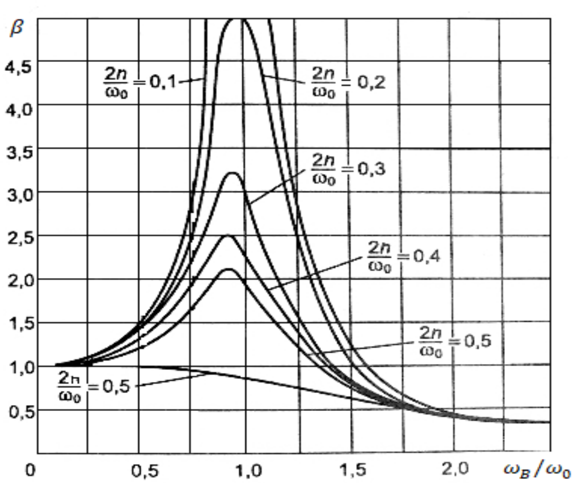

рис.1.6

При n=0, то есть при отсутствии затухания, величина β в случае совпадения частот собственных и вынужденных колебаний обращается в ∞. Это означает, что при таких условиях амплитуды вынужденных колебаний неограниченно возрастает. При наличии затухания (n≠0) величина остается ограниченной, но в зоне совпадения частот максимальное значение.

Явление повышения амплитуды при совпадении частот собственных колебаний и возмущающейся силы носит название резонанса.

Как видно из рис. 1.6, кривые заметно отличаются друг от друга лишь в зоне резонанса. В остальных случаях можно считать, что эти кривые практически совпадают, и коэффициент затухания значения не имеет. Его можно принять равным 0, что идет в запас прочности. Тогда:

$$\beta = \pm \frac{1}{1 - \frac{\omega_в^{\ 2}}{\omega^2}}$$

Максимальное перемещение:

$$\Delta_д = \Delta_{ст} + A_{вын} = \Delta_{ст}\left(1 + \frac{A_{вын}}{\Delta_д}\right) = \Delta_{ст}\left(1 + \frac{\Delta_{F_0}\beta}{\Delta_{ст}}\right) =$$

$$= \Delta_{ст}\left(1 + \frac{F_0}{Q}\beta\right) = \Delta_{ст} K_д$$

где K_g - динамический коэффициент;

$$K_д = 1 + \frac{F_0}{Q}\beta;\ K_д = 1 + \frac{A}{\Delta_H} = 1 + \frac{\Delta_H}{\Delta_Q}\beta;\sigma_д = \sigma_{ст} K_д$$

$\Delta_{ст}, \sigma_{ст}$, деформация и напряжения при статическом приложении груза;

$\Delta_д$, $\sigma_д$, - деформация и напряжения при колебаниях.

1.1 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Системой с двумя, тремя и так далее степенями свободы называется такая система, положение которой в любой момент времени может определяться соответственно двумя, тремя и так далее независимыми переменными. (Рис. 1.7)

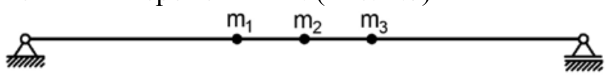

рис. 1.7

При рассмотрении колебаний упругих систем с несколькими степенями свободы дифференциальные уравнения движения во многих случаях можно получить, пользуясь принципом Даламбера. Однако наиболее общим является способ, основанный на применении известных из теоретической механики уравнений Лагранжа второго ряда, которые при отсутствии сил сопротивления и внешних возмущающих сил имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{z}}\right)-\frac{dT}{d\dot{z}}=-\frac{dU}{d\dot{z}} \quad \left(i=1,2,3,\ldots,n\right),$$

где T и U – кинетическая и потенциальная энергия системы. Используя уравнения Лагранжа второго рода, можно рассмотреть крутильные колебания валов.

1.2 КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОВ

Представим механическую систему, состоящую из упругого вала с насаженным на оси дисками, совершающими крутильные колебания.

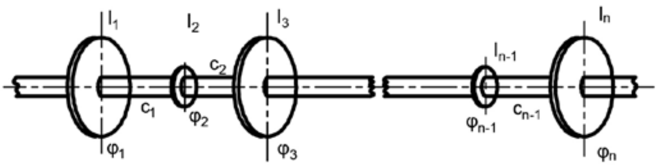

рис.1.8

$I_1, I_2, I_3, ..., I_n$ - моменты инерции масс дисков относительно оси вала;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ углы поворота дисков при колебаниях;

$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ коэффициенты жесткости отдельных участков вала при кручении $C=\dfrac{QI_p}{l_i}$;

I_p - полярный момент инерции поперечного сечения вала.

Поскольку $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ представляют крутящие моменты, вызывающие соответствующих участков вала на I рад., то

$C_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right), C_2\left(\varphi_2-\varphi_3\right)$- будут представлять величины $M_к$, возникающие в сечениях при взаимном повороте I и II дисков на угол $\varphi_1-\varphi_2$, второго и третьего – на угол $\varphi_2-\varphi_3$ и так далее.

Кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2} I_1 \varphi_1^2+\frac{1}{2} I_2 \varphi_2^2+\frac{1}{2} I_3 \varphi_3^2+\ldots+\frac{1}{2} I_n \varphi_n^2$$

Потенциальная энергия системы за счет упругой деформации вала

$$U=\sum_{i=0}^n \frac{M_k \varphi_i}{2}=\frac{1}{2} C_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right)^2+\frac{1}{2} C_2\left(\varphi_2-\varphi_3\right)^2+$$

$$+C_3\left(\varphi_3-\varphi_4\right)^2+\ldots+\frac{1}{2} C_{n-1}\left(\varphi_{n-1}-\varphi_n\right)^2$$

Подставляя в уравнение Лагранжа, получим:

$$\varphi_1 => \frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=I_1 \varphi_1 ;\ \frac{d}{d t}\left(\frac{d T}{d \varphi_1}\right)=I_1 \ddot{\varphi}_1 ;\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}=\ C_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right);$$

$$I_1 \ddot{\varphi}_1+C_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0$$

$$\varphi_z => \frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=I_2 \varphi_2 ;\ \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}\right)=I_2 \ddot{\varphi}_2 ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\varphi}_2}=\ -C_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+C_2\left(\varphi_2-\varphi_3\right);$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2+C_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+C_2\left(\varphi_2-\varphi_3\right)=0$$

$$\varphi_{n-1} => I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1}+C_{n-1}\left(\varphi_{n-1}-\varphi_n\right)-C_{n-2}\left(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1}\right)$$

$$\varphi_n => I_n \ddot{\varphi}_n-C_{n-1}\left(\varphi_{n-1}-\varphi_n\right)=0$$

Складывая, получим:

$I_1 \ddot{\varphi}_1+I_2 \ddot{\varphi}_2+J_n \ddot{\varphi}_n=0$ или $I_1 \dot{\varphi}_1+I_2 \dot{\varphi}_2+I_n \dot{\varphi}_n=const$ то есть момент количества движения системы вокруг оси при свободных колебаниях остается постоянным.

