МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Экономика и организация энергетики»

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Лабораторный практикум

Часть 1

Минск
БНТУ
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экономика и организация энергетики»

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Лабораторный практикум
для студентов специальности 1-27 01 01
«Экономика и организация производства»

В 2 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2012

УДК 330.4(076.5)
ББК 65в631я7
Э40

С о с т а в и т е л ь:
А. В. Куприк

Р е ц е н з е н т ы:
Т. Ф. Манцерова, А. И. Лимонов

Э40 **Экономико**-математические методы и модели : лабораторный практикум для студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства» : в 2 ч. / сост. А. В. Куприк. – Минск : БНТУ, 2012. – Ч. 1. – 33 с.
ISBN 978-985-525-784-5 (Ч.1).

В лабораторном практикуме приведены рекомендации по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» для студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства».

Лабораторные работы включают в себя задания, решение которых позволит закрепить теоретический материал и получить навыки соответствующих расчетов и анализа.

УДК 330.4(076.5)
ББК 65в631я7

ISBN 978-985-525-784-**5 (Ч.1)**
ISBN 978-985-525-958-0

Лабораторная работа № 1

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: научиться определять оптимальный план производства (приобретения) продукции с учетом ограниченного обеспечения ресурсами различного вида; освоить методику и технологию поиска оптимального решения задач линейного программирования (ЗЛП) с помощью ЭВМ; приобрести практический опыт проведения анализа оптимального решения ЗЛП на чувствительность.

Теоретические основы

Задача линейного программирования в общем виде записывается следующим образом: требуется найти максимальное (минимальное) значение целевой функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max\ (\min) \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad k \le m, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1, m}, \tag{3}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad l \le n, \tag{4}$$

где x_j – неизвестные величины; a_{ij}, b_i, c_j – заданные действительные числа.

(1) – целевая функция; (2), (3) – основные ограничения задачи; (4) – неосновные ограничения.

Для решения задач ЛП могут быть использованы графический метод, симплекс-метод, метод искусственного базиса, модифицированный симплекс-метод и двойственный симплекс-метод.

Любой ЗЛП (1)–(4) можно поставить в соответствие **двойственную задачу** следующего вида:

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min\ (\max), \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, k}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i = c_j, \quad j = \overline{k+1, n}, \tag{7}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s}. \tag{8}$$

Заметим, что y_i имеет произвольный знак для $i = \overline{s+1, m}$.

Поскольку задача, двойственная по отношению к двойственной, представляет собой исходную задачу, говорят, что задачи (1)–(4) и (5)–(8) образуют пару взаимодвойственных задач.

Основные задачи анализа на чувствительность:

1. Анализ изменения запасов ресурсов позволяет ответить на два вопроса:

а) на сколько можно увеличить запас некоторого ресурса с целью улучшения полученного оптимального значения целевой функции?

б) на сколько можно уменьшить запас некоторого ресурса с сохранением полученного ранее оптимального значения целевой функции?

Если ресурс израсходован полностью, его относят к разряду **дефицитных**. Ресурс в избытке называют **недефицитным**. Объем недефицитного ресурса можно уменьшить на величину избытка без изменения значения целевой функции. Объем дефицитного ресурса не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение становится избыточным.

2. Определение наиболее выгодного ресурса, т. е. ресурса, которому следует отдавать предпочтение при инвестировании дополнительных средств. Для этого вводится характеристика ценности единицы ресурса:

$$y_i = \frac{\max\ \text{приращение целевой функции}}{\max\ \text{допустимый прирост } i\text{-го ресурса}},$$

где y_i – теневая цена ресурса (стоимость единицы ресурса).

Значение теневой цены ресурсов – это решение задачи, двойственной к данной. Теневая цена ресурса показывает, на сколько изменится значение целевой функции (ЦФ) при изменении запаса ресурса на единицу.

Теневая цена позволяет определить статус ресурса. У недефицитного ресурса теневая цена равна нулю; положительное значение теневой цены говорит о дефицитности данного ресурса.

Теневая цена также предоставляет возможность оценить целесообразность введения в оптимальный план продукцию нового вида. Если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \le c_j, \tag{9}$$

то введение в план j-го вида продукции выгодно.

3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции позволяет ответить на два вопроса:

а) каков диапазон изменения того или иного коэффициента ЦФ, при котором не происходит изменение оптимального решения?

б) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент ЦФ, чтобы сделать дефицитный ресурс недефицитным и наоборот?

Задания

Вариант 1. Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используют два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала и затраты труда и материала на изготовление каждой пары обуви приведены в таблице. Прибыль от реализации первой модели обуви составляет 2 ден. ед., второй – 40 ден. ед., третьей – 10 ден. ед., четвертой – 15 ден. ед.

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Ресурс	Затраты ресурсов на одну пару обуви по моделям				Запас ресурса
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Рабочее время, чел-ч	1	2	2	1	1000
Кожа 1-го сорта	2	1	0	0	500
Кожа 2-го сорта	0	1	4	1	1200

Вариант 2. Мебельная фабрика может выпускать стулья двух типов стоимостью 8 и 12 ден. ед. Удельный расход материальных и трудовых ресурсов, необходимых для изготовления каждого типа стула, приведен в таблице. Запас досок составляет 490 м, ткани – 65 м^2, времени – 325 чел-ч.

