Белорусский национальный технический университет, Минск

УСТРАНЕНИЕ ПЛЕОНАЗМОВ В ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В.

The general solution that contains two arbitrary functions of longitudinal coordinates and time has been constructed for the elastic isotropic area comprising two parallel planes. The equilibrium equations within the area and homogeneous shearing stresses on the planes z=±h are accomplished identically.

Изучению лишних элементов (плеоназмов) в общих решениях статической теории упругости изотропного тела посвящены работы П.Ф. Папковича, М.Г. Слободянского, Л.Н. Тер-Мкртичьяна, И.С. Сокольникова, Р. Юбэнкса и Э. Штернберга, А.С. Малиева, Э.Н. Байды. Предметом внимания указанных авторов являлись часто встречающиеся в приложениях решения Гродского-Папковича и Буссинеска-Галеркина.

Справедливости ради следует сказать о существующей до сих пор противоречивости в выводах исследователей, объясняющуюся исключительной сложностью вопроса, требующего аккуратных рассуждений и тонких математических средств. Использование в данной работе операторного метода позволило получить новые результаты для эластокинетики. Совпадение результатов с результатами полученными ранее другим способом позволят говорить об их достоверности.

Рассмотрим задачу динамической теории упругости для области, ограниченной двумя бесконечными параллельными плоскостями.

Представим систему дифферициальнных уравнений в перемещениях в операторной форме записи [2]

$$\begin{aligned}
&\Delta_2^2 u_1 + (\gamma-1)\partial_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0,\\
&\Delta_2^2 u_2 + (\gamma-1)\partial_2(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0,\\
&\Delta_2^2 u_3 + (\gamma-1)\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\Delta_2^2 = \Delta^2 - c_2^{-2}\partial_t^2$; $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$; $\gamma = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}$; λ, μ – коэффициенты Ламе; c_2 – скорость распространения в упругом теле поперечной волны.

Решение системы уравнений (1) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&u_1 = \gamma\Delta_1^2\varphi_1 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3),\\
&u_2 = \gamma\Delta_1^2\varphi_2 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3),\\
&u_3 = \gamma\Delta_1^2\varphi_3 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3).
\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\Delta_1^2 = \Delta^2 - c_1^{-2}\partial_t^2$, c_1 – скорость распространения в упругом теле продольной волны.

Функции $\varphi_i(x,y,z,t)$ $i = 1,2,3$ должны удовлетворять уравнению $\Delta_1^2\Delta_2^2\varphi_i = 0$. Для удобства анализа решения разобьем исходную задачу на симметричную по нормальным и кососимметричную по касательным напряжениям (Задача А) и на симметричную по касательным и кососимметричную по нормальным напряжениям (Задача В) относительно серединной плоскости.

В задаче А полагаем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \left[A_1\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) + B_1\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right] * \mathrm{f}(x,y,t),\\
&\varphi_2 = \left[A_2\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) + B_2\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right] * \mathrm{f}(x,y,t),\\
&\varphi_3 = \left[A_3\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) + B_3\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right] * \mathrm{f}(x,y,t).
\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\nabla_1 = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2 - c_1^{-2}\partial_t^2}$, $\nabla_2 = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2 - c_2^{-2}\partial_t^2}$; A_i, B_i (i=1,2,3) – подлежащие определению операторные коэффициенты; $f(x,y,t)$ - произвольная аналитическая функция; звездочкой обозначено операторное произведение [1].

Можно непосредственно убедиться, что в этом случае равенство $\Delta_1^2\Delta_2^2\varphi_i = 0$ (i=1,2,3) будут выполняться тождественно. Далее в (3) определяем вид операторных сомножителей исходя из касательных однородных граничных условий для напряжений

$$\mu^{-1}\sigma_{31} = \gamma\Delta_1^2(\partial_3\varphi_1 + \partial_1\varphi_3) - 2(\gamma-1)\partial_1\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3),$$
$$\mu^{-1}\sigma_{32} = \gamma\Delta_1^2(\partial_3\varphi_2 + \partial_2\varphi_3) - 2(\gamma-1)\partial_2\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3),$$
$$\mu^{-1}\sigma_{33} = 2\gamma\Delta_1^2\partial_3\varphi_3 - ((\gamma-2)\nabla_2^2 - 2(\gamma-1)\partial_3^2)(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3).$$

Для операторных коэффициентов предварительно устанавливаем

$$\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi + \partial_3\varphi = (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) +$$
$$+ (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3)\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$\gamma\Delta_1^2(\partial_3\varphi_1 + \partial_1\varphi_3) = (\gamma-1)c_2^{-2}\partial_t^2(\partial_1 B_3 - \nabla_2 B_1)\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$\gamma\Delta_1^2(\partial_3\varphi_2 + \partial_2\varphi_3) = (\gamma-1)c_2^{-2}\partial_t^2(\partial_2 B_3 - \nabla_2 B_2)\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$2\gamma\Delta_1^2\partial_3\varphi_3 = 2(\gamma-1)c_2^{-2}\partial_t^2\nabla_2 B_3\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$\partial_1\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) = -\partial_1\nabla_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_2) -$$
$$- \partial_1\nabla_2(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3)\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$\partial_2\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) = -\partial_2\nabla_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) -$$
$$- \partial_2\nabla_2(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3)\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$((\gamma-2)\nabla_2^2 - 2(\gamma-1)\partial_3^2)(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) = (\gamma-1)(\nabla_2^2 + \nabla^2)(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3);$$
$$\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2) - 2(\gamma-1)\nabla_2^2(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3)\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2).$$