Пользуясь общими методами решения полученной системы дифференциальных уравнений, будем искать решение в виде:

$$\varphi_1 = A_1 \sin\left(\omega t + \varphi\right);\ \varphi_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

Подставляя в предыдущую систему уравнений

$$\varphi_1 = -A_1\omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$-I_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + C_1\left(A_1 \sin\left(\omega t + \varphi\right) - A_2 \sin\left(\omega t + \varphi\right)\right) = 0$$

Или $I_1 A_1 \omega^2 + C_1\left(A_1 - A_2\right) = 0$ аналогично

$$I_2 A_2 \omega^2 + C_1\left(A_1 - A_2\right) - C_2\left(A_2 - A_3\right) = 0$$

$$I_{n-1} A_{n-1} \omega^2 + C_{n-2}\left(A_{n-2} - A_{n-1}\right) - C_{n-1}\left(A_{n-1} - A_n\right) = 0$$

$$I_n A_n \omega^2 + C_n\left(A_{n-1} - A_n\right) = 0$$

Исключая из этих уравнений $A_1, A_2, \ldots A_n,$ получим уравнение для определения частоты ω^2.

1.3 ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ МАССЫ СИСТЕМ

Практика расчетов упругих систем показывает, что в подавляющем большинстве случаев упрощения являются неприемлемыми. Так, большей частью собственная масса соизмерима с присоединенным массами. Последние же, в свою очередь, редко удается рассматривать как сосредоточенные. В таком случае изложенный выше метод расчета громоздкий, поэтому лучшим является приближенное решения. Наиболее распространённым из приближенных методов является метод Редея, сущность которого пояснена на примере балки с присоединенными массами. (Рис. 1.9)

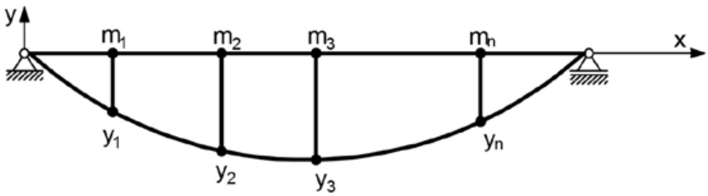

рис.1.9

В число этих масс может быть включена частями и масса балки. Рассмотрим форму колебаний основного тона и примем, что колебания всех масс синфазны. Закон движения i-й массы:

$$y_i = A_i \sin(\omega t + \varphi)$$

скорость:

$$\dot{y}_i = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi) \ .$$

В момент прохождения всеми массами положение равновесия y_i, обращается в 0, а скорость $\dot{y}_i$ достигает максимального значения. Соответственно наибольшего значения достигает и кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i A_i^2$$

Упругая потенциальная энергия системы равна при этом 0.

В момент максимального отклонения масс от положения равновесия, кинетическая энергия равна 0, а потенциальная энергия изогнутой балки максимальна. Из условия сохранения энергий получим $\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i A_i^2 = U$, откуда $\omega^2 = \frac{2U}{\sum_{i=0}^{n} m_i A_i^2}$.

Методом Релея определим частоту собственных продольных колебаний. (Рис 1.10)

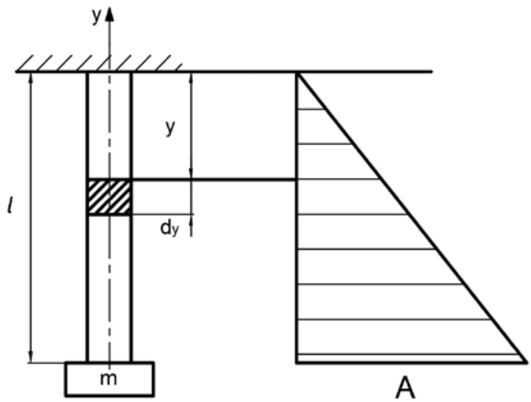

рис.1.10

Примем, что перемещения сечений стержня меняются по линейному закону.

Масса стержня m_c

$$W = A_c \frac{y}{l_e}$$

$$U = \int_0^e \frac{N^e dy}{2EA} = \frac{1}{2} EA \int_0^e \varepsilon^2 dy$$

$$\varepsilon = \frac{dW}{dy} = \frac{A_c}{l}; U = \frac{1}{2l} A_c^2 EA$$

$\Sigma m_i A_i^2$ должна быть определена как для стержня, так и для присоединенной массы.

$$\Sigma m_i A_i^2 = \int_0^e \frac{m_e}{l} \left(A_c \frac{y}{l} \right)^2 dy + m A_c^2 = A_c^2 \left(\frac{m_0}{3} + m \right)$$

$$\omega^2 = \frac{EA}{l \left(m + \frac{1}{3} m_c \right)}$$

Величина $m_{пр} = \frac{1}{3} m_c$ называется приведенной массой, а 1/3 коэффициент приведения, показывающий, какую часть массы упругой системы следует присоединить к основной колеблющейся массе, чтобы учесть инерционность упругого элемента. Величина коэффициента приведения зависит от особенностей системы и от принятого закона распределения перемещения в упругом элементе.

1.4 КРИТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ОБОРОТОВ ВАЛА

Быстровращающийся детали машин не могут быть идеально сбалансированы, и в практических случаях всегда возникают инерциальные силы, уводящие вращающуюся деталь от оси вращения, в связи с чем при определённых угловых скоростях вращения, называемых критическими, имеют место наибольшие прогибы системы. Этому явлению можно дать простое объяснение, рассматривая упругую систему как колебательную, а инерциальные силы – как возмущение силы. (Рис. 1.11)

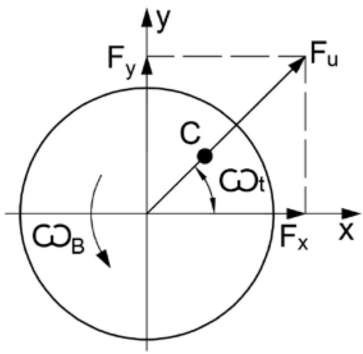

рис.1.11

$OC = e$ - эксцентриситет

$F_u = m\omega_в{}^2 e$ - сила инерции

$F_x = m\omega_в{}^2 e \cos \omega_{вi}$ - составляющие силы инерция

$F_y = m\omega_в{}^2 e \sin \omega_t$

Таким образом, в вертикальной и горизонтальной плоскостях на вал действуют периодически изменяющиеся возмущение силы с частотой, равной скорости вращения вала. В том случае, когда частота возмущений силы $\omega_в$ равна частоте собственных поперечных колебаний вала ω, наступает состояние резонанса. Следовательно, критическая угловая скорость $\omega_в = \omega$.

1.5 ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

При исследовании колебаний системы, обладающей n степенями свободы, задача сводится к решению n совместных дифференциальных уравнений. Однако при $n = \infty$, то есть для системы с распределенными массами, можно решать только одно уравнение, но в частных производных.

В качестве простейшей системы с распределенными массами рассмотрим однородный призматический стержень с плотностью материала ρ, в котором возбуждены продольные колебания. (Рис. 1.12)

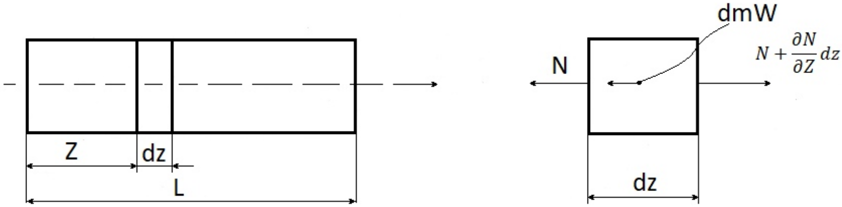

рис.1.12

При определении силы инерции масса элемента *dz* равна

$$dm = \rho A dz;$$

W - осевое перемещение произвольного сечения.

Условие равновесия *dz*:

$$\rho A W = \frac{dN}{dz}$$

Удлинение элемента *dz*:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dz} = \frac{N}{EA}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\rho}{E}\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

Получено уравнение, в котором искомая величина Q является функцией двух переменных z и t.