Необходимо составить оптимальный план производства стульев, максимизирующий их суммарную стоимость.

Стул	Расход		
	досок, м	ткани, м^2	времени, чел-ч
1	2	0,50	2,0
2	4	0,25	2,5

Вариант 3. В наличии имеется 10 000 кг реагента А, 18 000 кг реагента В, 12 000 кг реагента С. Общее время работы оборудования 30 000 ч.

На изготовление 1 кг краски типа I расходуется 1 кг реагента А, ¾ кг реагента В и 1½ кг реагента С, а также $\frac{1}{8}$ ч времени работы оборудования.

На изготовление 1 кг краски типа II расходуется 1 кг реагента A, ½ кг реагента B и ¾ кг реагента C, а также $\frac{1}{4}$ ч времени работы оборудования.

На изготовление 1 кг краски типа III расходуется 1¼ кг реагента A, 1¼ кг реагента B и 1½ кг реагента C, а также $\frac{1}{6}$ ч времени работы оборудования.

Чистая прибыль от продажи 1 кг краски типов I, II, III составляет 0,8; 0,65; 1,25 у. е. соответственно.

Необходимо определить, сколько кг краски каждого из трех типов требуется произвести, чтобы получить максимальную прибыль.

Вариант 4. Имеются два проекта на строительство жилых домов. Запас стройматериалов и их расход на один дом по каждому проекту приведены в таблице. Полезная площадь дома по первому проекту составляет 60 м^2, по второму – 50 м^2.

Определить, сколько домов по первому и второму проекту следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Стройматериалы	Расход стройматериалов на один дом, м^3		Запас стройматериалов, м^3
	I проект	II проект	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650

Вариант 5. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для их изготовления используют железо и проволоку. Общий запас железа – 3 т, проволоки – 18 т. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуется 2 кг железа и 3 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 ден. ед., второго – 4 ден. ед.

Составить план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 6. Предприятие выпускает три вида изделий: А, Б, В, – для изготовления которых используется фрезерное, токарное, сварочное и шлифовальное оборудование. Удельные затраты и общий фонд рабочего времени приведены в таблице. Прибыль от реализации продукции типа А составляет 10 ден. ед., типа Б – 14 ден. ед., типа В – 12 ден. ед.

Требуется так спланировать объемы выпуска изделий, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени на изделие типа			Фонд времени
	А	Б	В	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	10	360

Вариант 7. Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 ден. ед. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 ден. ед. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары для каждого участка указаны в следующей таблице.

Участок производства	Чулки	Носки
1	0,02	0,01
2	0,03	0,01
3	0,03	0,02

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2; 100 ч на участке 3.

Какое количество продукции каждого вида следует ежедневно производить предприятию, чтобы получить максимальную прибыль?

Вариант 8. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Организация производства характеризуется приведенной таблицей.

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от 1 ед. продукции
	Площадь	Труд	Тяга	
$П_1$	2	2	2	1
$П_2$	3	1	3	4
$П_3$	4	2	1	3
$П_4$	5	4	1	5

Вариант 9. Завод выпускает продукцию четырех типов. От реализации 1 ед. каждой продукции завод получает прибыль соответственно 2, 1, 3, 5 ден. ед. На изготовление продукции расходуются три вида ресурсов: энергия, материалы, труд. Данные о технологическом процессе приведены в таблице.

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Ресурс	Затраты на 1 ед. продукции				Запас ресурсов, ед.
	I	II	III	IV	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Вариант 10. Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 20 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72 $м^2$. Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 2 ден. ед., требующие производственную площадь 12 $м^2$ (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 6 т зерна, и более мощные машины типа В стоимостью 5 ден. ед.,

занимающие площадь 6 $м^2$ и обеспечивающие производительность за смену 8 т сортового зерна. Машин типа В можно заказать не более 3 единиц.

Определить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную производительность участка.

Вариант 11. Имеющийся фонд материалов $М_i$ нужно распределить между изготовителями продукции $П_j$ так, чтобы получить максимальную прибыль от реализации всей продукции, произведенной из имеющихся материалов. Нормы расхода на единицу продукции и запас материалов приведены в таблице. Прибыль, получаемая от реализации единицы готовой продукции, $П_1$ составляет 5 ден. ед., $П_2$ – 7 ден. ед., $П_3$ – 6 ден. ед., $П_4$ – 9 ден. ед., $П_5$ – 8 ден. ед.

Материал	Фонд материалов	Продукция				
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
$М_1$	50 000	0,7	0,9	1,5	2,3	1,8
$М_2$	28 000	1,4	0,3	0,7	2,5	2,0
$М_3$	40 000	0,5	2,1	1,8	0,7	2,0

Вариант 12. Предприятие выпускает продукцию четырех типов. При производстве продукции расходуются различные ресурсы. Их запасы и удельные затраты на 1 единицу продукции приведены в таблице. Цена единицы продукции первого типа составляет 65 ден. ед., второго типа – 70 ден. ед., третьего – 60 ден. ед., четвертого – 120 ден. ед.