Полагая первый плеоназм равным $B_2 = \partial_1^{-1}\partial_2 B_1$, после преобразований получим

$$\mu^{-1}(\gamma-1)^{-1}\sigma_{31} = 2\partial_1\nabla_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) +$$
$$+ \partial_1(\nabla_2^2 + \nabla^2)(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1 + B_3)\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$\mu^{-1}(\gamma-1)^{-1}\sigma_{32} = 2\partial_2\nabla_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) +$$
$$+ \partial_2(\nabla_2^2 + \nabla^2)(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1 + B_3)\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2),$$
$$\mu^{-1}(\gamma-1)^{-1}\sigma_{33} = (\nabla_2^2 + \nabla^2)(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) +$$
$$+ 2\nabla^2\nabla_2(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1 + B_3)\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2).$$

В соответствии с однородными граничными условиями $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$, находим второй плеоназм $\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3 = -\dfrac{\nabla_2^2 + \nabla^2}{2\nabla_1}(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1 + B_3)$.

Возвращаясь к рядам перемещений, получим:

$$u_1 = \gamma\nabla_1\varphi_1 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) =$$
$$= (\gamma-1)[c_2^{-2}\partial_t^2 B_1\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2) - \partial_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3)\cos z\nabla_1\sin^{-1}(h\nabla_1) -$$
$$- \partial_1(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3)\cdot\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2) = (\gamma-1)(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1 + B_3)\partial_1 \times$$
$$\times\left(\frac{\nabla_2^2 + \nabla^2}{2\nabla_1}\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) - \nabla_2\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right)].$$

Аналогично находим:

$$u_2=(\gamma-1)(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1+B_3)\partial_2\left(\frac{\nabla_2^{-2}+\nabla^2}{2\nabla_1}\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)-\nabla_2\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right),$$

$$u_3=(\gamma-1)(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1+B_3)\left(-\frac{\nabla_2^2+\nabla^2}{2}\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)+\nabla^2\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right).$$

После сокращения на один и тот же операторный множитель $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\nabla_2\partial_1^{-1}B_1+B_3)$, окончательно устанавливаем

$$u_1=\partial_1\left(\frac{\nabla_2^2+\nabla^2}{\nabla_1}\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)-2\nabla_2\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right)*\mathrm{f(x,y,t)},$$

$$u_2=\partial_2\left(\frac{\nabla_2^2+\nabla^2}{\nabla_1}\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)-2\nabla_2\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right)*\mathrm{f(x,y,t)}1,$$

$$u_3=(\nabla_2^2+\nabla^2)\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)+2\nabla^2\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)*\mathrm{f(x,y,t)}.$$

В задаче В полагаем

$$\varphi_1=\left[D_1\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)+E_1\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right]*\mathrm{g(x,y,t)},$$

$$\varphi_2=\left[D_2\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)+E_2\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right]*\mathrm{g(x,y,t)},$$

$$\varphi_3=\left[D_3\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)+E_3\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right]*\mathrm{g(x,y,t)}.$$

По аналогии с предыдущим пунктом при выполнении граничных условий для лишних элементов (плеоназмов) получаем соответствия соотношения

$$E_2=\partial_1^{-1}\partial_2E_1 \text{ и } \partial_1D_1+\partial_2D_2-\nabla_1D_3=\frac{\nabla_2^{-2}+\nabla^2}{2\nabla_1}(\nabla_2\partial_1^{-1}E_1-E_3).$$

Ряды перемещений в этом случае примут вид

$$u_1=\partial_1\left(\frac{\nabla_2^2+\nabla^2}{\nabla_1}\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)-2\nabla_2\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right)*g(x,y,t),$$

$$u_2=\partial_2\left(\frac{\nabla_1^2+\nabla^2}{\nabla_1}\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)-2\nabla_2\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right)*\mathrm{g(x,y,t)},$$

$$u_3=(\nabla_2^2+\nabla^2)\cos(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)-2\nabla^2\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)*\mathrm{g(x,y,t)}.$$

Полное перемещение равно сумме рядов перемещений задач А и В. Нормальное напряжение в задаче А имеет вид:

$$\mu^{-1}\sigma_{33}=-\frac{(\nabla_2^2+\nabla^2)^2}{\nabla_1}\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)+4\nabla^2\nabla_2\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2).$$

В задаче *В*:

$$\mu^{-1}\sigma_{33}=-\frac{(\nabla_2^2+\nabla^2)^2}{\nabla_1}\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla)_1+4\nabla^2\nabla_2\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2).$$

В результате построено операторное решение первой основной динамической задачи теории упругости, удовлетворяющее условию и $\sigma_{13|z=\pm h}=\sigma_{23|z=\pm h}=0$ и содержащей две производные функции f(x,y,t) и g(x,y,t).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости - М. Издательство «Мир», 1975-672с.

2. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт», 2003-101с.