Решение ищем в виде

$W = Z \sin \omega t$, где

Z – функция от одного независимого переменного z.

После подстановки ω в исходное уравнение получим

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\rho \omega^2}{E} Z = 0$$

откуда $Z = A \sin \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} z + B \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} z$

Постоянные А и В определяются из граничных условий для стержня.

Например, для случая

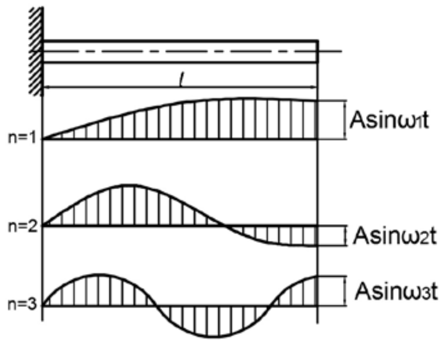

рис.1.13

При z=0 функция Z=0, а при z=l соответственно $\frac{dZ}{dt} = 0$

следовательно, B=0

$$A \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} l = 0$$

Из этого выражения следует, что либо A=0, либо

$$\cos\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}}l = 0$$

В первом случае получаем для ω нулевое решение, не представляющее интереса.

Во втором случае

$$\omega l\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{n}{2}(2n-1)$$

где n - любое целое число.

Отсюда определяется ряд последовательных значений частот собственных продольных колебаний стержня.

$$\omega = \frac{n}{2l}(2n-1)\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Таким образом, стержень обладает бесконечным множеством частот собственных колебаний. Соответственно при этих частотах возможно возникновение резонансных состояний. Низшая частота, или частота основного тона,

$$\omega = \frac{n}{2l}(2n-1)\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

После подстановки в выражение для функции Z можно определить формы колебаний, соответствующий различным *n*:

$$Z = A\sin\frac{2n-1}{2l}nz$$

$$W = A\sin\frac{2n-1}{2l}nz\sin\omega t$$

Возникновение той или иной формы колебаний определяется начальными условиями возбуждения собственных колебаний.

1.6 ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

Рассмотрим поперечные колебания балки постоянного по длине сечения *A* (Рис.1.14). $dm = \rho A dz$

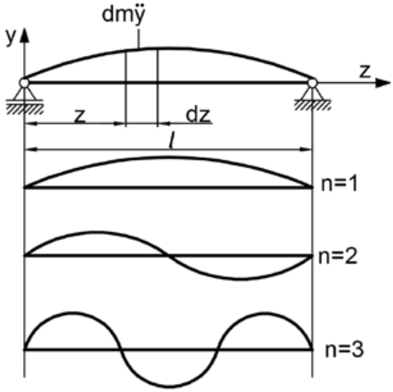

рис.1.14

Инерционная сила, приходящаяся на единицу длинны балки,

$$q = -\rho A \ddot{y}$$

Знак минус принят в связи с тем, что q направленная в сторону, противоположна прогибу. Но

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q$$

Тогда $\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\rho A}{EI} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0$

Решение ищем в виде

$y = Z\sin\omega t$

После подстановки

$Z^{(IV)} - a^4 Z = 0$

где $a^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$

Решение этого уравнения будет

$$Z = A\sin az + B\cos az + Cshaz + Dchaz$$

Постоянные *A*, *B*, *C*, *Д* определяются из граничных условий. Для данного случая:

При z=0; Z=0 $и\,\dfrac{d^2Z}{dz^2}=0$ (т.к. *M*=0)

При z=*l*; Z=0 $и\,\dfrac{d^2Z}{dz^2}=0$ (т.к. *M*=0)

Из первых двух условий вытекает, что *В=Д*=0.

Из двух других имеем:

$$\begin{cases} A\sin l + Cshal = 0 \\ -A\sin l + Cshal = 0 \end{cases}$$

Приравниваем к нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} \sin al & shal \\ -\sin al & shal \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \sin al shal = 0$$

Но так как $shal = 0$ только при $al = 0$, то $\sin al = 0$ или $al = \pi n$ или $\omega = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$.

И в случае изгибных колебаний образуется бесконечная последовательность частот, но в отличии от продольных колебаний здесь частоты не первой, а второй степени *n*.

Форма упругой линии балки определяется уравнением *Z*.

Поскольку *В=С=Д*=0.

$$a = \frac{\pi n}{l}, \text{ то } Z = A\sin\frac{\pi n z}{l}$$

При *n*=1 балка изгибается по одной полуволне синусоиды, при *n*=2 будет две полуволны и так далее. Соответственно этим частотам при наличии периодически меняющихся внешних сил возможно возникновение резонанса.

Ниже предлагаются задачи с подробным методическим решением при колебаниях.

2. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1.

Определить частоту собственных крутильных колебаний стального диска, закрепленного на стальном валу ступенчато-переменного поперечного сечения. Влияние собственной массы вала не учитывать.

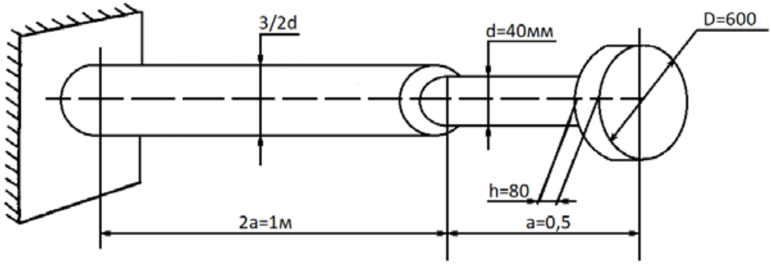

рис.2.1

Решение

Определим момент инерции массы диска, не учитывая центрального отверстия, то есть рассматривая диск как сплошной цилиндр. По известному из курса теоретической механики выражению имеем:

$$I_m = \frac{1}{2} m \frac{D^2}{4} = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi D^2}{4} h \frac{D^2}{4} = \frac{\pi \rho D^4 h}{32},$$

Где ρ=78,5 кН/м^3 – плотность материала диска.

Подставим числовые значения, получим:

$$I_m = \frac{3.14 \cdot 78.5 \cdot 10^3 \cdot 0.6^4 \cdot 0.08}{32} = 79.8\, H \cdot м \cdot c^2$$

Определим коэффициент жесткости вала, составим выражение для угла поворота сечения на свободном конце от расположенного в этом сечении скручивающего момента М$_к$ (величина момента произвольна).

$$\varphi = \frac{M_k 2a}{G \frac{\pi d^4}{32}} + \frac{M_k 2a}{G \frac{\pi}{32} \left(\frac{3}{2} d \right)^4} = \frac{32 M_k a}{G \pi d^4} \left(1 + \frac{32}{81} \right) = \frac{3616 M_k a}{81 G \pi d^4}$$

Коэффициент жесткости:

$$C = \frac{M_k}{\varphi} = \frac{81G\pi d^4}{3616a} = \frac{81\cdot 8\cdot 10^{10}\cdot 3.14\cdot 4^4\cdot 10^{-8}}{3616\cdot 0.5} = 28.8\cdot 10^3\ Нм$$

Частота собственных крутильных колебаний диска:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \sqrt{\frac{28.8\cdot 10^3}{79.8}} = 60\,c^{-1}$$

Пример 2 Определить собственную частоту крутильных колебаний вала диаметром d=2см и длинной l=100 см, несущего на конце диск диаметром D=60см и толщиной t=10см. Удельный вес металла γ=0,078 Н/см (рис. 2.2).