Найти оптимальный план выпуска продукции, максимизирующий выручку предприятия от реализованной продукции.

Ресурсы	Запас ресурса	Нормы расхода на 1 ед. продукции			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
Трудовые, чел-ч	4800	4	2	2	8
Полуфабрикаты, кг	2400	2	10	6	0
Станочное оборудование, станко-ч	1500	1	0	2	1

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Условие задачи.
4. Математическая модель задачи с условными обозначениями и пояснениями.
5. Таблица 1.
6. Итоговая симплекс-таблица.
7. Математическая модель задачи, двойственной к исходной, и ее решение.
8. Определение максимального изменения запаса каждого ресурса.
9. Определение пределов изменения каждого коэффициента целевой функции.
10. С помощью двойственных оценок определить верхнюю и нижнюю границы изменения запаса каждого ресурса (найти интервалы устойчивости оценок по отношению к изменению ресурсов).
11. Ответы на контрольные вопросы.

Таблица 1

Анализ решения задачи

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Изделия</td><td rowspan="2">ЦФ
$F(X)$</td><td colspan="3" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$X1$</td><td>$X2$</td><td>…</td><td>Xn</td></tr>
<tr><td colspan="2">Оптимальный объем производства</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ресурс</td><td rowspan="2">Наличие</td><td colspan="4">Расход ресурсов на производство изделий</td><td rowspan="2">Общий расход</td><td rowspan="2">Оста-ток</td><td rowspan="2">Статус ресурса</td><td rowspan="2">Теневая цена</td></tr>
<tr><td>$X1$</td><td>$X2$</td><td>…</td><td>Xn</td></tr>
<tr><td>$b1$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>bm</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Контрольные вопросы

1. Основные вопросы анализа оптимального решения ЗЛП на чувствительность.
2. Анализ оптимального решения ЗЛП на чувствительность с помощью итоговой симплекс-таблицы:

– статус ресурсов;

– теневая цена;

– изменение запасов ресурсов и цены на продукцию;

– целесообразность выпуска (приобретения) нового вида продукции.

Лабораторная работа № 2

ТРАНСПОРТНЫЕ МОДЕЛИ

Цель работы: научиться находить оптимальное решение задач транспортного типа в усложненной постановке.

Теоретические основы

В общем виде транспортную задачу (ТЗ) можно записать следующим образом: имеется m поставщиков и n потребителей однородного груза. Запасы i-го поставщика обозначим a_i, спрос j-го потребителя – b_j. Если обозначить стоимость перевозки единицы груза c_{ij}, а количество перевозимого груза от i-го поставщика j-му потребителю x_{ij}, то математическая модель задачи будет иметь вид:

1) суммарные запасы на перевозку должны быть минимальные:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

2) объем поставок i-го поставщика должен быть равен его запасу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

3) объем поставок j-му потребителю должен быть равен его спросу:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если суммарный объем отправляемых грузов равен потребности в этих грузах, то транспортная задача называется закрытой (сбалансированной): $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$; иначе – открытой.

Если имеет место открытая ТЗ, ее нужно свести к закрытой форме следующим образом:

1) если спрос > предложения, то вводят фиктивного поставщика с недостающим объемом спроса. Тарифы c_{ij}, связывающие фиктивные пункты с реальными, равны штрафам за недопоставку продукции;

2) если спрос < предложения, вводят фиктивного потребителя с недостающим объемом потребления. Элементы матрицы c_{ij}, связывающие фиктивные пункты с реальными, равны стоимости хранения единицы невывезенного груза.

Если указанные в пп. 1 и 2 затраты неизвестны, то соответствующие элементы $c_{ij} = 0$.

Транспортная задача решается в два этапа. Сначала необходимо найти исходный опорный план, а затем производить последовательно его улучшение до получения оптимального плана. На первом этапе для распределения ресурсов можно использовать правило «северо-западного угла» (здесь не учитываются тарифы и план далек от оптимального) или правило «минимального элемента», при котором необходимо осуществлять максимальные поставки ресурсов в клетки с минимальными тарифами. На втором этапе можно применить распределительный метод или метод потенциалов.

ТЗ присущи следующие особенности:

1) распределению подлежит однородный груз;

2) основные ограничения выражаются только уравнениями;

3) во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;

4) каждая переменная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

При решении практических задач приходится учитывать ряд дополнительных ограничений:

1) отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной загрузки транспортных коммуникаций и т. д. Это достигается путем искусственного завышения тарифов в тех ячейках транспортной таблицы, перевозки через которые следует запретить;

2) на предприятии необходимо оценить суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при планировании размещения производственных

объектов. С этой точки зрения может оказаться экономически более выгодным поставлять сырье из более отдаленных регионов, но по меньшей его себестоимости. В таких задачах в качестве критерия оптимальности принимают суммарные затраты на транспортировку и производство продукции;

3) ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить груз, имеет ограничения по пропускной способности (ограничение **«не более чем»**). Если по маршруту A_iB_j можно доставить $\leq q$ единиц груза, столбец B_j разбивается на два столбца: B_j' и B_j''. В первом спрос равен q, во втором – $(b_j - q)$. Несмотря на то что транспортные затраты в обоих столбцах одинаковы и равны исходным, ячейка A_iB_j'' блокируется (в ней ставится завышенный тариф). Затем задача решается обычным способом;

4) поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в план поставок независимо от того, выгодно это или нет (ограничение **«не менее чем»**). В этом случае уменьшают запас груза и спрос у соответствующих поставщиков и потребителей на величину обязательных поставок и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. После чего задачу корректируют с учетом обязательных поставок;

5) необходимо максимизировать целевую функцию в ТЗ (например, задача об оптимальном распределении оборудования). Для этого надо изменить знак в тарифах на противоположный. В ответе отрицательный знак игнорируется.

Задания

Вариант 1. На четырех ткацких станках с объемом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-ч за 1 час можно изготовить соответственно 260, 200, 340 и 500 м ткани трех артикулов I, II, III. Составить оптимальную программу загрузки станков, если прибыль (в ден. ед.) от реализации 1 м ткани i-го артикула при ее изготовлении на j-м станке характеризуется элементами матрицы

$$\begin{bmatrix} 2{,}5 & 2{,}2 & - & 2{,}8 \\ 1{,}6 & 1{,}0 & 1{,}9 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{bmatrix},$$

а суммарная потребность в ткани каждого из артикулов равна 200, 100 и 150 тыс. м. Необходимо учитывать, что ткань I артикула не может производиться на третьем станке.

Вариант 2. Нефтеперерабатывающие заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$ и $З_4$ ежедневно производят бензин в объемах 30, 80, 70 и 40 млн л соответственно, который направляется в бензохранилища $БХ_1$, $БХ_2$, $БХ_3$ и $БХ_4$. Вместимость бензохранилищ составляет соответственно 40, 60, 50 и 80 млн л. Все бензохранилища связаны с заводами трубопроводами, по которым и перекачивается бензин. Стоимость перекачки 1 млн л бензина с заводов в бензохранилища приведена в таблице.

Требуется составить план перекачки бензина с заводов в бензохранилища, обеспечивающий минимальные затраты.

Завод	Бензохранилище			
	$БХ_1$	$БХ_2$	$БХ_3$	$БХ_4$
$З_1$	6	5	9	7
$З_2$	10	11	8	3
$З_3$	12	8	7	9
$З_4$	10	7	12	3

Как изменится план перекачки бензина, если в рассматриваемый промежуток времени трубопровод от завода $З_1$ к бензохранилищу $БХ_4$ перекрыт для профилактического ремонта, по трубопроводу от завода $З_3$ к бензохранилищу $БХ_2$ в данный момент нет возможности пропустить более 45 млн л в день, кроме того, емкости бензохранилища $БХ_1$ должны быть заполнены полностью?

Вариант 3. Пять автопарков (АП) города с ежемесячной потребностью в бензине в 40, 30, 80, 60 и 50 т соответственно снабжаются четырьмя бензохранилищами вместимостью соответственно 55, 70, 35 и 100 т. Доставка горючего из бензохранилищ осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в таблице.

Требуется составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

Бензохранилище	Автопарк				
	$АП_1$	$АП_2$	$АП_3$	$АП_4$	$АП_5$
$БХ_1$	6	5	9	7	4
$БХ_2$	10	11	8	3	2
$БХ_3$	12	8	7	9	6
$БХ_4$	10	7	12	3	5

Как изменится план поставки горючего, если учесть следующие условия: из бензохранилища $БХ_2$ весь запас бензина поставляется в автопарк $АП_3$; потребность автопарка $АП_1$ удовлетворяется полностью; в бензохранилище $БХ_3$ остается резервный запас в 20 т бензина для чрезвычайных нужд?

Вариант 4. На заводах №№ 1, 2 и 3 производится однородная продукция в количестве 500, 700 и 600 ед. соответственно. При этом затраты на производство единицы продукции на указанных заводах составляют 10, 3 и 6 ден. ед. Для четырех потребителей требуется соответственно 400, 800, 200 и 500 ед. продукции. Расходы по перевозке единицы продукции с i-го завода j-му потребителю задаются элементами матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для полного удовлетворения потребителей необходимо составить оптимальный план расширения производства продукции, если имеются следующие возможности:

1) расширить мощность завода № 1 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными 3 ден. ед.;

2) расширить мощность завода № 2 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными 2 ден. ед.;

3) построить новый завод с затратами на производство продукции, равными 5 ден. ед., и расходами по перевозке единицы продукции, равными соответственно 7, 6, 5 и 9 ден. ед.

Вариант 5. Имеются 4 трактора марки А, 20 – марки Б, 10 – марки В и 4 – марки Г. Объем работ и себестоимость 1 га работ приведены в таблице. Сезонная норма выработки на один трактор марки А составляет 500 га условной пахоты, марки Б – 385 га, марки В – 310 га, марки Г – 300 га.

Распределить сельскохозяйственные работы по маркам тракторов таким образом, чтобы общие затраты на выполнение работ были минимальными.