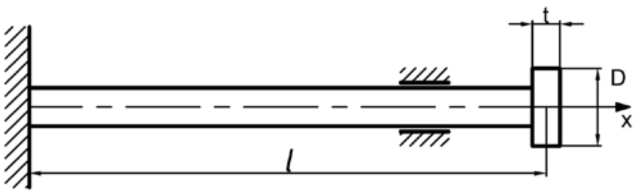

рис.2.2

Решение. Определяем момент инерции маховика относи- тельно оси вращения, совпадающей с осью вала:

$$I_x = \frac{GD^2}{8g} = \frac{\pi D^2 t\gamma D^2}{4\cdot 8g} = \frac{3,14\cdot 60^4\cdot 4\cdot 0,078}{4\cdot 8\cdot 981} = 40,4кг\cdot см^2$$

Коэффициент жесткости системы равен моменту, вызывающему угол закручивания вала в месте расположения диска, равный одному радиану:

$$C = \frac{m_к}{\varphi} = \frac{m_к G l_p}{m_к l} = \frac{G l_p}{l} = \frac{8\cdot 10^6\cdot 3,14\cdot 2^4}{32\cdot 100} = 125600 Н\cdot см / рад$$

Собственная частота крутильных колебаний вала с диском.

Пример 3. Груз весом Q=10 Н подвешен на пружине, имеющей жесткость С=4 Н/см. Определить частоту и период свободных колебаний. Массой пружины пренебречь.

Решение. Вычислим статическую деформацию пружины под действием груза:

$$y_{cm} = Q / C = 10 / 4 = 2,5 \text{ см.}$$

Частота свободных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{g / y_{cm}} = \sqrt{981 / 2,5} = 19,8 \text{ с}^{-1}.$$

Период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{19,8} = 0,32 \ c.$$

Пример 4. На конце консольной балки закреплен груз Q=1кН, сечение балки прямоугольное размером 4x2см. Определить частоту и период собственных колебаний балки .

Решение. Статический прогиб балки под действием груза

$$y_{cm} = \frac{Ql^3}{3El_z} = \frac{1000 \cdot 100^3 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 10} = 6,2 \text{ см.}$$

Собственная круговая частота колебаний балки

$$\omega_0 = \sqrt{981 / 6,2} = 12,6 \ c^{-1}$$

Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{12,6} = 0,498 \text{ с.}$$

Частота колебаний

$$\nu = 1 / T = \omega_0 / 2\pi = 12,6 / 6.28 = 2 \text{ Гц.}$$

Пример 5.

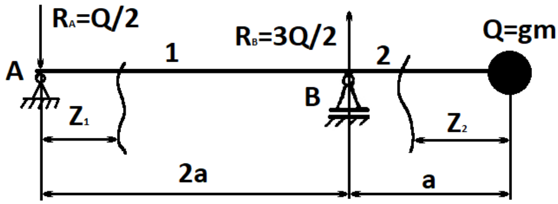

рис. 2.3

Определить частоту собственных колебаний балки, на конце консоли которой находится груз массой m. Задачу решить как без учета, так и с учетом массы балки.

Решение

Для определения частоты собственных колебаний балки находим погиб конца консоли от статической нагрузки $Q=mg$. Определив опорные реакции балки, составляем уравнение упругой линии для I и II участков.

Для I участка

$$EI_y^I = EI\theta_0 z_1 - \frac{1}{2}Q\frac{z_1^3}{6}$$

При составлении этого уравнения учтено, что прогиб в начале координат (на левой опоре) равен нулю. Для нахождения угла поворота сечения в начале координат используем граничное условие

$$Y_{z_{1=2a}}^I = 0$$

(прогиб на правой опоре равен нулю)

$$0 = EI\theta_0 2a - \frac{1}{2}Q\frac{(2a)^3}{6}, \text{ откуда}$$

$$EI\theta_0 = \frac{Qa^3}{3},$$

Окончательно уравнение упругой линии для I участка имеет вид

$$EI_y^I = \frac{Qa^2}{3}z_1 - \frac{Qz_1^3}{12}$$

Для II участка

$$EI_y^{II} = EI\theta_0 z_1 - \frac{Qz_1^3}{12} + \frac{3}{2}\frac{Q(z_1-2a)^3}{6} =$$

$$= \frac{Qa^2}{3}z_1 - \frac{Qz_1^3}{12} + \frac{Q(z_1-2a)^3}{4}$$

Подставив в последнее уравнение $z_1=3a$, получаем величину прогиба на конце консоли:

$$EI_{y_{z_1=3a}}^{II} = Qa^3\left(\frac{3}{3} - \frac{3^2}{12} + \frac{1}{4}\right) = -Qa^3$$

Величину прогиба можно определить и по способу Верещагина.

Частота собственных колебаний без учета массы балки равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} \quad , \text{ где}$$

$$\Delta_{ст} = y^{II}_{z_1=3a} = \frac{Qa^3}{EI} = \frac{gma^3}{EI}$$

Таким образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

Приведение собственной массы балки к точке приложения груза осуществляется так же, как и при расчетах на удар. Точечная (приведенная) масса должна обладать такой же кинетической энергией, как распределенная масса всей балки. Обычно предполагают, что эпюра динамических перемещений подобна эпюре статических напряжений, и в результате получают для коэффициента приведения формулу

$$\beta = \frac{\int_в \left(\Delta_{2ст}\right)^2 dm_\Delta}{\Delta^2_{ст} m_\Delta}, \quad где$$

$\Delta_{2ст}$ – уравнение эпюры перемещений, вызванных статическим действием силы, равной весу балки и приложенных в точке груза массой m;

$\Delta ст$ – перемещение,вызванное статическим действием силы Q.

$$dm_\Delta = \rho A d_k$$

ρ – плотность материала балки;

A – площадь сечения балки

$$m_\Delta = \rho A l = \rho A 3a$$

При вычислении β оказывается целесообразным составить уравнение упругой линии для второго участка балки, взяв ее зеркальное отображение.

Для составления этого уравнения должны быть известны как погиб, так и угол поворота сечения на конце консоли.

Продифференцировав ранее составленное уравнение для У^{II}, найдем

$$EIQ^{II}=\frac{Qa^2}{3}-\frac{Qz_1^2}{4}+\frac{3}{4}Q\left(z_1-2a\right)^2$$

Подставив z_1 = 3a, получим

$$EIQ^{II}_{z_1=3a}=Qa^2\left(\frac{1}{3}-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{6}Qa^2$$

Уравнение упругой линии для II участка

$$EI_y^{II}=-Qa^2+\frac{7}{6}Qa^2z_2-Q\frac{z_2^2}{6}$$

Выражение для коэффициента приведения после некоторых очевидных сокращений будет иметь вид:

$$\beta=\frac{\int_0^{2a}\left(\frac{a^2z_1}{3}-\frac{z_1^3}{12}\right)^2dz+\int_0^{a}\left(-a^3+\frac{7a^2z_2}{6}-\frac{z_2^2}{6}\right)dz_2}{a^6 3a}=$$

$$=\frac{\frac{64}{945}-\frac{3318}{11340}}{3}\approx 0.121$$

Частота свободных колебаний с учетом массы балки определиться из выражения

$$\omega=\sqrt{\frac{q}{\Delta_{cm}\frac{m-\beta m_\Delta}{m}}},$$

Где $\Delta_{ст}$ – статический прогиб от веса груза.

$$\omega=\frac{EI}{ma^3(1-0.121\frac{m_\delta}{m})}.$$

Пример 6.

На конце консольной балки на двух двутавров №30 а установлен двигатель весом Q=30кН.