Вид работ	Объем работ, га условной пахоты	Себестоимость 1 га работ, ден. ед., для трактора марки			
		А	Б	В	Г
Культивация пара	3300	0,8	1,0	0,9	0,9
Пахота пара	6000	2,4	3,0	3,4	3,2
Культивация пропашных	1250	1,2	0,9	1,0	0,95
Боронование в один след	1600	0,2	0,27	0,25	0,27
Сенокошение	1850	0,7	0,8	0,75	0,85

Вариант 6. Заводы $З_1$, $З_2$, и $З_3$ выпускают однородную продукцию в количестве 40, 20 и 50 ед. себестоимостью 1, 3 и 7 ден. ед. соответственно. Продукция поставляется в пункты А, Б и В в количестве 30, 25 и 45 ед. соответственно с тарифами, приведенными в матрице:

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пятнадцать единиц продукции завода $З_3$ предназначено для пункта Б.

Продукцию завода с наименьшей себестоимостью распределить полностью. Составить наиболее экономный план удовлетворения потребностей в продукции, учитывающий затраты на ее производство и доставку.

Вариант 7. Фирма переводит свой головной завод на производство определенного вида изделий, которые будут выпускаться в течение четырех месяцев. Величины спроса в течение этих четырех месяцев составляют 100, 200, 180 и 300 изделий соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет:

– запасов изделий, произведенных в прошлом месяце, сохраняющихся для реализации в будущем;

– производства изделий в текущем месяце;

– избытка производства изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов.

Затраты на одно изделие в каждом месяце составляют 4 ден. ед. Изделие, произведенное для более поздней реализации, влечет за собой дополнительные издержки на хранение в 0,5 ден. ед. в месяц. С другой стороны, каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом в размере 2 ден. ед. в месяц.

Объем производства изделий меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре месяца предполагается выпуск не более 50, 180, 280 и 270 изделий соответственно.

Требуется составить план, имеющий минимальную стоимость производства и хранения изделий.

Вариант 8. Составить план посева зерновых культур по участкам различного плодородия, максимизирующий получаемую прибыль. Площадь участка I составляет 3000 га, участка II – 1000 га, участка III – 300 га, участка IV – 500 га. Остальные данные приведены в таблице.

Зерновая культура	Урожайность по участкам, ц/га				Посевная площадь, га	Закупочная цена, ден. ед.	Затраты средств по участкам на 1 га, ден. ед.			
	I	II	III	IV			I	II	III	IV
Пшеница	35	25	20	15	2400	6,5	50	40	40	40
Кукуруза	60	40	30	50	1700	5,0	90	90	70	65
Ячмень	30	20	15	15	350	4,3	50	40	40	45
Рожь	25	30	20	15	250	7,0	50	50	45	40
Просо	40	20	15	10	100	7,2	60	50	50	50

Вариант 9. Заводы №№ 1, 2 и 3 производят однородную продукцию в количествах 490, 450 и 470 ед. соответственно. Себестоимость производства единицы продукции на заводе № 1 составляет 25 ден. ед., на заводе № 2 – 20 ден. ед., на заводе № 3 – 23 ден. ед. Продукция отправляется в пункты А, Б, В, потребности которых равны соответственно 300, 340 и 360 ед. Стоимость перевозок единицы продукции задается матрицей

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозки продукции с учетом ее себестоимости при условии, что коммуникации между заводом № 2 и пунктом А не позволяют пропускать в рассматриваемый период более 200 ед. продукции. Установить, во что обошлось ограничение пропускной способности указанного маршрута.

Вариант 10. Завод имеет три цеха – А, Б, В – и четыре склада – №№ 1, 2, 3, 4. Цех А производит 30 тыс. изделий, цех Б – 40 тыс., цех В – 20 тыс. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад № 1 – 25 тыс. изделий, склад № 2 – 30 тыс., склад № 3 – 35 тыс., склад № 4 – 15 тыс. Стоимость перевозки из цеха А на склады №№ 1, 2, 3 и 4 одной тысячи изделий равна 2, 3, 0,5, 4 ден. ед. соответственно, из цеха Б – 3, 2, 5 и 1 ден. ед., из цеха В – 4, 3, 2 и 6 ден. ед.

Составить план перевозки изделий на склады, минимизирующий транспортные расходы. При этом необходимо учесть, что на складах №№ 1 и 4 созданы лучшие условия для хранения готовой продукции, а поэтому их следует загрузить полностью.

Вариант 11. Механизмы M_1, M_2 и M_3, имеющиеся в количествах 10, 5 и 15 ед., могут использоваться для работ на участках $У_1$, $У_2$, $У_3$ и $У_4$, с которых поступили заявки на 7, 12, 14 и 13 механизмов соответственно. Производительность каждого механизма на соответствующем участке приведена в матрице:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Распределить механизмы согласно заявкам так, чтобы общий объем выполненной работы был максимальным при непременном условии, что заявка участка $У_2$ удовлетворена полностью.