Найти период собственных колебаний системы и угловую скорость вала двигателя, при которых наступит резонанс. Собственный вес балки не учитывать.

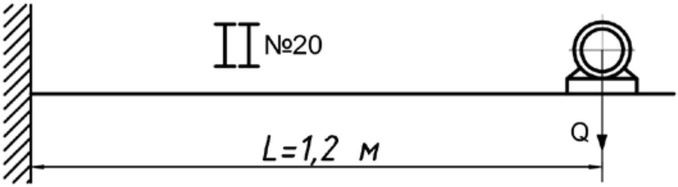

рис. 2.4

Решение

Период свободных (собственных) колебаний системы определим по формуле:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{cm}}{q}},$$

Где $\Delta_{cm} = f = \dfrac{Ql^3}{3EI}$ - прогиб консоли при статическом приложении груза Q.

Подставив числовые значения, найдем

$$\Delta_{cm} = f = \frac{Ql^3}{3EI} = \frac{30000\cdot(1,2)^3}{3\cdot10^3\cdot2\cdot10^5\cdot2\cdot7780\cdot10^{-8}} = 0.555\,мм$$

где на основании ГОСТ 8239 – 72 принято

$$I = 2I_x^I = 2\cdot7780\,см^4$$

Тогда получим

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{cm}}{q}} = 2\cdot3{,}14\cdot\sqrt{\frac{5{,}55\cdot10^{-2}}{961}} = 0{,}0412\,сек$$

Определим критическую угловую скорость вала двигателя, учитывая, что резонанс колебаний наступит при равенстве $\omega=\omega_{кр}$.

Применим формулу для угловой частоты собственных колебаний:

$$\omega_{кр} = \omega\sqrt{\frac{q}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,81}{5,55\cdot 10^{-2}}} = 133,5c^{-1}$$

или

$$\omega_{кр} = \frac{2\pi\, n_{кр}}{60} = \frac{\pi\, n_{кр}}{30} = 133,5c^{-1}$$

$$n_{кр} = \frac{30\cdot 133,5}{3,14} = 1213 \quad \frac{об}{мин}.$$

Пример 7. На конце консольной балки установлен двигатель весом Q=50 кН (рис. 2.5). Определить число оборотов двигателя, при котором наступит резонанс. Силы сопротивле- ния и вес балки не учитывать.

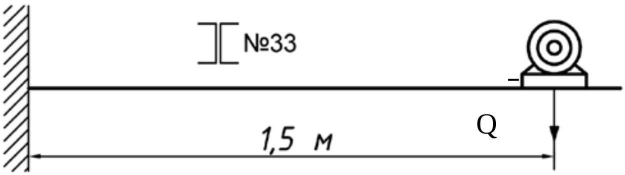

рис. 2.5

Решение. Резонанс наступит тогда, когда выполнится ра- венство . Круговая частота вынужденных колебаний определяется скоростью вращения двигателя. Статический прогиб балки от веса

$$y_{ст} = \frac{Ql^3}{3EI_x} = \frac{50\cdot 10^3\cdot 150^3}{3\cdot 2\cdot 10^7\cdot 2\cdot 7980} = 0,176 \text{ см},$$

где по таблице сортамента $I_z = 2\cdot 7980\, см^4$. Критическая круговая частота.

$$\omega_к = \omega_0 = \sqrt{g\,/\,y_{ст}} = \sqrt{981\,/\,0,176} = 74,6 \text{ рад/с}.$$

Критическое число оборотов двигателя

$$n_{кр} = 30\frac{\omega_к}{\pi} = \frac{30\cdot 74,6}{3,14} = 713 \text{ об/мин}.$$

Пример 8. Определить критическую скорость движения железнодорожного вагона, имеющего общий вес с грузом

Q=100кН. Вагон установлен на четырех рессорах; жесткость каждой рессоры С= 47 000 Н/см. Длина рельса l=38 м.

Решение. Определяем период свободных колебаний вагона:

$$y_{ст} = Q / C = 100000 / 47000 = 2{,}13 \text{ см;}$$

$$T = 2\pi\sqrt{y_{ст} / g} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{2{,}13 / 981} = 0{,}293 \text{ с.}$$

Период возмущающей силы равен времени прохождения вагоном длины рельса:

$$T_в = l / \upsilon = 8{,}0 / \upsilon \text{ с.}$$

Критическая скорость наступит тогда, когда

$$\upsilon_{кр} = 8 / 0{,}293 = 27{,}3 м / с = 98{,}3 км / ч$$

Пример 9. Найти жесткость рессоры железнодорожного вагона, имеющего общии вес с грузом 85 кН, чтобы он мог дви- гаться со скоростью 120 км/час, не входя в резонанс с толчками на стыках рельсов, длина которых l=12 м. Решение. Определяем круговую частоту свободных колеба- ний вагона

$$\omega_0 = \sqrt{981 / y_{ст}} \text{ рад/с.}$$

Период возмущающей силы равен

$$T_в = l / \upsilon = 12 / 33{,}3 = 0{,}36 \text{ с,}$$

$$\text{где } \upsilon = 120000 / 3600 = 33{,}3 \text{ м/с.}$$

Круговая частота возмущающей силы

$$\omega_в = 2\pi / T = \frac{2 \cdot 3{,}14}{0{,}36} = 17{,}4 с^{-1}.$$

Из условия отстройки от резонанса получим

$$17{,}4 = 0{,}7\sqrt{981 / y_{ст}}$$

Откуда

$$y = \frac{0,7^2 \cdot 981}{17,4^2} = 2,32 \text{ см.}$$

Жесткость рессоры

$$C = \frac{Q}{4y_{ст}} = \frac{85000}{4 \cdot 2,32} = 9160H/см = 9,2кH/см.$$

Пример 10.

Определить амплитуду вынужденных колебаний рамы и наибольшие нормальные напряжения, возникающие в ее опасном поперечном сечении от действия веса двигателя и вращающегося ротора двигателя массой *m*=5 кг. Плечо (эксцентриситет) вращающейся массы *e*=50 мм. Скорость вращения вала двигателя *n*=940об/мин. Сечение рамы – квадрат со стороной *B*=80 мм. *E*=2*10^5 МПа.

Собственный вес рамы не учитывать.

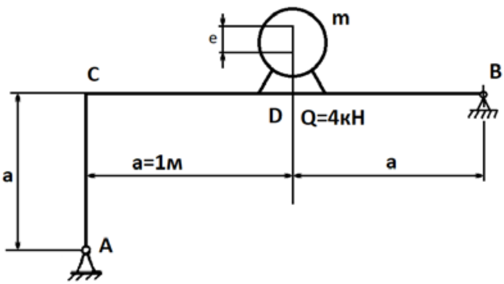

рис. 2.6

Амплитуда вынужденных колебаний рамы

$$\text{A} = k_q \Delta_{ст}$$

Определим $\Delta_{ст}$, предполагая, что сила Q приложена статически, раскроем статическую неопределенность рамы ($\Lambda = 1$). В этом случае каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Величины $\delta_{11} и \Delta_{1p}$ вычислим по методу Мора, применив правило Верещагина. Основная система с заданной нагрузкой и искомой лишней неизвестной имеет вид

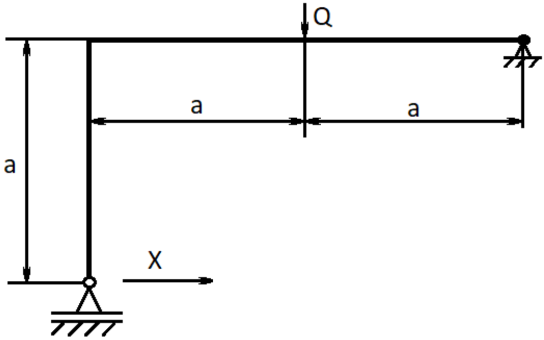

Рис. 2.7

Строим грузовую и единичную эпюры.

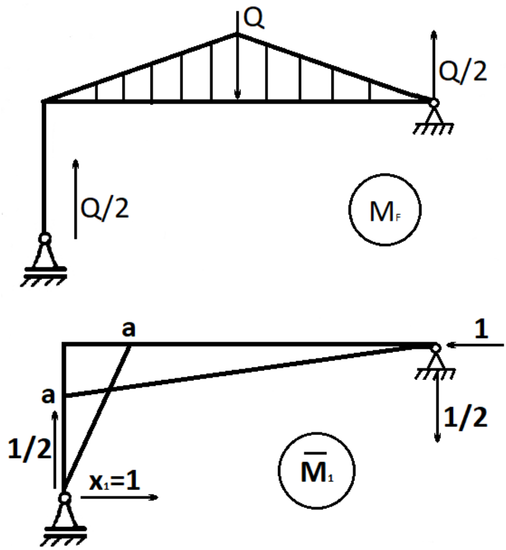

рис. 2.8

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\vec{M}_1\vec{M}_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{a \cdot a}{2}\frac{2}{3}a + \frac{a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3}a\right) = \frac{a^3}{EI}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} M_F \vec{M}_1 = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\frac{Qa}{2}\cdot 2a\cdot\frac{a}{2}\right) = -\frac{Qa^3}{4EI}$$

Подставим найденные коэффициенты в каноническое уравнение, определяем лишнее неизвестное x_1:

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{Q}{4} = 1кН$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов для заданной системы.

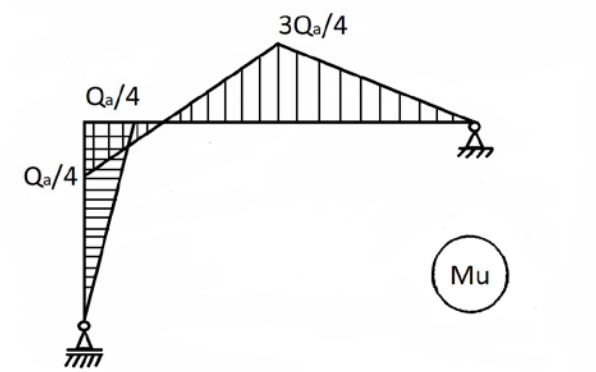

рис. 2.9

Определим прогиб Δ_Q в заданной системе под силой *Q*, для чего в сечении *D* к основной системе приложим единичную силу по направлению искомого перемещения и построим эпюру изгибающих моментов $\vec{M}_{\Delta Q}$, которая представлена на том же чертеже.

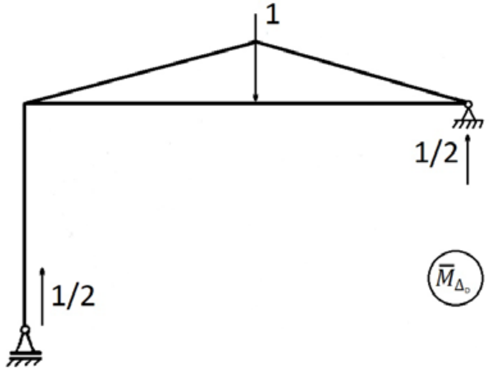

рис. 2.10

Перемножив окончательную эпюру $Mи$ на единичную, $\vec{M}_{\Delta Q}$ по правилу Верещагина, найдем:

$$\Delta_Q = \Delta_{cm} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{8}Qa^2\frac{2}{3}\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{8}Qa^2\frac{2}{3}\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{Qa}{4}a\frac{1}{3}\frac{a}{2}\right) = \frac{5Qa^3}{48EI}$$

Подставив числовые данные, найдем

$$\Delta_{cm} = \frac{5Qa^3}{48EI} = \frac{5\cdot 4000\cdot 1^3\cdot 12}{48\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 8^4\cdot 10^{-8}} = 0,611\,мм$$

Круговая частота собственных колебаний рамы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{q}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.611\cdot 10^{-3}}} = 127\,c^{-1} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}сек$$

Центробежная сила, возникающая при вращении неуравновешенной массы ***m***.

$$F_0 = m\omega^2\tau,\ \text{где}\ \ r = e\,.$$

Вертикальная составляющая этой силе является гармонической возмущающей силой

$$F = F_0 \sin y = F_0 \sin \omega t$$

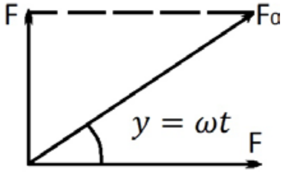

рис. 2.11

Вынужденные колебания от силы F совершаются с круговой частотой ω_0

$$\omega_0 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 940}{30} = 98{,}6\, c^{-1}$$

Максимальное значение возмущающей силы

$$F_0 = m\omega^2 \tau = 5 \cdot 98.6^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 2480\, H$$

Прогиб посредине ригеля при статическом приложении этой силы

$$\Delta_{cm} = \frac{5F_0 a^3}{48EI_x} = \frac{5 \cdot 2480 \cdot 1^3 \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8^{11} \cdot 10^{-8}} = 0{,}318 \cdot 10^{-3} \;\; мм$$

Коэффициент нарастания колебаний β без учета сил затухания

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega_в^2}{\omega_0^{\,2}}} = \frac{1}{1 - \frac{98{,}6^2}{127^2}} = 2{,}51$$

Амплитуда вынужденных колебаний рамы:

$$A = \beta \Delta_{cm} = 2{,}51 \cdot 0{,}318 = 0{,}949\, мм$$

Наибольшие нормальные напряжения, возникающие от веса двигателя в опасном поперечном сечении рамы,

$$\sigma_{cm(Q)} = \frac{maxM}{W_x} = \frac{\frac{3}{8} Qa}{\frac{3}{6} в} = \frac{18 \cdot 4000 \cdot 1}{в \cdot 8^3 \cdot 10^{-6}} = 17{,}6 \;\; МПа\,.$$

Наибольшие нормальные напряжения в том же сечении от действия возмущающей силы

$$\max\sigma_q = \max\sigma_{cm(F_0)}\cdot\beta = 2,51\frac{2480\cdot 1}{8\cdot 8^3\cdot 10^{-6}} = 27,8 МПа$$

Динамические напряжения изменяются во времени по симметричному циклу. Суммарные напряжения в опасных точках опасного сечения изменяются по асимметричному циклу, при этом максимальное напряжение:

$$max\sigma = \sigma_{cm(Q)} + max\sigma_q = 17,6 + 27,8 = 45,4 \quad МПа$$

Минимальные:

Существенно отметить, что учет затухания колебаний в данном случае практически не скажется на результате расчета.

$$min\sigma = \sigma_{cm(Q)} - max\sigma_q = 17,6 - 27.8 = -10.2 МПа$$

Действительно, приняв параметры затухания равным 0,012ω(для остальных конструкций ориентировочно принимаем эту величину), получим

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_в^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\frac{n^2\omega_в^2}{\omega_0^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_в^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\frac{\left(0.012\omega_0\right)^2\omega_в^2}{\omega_0^4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{98,6}{127}\right)^2 + 4\frac{0,012\cdot 98,6^2}{127}}} = 2.47$$

Коэффициент β, с учетом колебания отличается от коэффициента без учета затухания колебаний всего лишь на 1,6%.