Вариант 12. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из A_1 в B_1 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_5 – не менее 60 ед., а из A_2 в B_4 – не более 40 ед. груза. Потребность пункта B_1 составляет 90 ед. груза, пункта B_2 – 60 ед., B_3 – 80 ед., B_4 – 70 ед., B_5 – 90 ед.

Пункт отправления	Пункт назначения					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Условие задачи.
4. Табличная модель.
5. Табличная модель с учетом дополнительных условий задачи.
6. Решение задачи.
7. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Как записывается математическая модель задачи транспортного типа?
2. Как свести открытую транспортную задачу к закрытой?
3. Каковы основные ситуации, описывающие дополнительные ограничения транспортной задачи?

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ EXCEL

Цель работы: научиться решать задачи линейного программирования и транспортные задачи с помощью процедуры «Поиск решения» в Excel.

Теоретические основы

Рассмотрим на примере задачи линейного программирования использование процедуры «Поиск решения» в Excel.

Пример 1. Задача распределения ресурсов.

Предприятие изготавливает и продает краску двух видов: для внутренних и внешних работ. Для производства краски используется два исходных продукта A и B. Расходы продуктов A и B на 1 тонну соответствующих красок и запасы этих продуктов на складе приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход продуктов, тонн, на 1 тонну краски		Запас продукта на складе, тонн
	для внутренних работ	для внешних работ	
A	1	2	3
B	3	1	3

Продажная цена за 1 тонну краски для внутренних работ составляет 2000 рублей, краски для наружных работ – 1000 рублей. Требуется определить, какое количество краски каждого вида следует производить предприятию, чтобы получить максимальный доход.

Решение.

I. Составление математической модели задачи.

Обозначим: x_1 – количество производимой краски для внутренних работ; x_2 – соответствующее количество краски для наружных работ; F – доход от продажи краски (в тысячах рублей).

Ограничения, которым должны удовлетворять переменные задачи:

$$x_1 + 2x_2 \le 3;$$
$$3x_1 + x_2 \le 3;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

В левых частях первых двух неравенств определены расходы продуктов A и B, а в правых частях записаны запасы этих продуктов.

Тогда целевая функция задачи записывается так:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max.$$

II. Решение задачи распределения ресурсов в Excel.

Введем данные примера 1 в таблицу Excel (рисунок 1).

	A	B	C	D	E
1		Перем	енные		
2	Имя	Краска 1	Краска 2	Доход	
3					
4		2	1		
5		Ограни	чения		
6	Ресурс			Расход	Запасы
7	A	1	2		3
8	B	3	1		3

Рисунок 1 – Ввод исходных данных

На рисунке 1 «Краска 1» обозначает краску для внутренних работ, «Краска 2» – краску для наружных работ.

Для переменных задачи x_1 и x_2 отведены ячейки B3 и C3. Эти ячейки называются рабочими или изменяемыми ячейками. В изменяемые ячейки ничего не заносится, и в результате решения задачи в них будут оптимальные значения переменных.

В ячейку D4 вводится формула для вычисления целевой функции задачи (дохода) $F = 2x_1 + x_2$. Чтобы сделать это, можно вводить формулу вручную, а можно воспользоваться функцией «СУММПРОИЗВ».

Для этого выполняем следующие действия: курсор ставим в ячейку D4; в меню выбираем Вставка / Функция (или Формулы / Вставить функцию); в появившемся окне выбираем «Математические» и «СУММПРОИЗВ». В окне мастера функций следует нажать Далее, в появившемся окне в поле «Массив 1» ввести (протаскивая курсор мыши по ячейкам) адреса изменяемых ячеек B3:C3. В поле «Массив 2» необходимо ввести адреса ячеек B4:C4, содержащих цены на краски, после нажать Готово (рисунок 2).

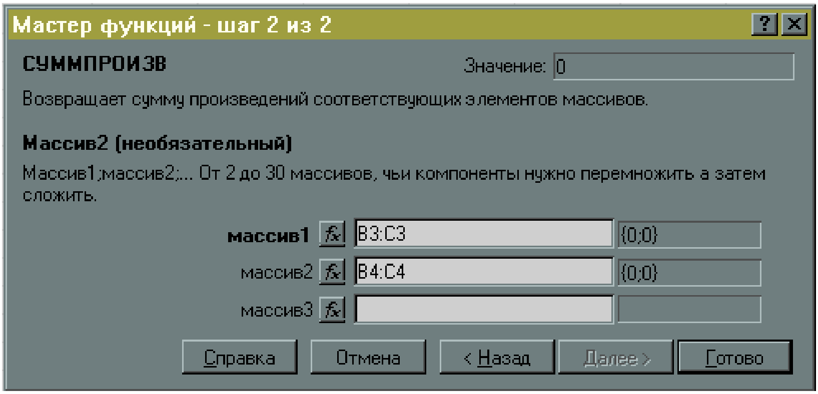

Рисунок 2 – Окно мастера функций

В ячейку D7 вводится формула для вычисления израсходованного количества продукта А: $x_1 + 2x_2$, а в ячейку D8 вводится формула для израсходованного количества продукта В: $3x_1 + x_2$. Обе формулы вводятся аналогично целевой функции.