Пример 11.

К правому концу стальной балки прикреплен двигатель весом $Q = 20кН$ вал которого делает 500 оборотов в минуту.

Вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя на балку, кроме его веса, действует центробежная сила $F_0 = 2кН.$ Определить:

1. Наибольший полный прогиб балки в сечении под центром тяжести двигателя и наибольшие полные нормальные напряжения, возникающие в балке.

2. Число оборотов в минуту вела двигателя, при котором наступит резонанс.

Собственный вес балки и силы сопротивления при расчете не учитывать. Сечение балки швеллер №27 $I_x = 4160 см^4; W_x = 308 см^3$

Решение

По способу Верещагина определяем прогиб Δ сечения балки в месте расположения двигателя от вертикальной силы, равной единице

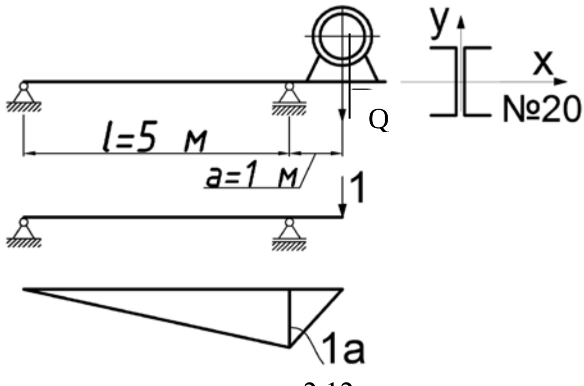

рис. 2.12

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{la}{2}\frac{2}{3}a + \frac{aa}{2}\frac{2}{3}a\right) = \frac{a^2}{3EI}\left(l+a\right) =$$

$$= \frac{\left(1\cdot 10^3\right)^2 \cdot 6\cdot 10^3}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 2\cdot 4160\cdot 10^4} = 1{,}2\cdot 10^{-4}\frac{мм}{Н}$$

Определяем круговую частоту собственных колебаний балки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{F_1\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{9810}{20\cdot 10^3\cdot 1,2\cdot 10^{-4}}} = 63,8c^{-1}$$

Вынужденные колебания от центробежной силы совершаются с круговой частотой

$$\omega_в = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14\cdot 500}{30} = 52,3c^{-1}$$

Динамический коэффициент без учета затухания колебаний

$$k_g = \frac{1}{1-\frac{\omega_в{}^2}{\omega_0{}^2}} = \frac{1}{1-\frac{52,3^2}{63,8^2}} = 3,03$$

Наибольший динамический прогиб правого конца балки

$$\Delta_{max} = \Delta_{cm(F_0)}k_g = F_0\delta k_g = 2\cdot 10^3\cdot 1,2\cdot 10^{-4}\cdot 3,03 = 0,72мм$$

Наибольший полный прогиб правого конца балки

$$\Delta_{\max(n)} = \Delta_{max} + \Delta_{cm} = 0,72 + Q\delta = 0,72 + 2\cdot 10^4\cdot 1,2\cdot 10^{-4} = $$
$$= 3,12мм$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают в сечении балки над правой опорой. Динамические напряжения в этом сечении:

$$\sigma_{cm} = \frac{M}{W_x}k_g = \frac{F_0\cdot a}{W_x}k_g = \frac{2\cdot 10^3\cdot 10^3}{2\cdot 308\cdot 10^3}3,03 = 9,80МПа$$

Полные напряжения равны сумме динамических и статических напряжений

$$\sigma_n = \sigma_g + \frac{Qa}{W_x} = 9,80 + \frac{2\cdot 10^4\cdot 10^3}{2\cdot 308\cdot 10^3} = 41,8МПа$$

Резонанс наступит, если частота ω_0 возмущающей силы будет равна частоте свободных колебаний балки, то есть $\omega_0 = \omega$ что соответствует числу оборотов вала двигателя в минуту:

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30\cdot 63,8}{3,14} = 610\frac{об}{мин}$$

Пример 12.

Консольная балка несет на конце груз $Q = 160H$. Период колебаний балки $T = 0{,}1c.$ Определить необходимую длину балки при данном периоде колебаний и заданных размерах сечения балки. $A = a \times a = 20 \times 20 мм$

Решение

Период колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{cm}}{g}} \quad (1)$$

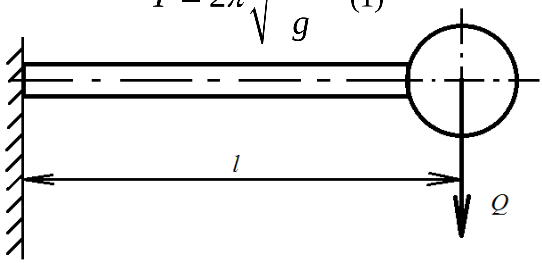

рис. 2.13

где Δ_{cm} - линейное перемещение точки приложения груза Q при статическом действии в направлении колебания в мм (м).

Из формулы (1) имеем

$$\Delta_{cm} = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \quad (2)$$

С другой стороны, от статического действия силы Q прогиб свободного конца балки равен

$$y = \Delta_{cm} = \frac{Ql^3}{3EI_x} \quad (3)$$

Левые части уравнения (2) и (3) равны, следовательно, равны и правые, то есть

$$\frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{Ql^3}{3EI_x} \quad \Rightarrow \quad l^3 = \frac{T^2 g 3EI_x}{Q4\pi^2}$$

$$l=\sqrt[3]{\frac{T^2g3EI_x}{Q4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{1\cdot 98\cdot 10\cdot 3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 20^4}{160\cdot 4\cdot 10\cdot 3{,}14}}=300\text{мм}$$

Пример 13.

На стальной балке с характеристиками сечения $(I_x=259\text{см}^4, W_x=41\text{см}^4, E=2\cdot 10^5\,\text{МПа})$ стоит двигатель весом $Q=1\text{кН}$. При его вращении $(n=900\text{об}/\text{мин})$ возникает центробежная сила инерции, максимальная величина которой равна $F_0=0{,}2\text{кН}$.

Определить:

1. При какой длине наступит резонанс.
2. Длину l_1, чтобы частота собственных колебаний валки была на 30% больше частоты возмущающей силы; для этого случая определить $\sigma_{\max}$, без учета массы балки

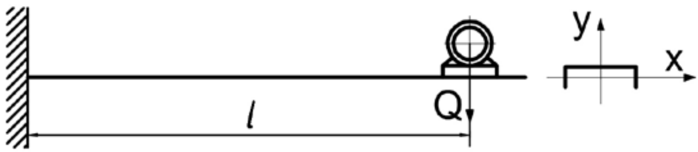

рис. 2.14

Решение

1) Условие резонанса

$$\omega_в=\omega_0$$

Круговая частота вынужденных колебаний

$$\omega_в=\frac{\pi n}{30}=30\pi\frac{1}{l}$$

Круговая частота собственных колебаний

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}=\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}0025}}=68{,}5c^{-1}\quad ,где\,\Delta_{ст}=\frac{Ql^3}{3EI_x}\quad\Rightarrow$$

$$Откуда\ l=\sqrt[3]{\frac{3EI_x\Delta_{ст}}{Q}}$$

Зная ω_0, определим $\Delta_{ст} = \dfrac{g}{{\omega_0}^2} = \dfrac{9,8}{(30n)^2} = 0,2011\,м$

$$l = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 2\cdot 10^6\cdot 10^6\cdot 259\cdot 10^{-8}\cdot 0,2011}{1\cdot 10^3}} = 1,22\,м$$