Проверить результаты ввода можно следующим образом: при установке курсора в ячейку D4 в строке ввода должно появиться «=СУММПРОИЗВ(B3:C3; B4:C4)»; в ячейке D7: «= СУММПРОИЗВ (B3:C3; B7:C7)»; в ячейке D8: «= СУММПРОИЗВ(B3:C3; B8:C8)».

После ввода формул и данных экран имеет вид, представленный на рисунке 3.

D8 =СУММПРОИЗВ(B3:C3;B8:C8)

	A	B	C	D	E	F
1		Перем	енные			
2	Имя	Краска 1	Краска 2	Доход		
3						
4		2	1	0		
5		Ограни	чения			
6	Ресурс			Расход	Запасы	
7	A	1	2	0	3	
8	B	3	1	0	3	

Рисунок 3 – Окно после ввода исходных данных и формул

В меню «Сервис» выбираем процедуру «Поиск решения».

В появившемся окне нужно установить адрес целевой ячейки D4, значение целевой ячейки – максимальное, адреса изменяемых ячеек – B3:C3. Чтобы ввести ограничения задачи, следует нажать кнопку «Добавить». В появившемся диалоговом окне (рисунок 4) слева ввести адрес D7 (израсходованное количество продукта А), затем выбрать знак <=, а в правой части ввести количество продукта А на складе, равное 3 (или адрес ячейки E7).

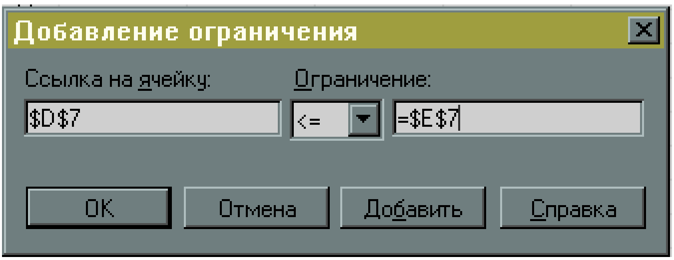

Рисунок 4 – Ввод ограничения

После ввода нажать кнопку «Добавить» и аналогично ввести второе ограничение: D8 <= 3. Снова нажать кнопку «Добавить» и ввести ограничение B3:C3 >= 0 (соответствующее ограничению $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$). После ввода последнего ограничения нажать OK.

После ввода ограничений окно «Поиск решения» будет иметь вид, представленный на рисунке 5.

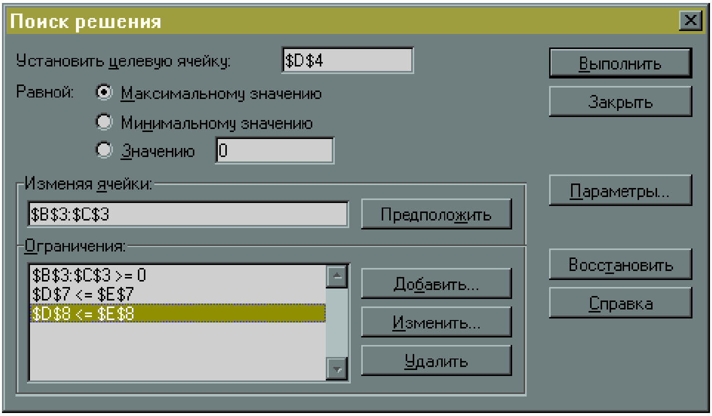

Рисунок 5 – Поиск решения

Произведем настройку параметров решения задачи: в окне «Поиск решения» нажать «Параметры», в появившемся окне установить флажок в пункте «Линейная модель». В этом случае при решении задачи будет использоваться симплекс-метод. Остальные значения можно оставить без изменения. После нажать кнопку ОК.

Для решения задачи в окне «Поиск решения» нажать кнопку «Выполнить».

Если решение задачи найдено, то появляется окно «Результаты поиска решения» (рисунок 6).

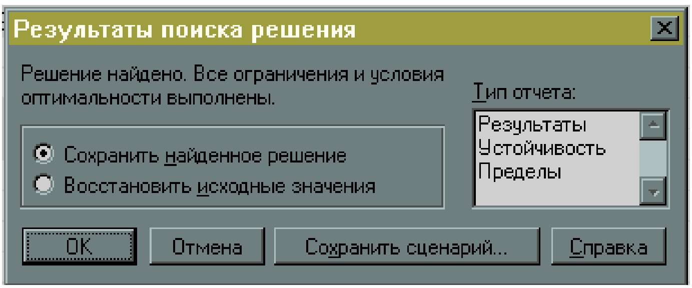

Рисунок 6 – Результаты поиска решения

Для просмотра результатов выбираем тип отчета «Результаты» и нажимаем кнопку ОК. В появившихся трех таблицах (рисунок 7) приводятся результаты поиска.