2) Частота собственных колебаний должна быть на 30% больше частоты возмущающей силы, следовательно

$$\omega_1 = 1,3\omega_в \quad ,т.е.\sqrt{\frac{g}{\Delta'_{ст}}} = 1,3\sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{ст} = 1,3^2\,\Delta'_{ст}$$

$$\frac{Ql^3}{3EI_x} = 1,3\frac{Ql_1^3}{3EI_x} \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{l}{\sqrt[3]{1,3^2}} = \frac{1,2}{\sqrt[3]{1,3^2}} = 1,03\,м$$

Напряжение при колебаниях $\sigma_g = \sigma_{ст}k_g$

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{Ql_1}{W_x} = \frac{1000\cdot 1,03}{41\cdot 10^{-6}} = 24,8\,МПа$$

Динамический коэффициент

$$k_g = 1 + \frac{F_0}{Q}\beta$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1-\dfrac{\omega_в^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1,3}\right)^2} = 2,45$$

определяем $k_g = 1 + \dfrac{0,2}{1}2,45 = 1,5$

Напряжение $\sigma_g = 24,8\cdot 1,5 = 37,2МПа$

Пример 14.

На стальной балке весом $G = 6кН$ стоит двигатель весом $Q = 15кН$. При работе двигателя $\left(\omega_0 = 50c^{-1}\right)$ возникает центробежная сила инерции с максимальным напряжением $F_0 = 10кН$. Определить максимальные напряжения, возникающие в балке без учета и с учетом массы балки.

При расчете принять:

1. коэффициент затухания $\alpha = 26\dfrac{кН \cdot с}{м}$

2. характеристики сечения: $I_x = 968 см^4, W_x = 156 см^4$

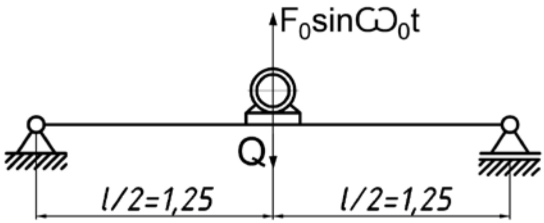

рис.2.15

Решение

1) Без учета массы балки

Напряжения при колебаниях $\sigma_g = \sigma_{ст} \cdot k_g$

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{Ql}{4W_x} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{4 \cdot 156 \cdot 10^{-6}} = 60 МПа$$

Динамический коэффициент

$$k_g = 1 + \frac{F_0}{Q}\beta$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - {\omega_в^2}/{\omega_0^2}\right)^2 + \left({2n}/{\omega_0}\right)^2 \left({\omega_в}/{\omega_0}\right)^2}}$$

Круговая частота собственных колебаний

$$\Delta_{ст} = \frac{Ql^3}{48EI_x} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2,5^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 968 \cdot 10^{-8}} = 0,0025м$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,0025}} = 68,5c^{-1}$$

Коэффициент, зависящий от сил сопротивления,

$$2n = \frac{\alpha g}{Q} = \frac{26 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{15 \cdot 10^3} = 17c^{-1}$$

$$\text{гда } \beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{50^2}{62,5^2}\right)^2 + \left(\frac{17}{62,5}\right)^2 \left(\frac{50}{62,5}\right)^2}} = 2,38$$

$$k_g = 1 - \frac{10}{15} 2,38 = 2,59$$

Напряжения $\sigma_g = 60 \cdot 2,59 = 155МПа$

2) С учетом массы балки

$$\sigma'_g = \sigma'_{ст} k'_g$$

$$\sigma'_{ст} = \sigma_{ст} + \sigma_{св}$$

где $\sigma_{св} = \frac{g_{св} l^3}{8W_x}$ - напряжение от собственного веса балки

$$\sigma_{св} = 60 + \frac{\frac{6 \cdot 10^3}{25} 2,5^2}{8 \cdot 156 \cdot 10^{-6}} = 72МПа$$

$$G_{пр} = \frac{17}{35} G = 2,92кН$$

$$K_g = 1 + \frac{P}{Q + G_{пр}} \beta'$$

Коэффициент приведения массы балки для данного случая загружения равен $\frac{17}{35}$.

$$\beta' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega_в^2 / \omega_1^2\right)^2 + \left(2n_1 / \omega_1\right)^2 \left(\omega_в / \omega_1\right)^2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\Delta'_{ст}}}$$

$$\Delta'_{ст} = \frac{\left(Q + G_{пр}\right) l^3}{48 E I_x} = \frac{\left(15 + 2,92\right) \cdot 10^3 \cdot 2,5^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 968 \cdot 10^{-8}} = 0,003м$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9,8}{0,03}} = 57,4c^{-1}$$

$$2n_1 = \frac{\alpha g}{Q + G_{пр}} = \frac{26 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{\left(15 + 2,92\right) \cdot 10^3} = 14,4c^{-1}$$

$$\beta' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{50}{57,4}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{14,4}{57,4}\right)^2 \left(\frac{20}{57,4}\right)^2}} = 3,08$$

$$k'_g = 1 + \frac{10}{15 + 2,92} 3,08 = 2,72$$

$$\sigma'_g = 72 \cdot 2,72 = 196МПа$$

3. Вопросы и задачи для самостоятельной работы

Тема: "Упругие колебания"

1. Что является причиной возникновения собственных колебаний упругих систем?
2. Что является причиной возникновения вынужденных колебаний?
3. Почему собственные колебания являются затухающими?
4. Что такое период колебаний?
5. Какая существует зависимость между периодом и частотой собственных колебаний?
6. Как вычислить частоту собственных колебаний упругой системы с одной степенью свободы?
7. Как влияет жесткость конструкции на частоту собственных колебаний?
8. Как вычислить динамический коэффициент при вынужденных колебаниях?
9. От чего зависят динамические перемещения при вынужденных колебаниях?
10. Какие силы действуют на систему при собственных и вынужденных колебаниях?
11. Напишите уравнение свободных колебаний системы.
12. Что такое амплитуда колебаний?
13. Что такое резонанс?
14. Какие сопротивления имеют место при колебаниях?
15. Как отражается наличие сопротивлений на свободных колебаниях системы?
16. Как учитывается масса упругой системы при колебаниях

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев.- М. : Наука, 1967 (1986; 1999). - 552 (512; 591) с.

2. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. - М. : Высшая школа, 1968 (1973; 1987). - 424 (328; 367) с.

3. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов / М.Д. Подскребко.- Минск: Вышэйшая школа, 2007.- 797 с.

4. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А.Л. Квитка [и др.] - Киев: Вища школа, 1986. - 775 с.

5. Бородин, Н.А. Сопротивление материалов: учебное пособие / Н.А. Бородин. - М. : Дрофа, 2001. - 288 с.

6. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А. Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. - М. : Физматлит, 2002. - 544 с.

7. Василевич, Ю.В. Механика материалов: учебное пособие / Ю.В. Василевич, Ю.П. Бобруйко [и др.] - Минск : БНТУ, 2005. - 155 с.

8. Качурин, В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К. Качурин. - М.: Наука, 1970. - 432 с.

9. Винокуров, Е.Ф. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров, М.К. Балыкин, И.А. Голубев. – Минск : Наука и техника, 1988. - 464 с.

10. Кочетов В.Т., Павленко А.Д., Кочетов М.В. Сопротивление материалов.- Ростов-на-Дону, Феникс, 2001.- 368 с.