Целевая ячейка (Макс)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$D$4	Доход	2,4	2,4

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$3	Краска 1	0,6	0,6
$C$3	Краска 2	1,2	1,2

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Состояние	Разница
$D$7	A Расход	3	$D$7<=$E$7	связанное	0
$D$8	B Расход	3	$D$8<=$E$8	связанное	0
$B$3	Краска 1	0,6	$B$3>=0	не связан.	0,6
$C$3	Краска 2	1,2	$C$3>=0	не связан.	1,2

Рисунок 7 – Отчет о результатах

Из этих таблиц видно, что в оптимальном решении:
производство краски 1 = B3 = 0,6;
производство краски 2 = C3 = 1,2;
при этом доход = D4 = 2,4;
расход ресурса A = D7 = 3;
расход ресурса B = D8 = 3.

Таким образом, оба ресурса дефицитные (соответствующие ограничения называются связанными).

«Отчет о результатах» состоит из трех таблиц:

в таблице 1 приводятся сведения о целевой функции;

в таблице 2 приводятся значения переменных задачи;

в таблице 3 показаны результаты поиска для ограничений задачи.

Так же можно выбирать тип отчета «Устойчивость» или «Пределы» (см. рисунок 6).

Первоначальная таблица Excel заполняется результатами, полученными при решении (на рисунке 8 появившиеся значения в темных ячейках).

	A	B	C	D	E
1		Перем	енные		
2	Имя	Краска 1	Краска 2	Доход	
3		0,6	1,2		
4		2	1	2,4	
5		Ограни	чения		
6	Ресурс			Расход	Запасы
7	A	1	2	3	3
8	B	3	1	3	3

Рисунок 8 – Результат решения задачи

Следовательно, чтобы получить максимальный доход 2400 рублей, предприятию необходимо производить 0,6 тонны краски для внутренних работ и 1,2 тонны краски для внешних работ.

Рассмотрим транспортную задачу. Любую транспортную задачу можно представить в виде задачи линейного программирования, т. е. можно составить целевую функцию и ограничения. Следовательно, ее можно решать способами, которыми решаем задачу линейного программирования.

Пример 2. Транспортная задача.

В хранилищах А и В находится соответственно 170 и 90 тонн горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуется соответственно 90, 60, 110 тонн горючего. Стоимость перевозки одной тонны горючего из хранилища А в пункты 1, 2, 3 соответственно равна 50, 10, 40 ден. ед.; из хранилища В в пункты 1, 2, 3 соответственно равна 100, 30, 80 ден. ед. Составить план перевозки горючего, минимизирующий общие транспортные расходы.

Решение.

I. Составление математической модели задачи.

Введем следующие обозначения:

x_1 – количество горючего, перевозимого из хранилища А в пункт 1;

x_2 – из хранилища А в пункт 2;

x_3 – из хранилища А в пункт 3;

x_4 – из хранилища В в пункт 1;

x_5 – из хранилища В в пункт 2;

x_6 – из хранилища В в пункт 3;

F – общие транспортные расходы, ден. ед.

Так как транспортная задача закрытого типа (спрос = предложению), то ограничения будут типа **равенства** (особенность транспортной задачи).

Ограничения, которым должны удовлетворять переменные задачи:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 170;$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 90;$$

$$x_1 + x_4 = 90;$$

$$x_2 + x_5 = 60;$$

$$x_3 + x_6 = 110;$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}\ .$$

Тогда целевая функция задачи, минимизирующая общие транспортные расходы, записывается так:

$$F = 50x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 100x_4 + 30x_5 + 80x_6 \rightarrow \min.$$

Таким образом, получили математическую модель задачи линейного программирования.

II. Решение транспортной задачи с помощью «Поиска решения» в Excel производится аналогично решению задачи линейного программирования (пример 1).

Задания

Решить задачи своего варианта из лабораторных работ № 1 и № 2 с помощью «Поиска решения» в Excel. Сравнить полученные результаты.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Условие задачи линейного программирования.
4. Математическая модель задачи с условными обозначениями и пояснениями.
5. Реализация решения задачи линейного программирования в Excel.
6. Условие транспортной задачи.
7. Математическая модель транспортной задачи с условными обозначениями и пояснениями.
8. Реализация решения транспортной задачи в Excel.
9. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Как транспортную задачу представить в виде задачи линейного программирования?
2. Как с помощью процедуры «Поиск решения» в Excel можно решать задачи линейного программирования и транспортные задачи?

Литература

1. Балашевич, В. А. Экономико-математическое моделирование производственных систем : учеб. пособие для вузов / В. А. Балашевич, А. М. Андронов. – Минск : Універсітэцкае, 1995. – 240 с. : ил.

2. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование : учеб. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод, – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 2001. – 351 с. : ил.

3. Падалко, Л. П. Математические методы оптимального планирования развития и эксплуатации энергосистем / Л. П. Падалко. – Минск : Выш. шк., 1972.

4. Партыка, Т. Л. Математические методы : учеб. / Т. Л. Партыка, И. И. Попов. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2005. – 464 с. : ил.

5. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : БГЭУ, 2000. – 412 с. : ил.

Содержание

Учебное издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Лабораторный практикум
для студентов специальности 1-27 01 01
«Экономика и организация производства»

В 2 частях

Часть 1

Составитель
КУПРИК Алёна Викторовна

Редактор *В. О. Кутас*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 09.11.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,92. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100. Заказ 1093.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск