Баранавіцкі дзяржаўны універсітэт

ДАСЛЕДАВАННЕ ПАЛЁЎ СІЛ ІНЕРЦЫІ ПРЫ КАЧЭННІ АДНАРОДНЫХ ЦЫЛІНДРЫЧНЫХ ЦЕЛ

Русан С.І.

Special cases rocking on a plane, the convex and concave surfaces are considered. For research of fields of forces of inertia in case of non-uniform rocking the method of two centers for the first time is used.

Агульныя заўвагі. Мадэль даследавання

Сфармуляваная ў загалоўку задача актуальна пры вывучэнні пытанняў зносу паверхняў у планетарных і дыферэнцыяльных механізмах, пры даследаванні сіл, якія ўзнікаюць на паверхнях узаемадзеяння ў некаторых тыпах здрабняльных машын, пры вывучэнні напружана-дэфармаванага стану цыліндрычных цел і г. д. Мяркуецца, што паверхні цыліндрычных цел і паверхні качэння маюць пастаянны радыус крывізны, а працэс качэння адбываецца без слізгання. Масы цел прыводзяцца да іх нармальных сячэнняў (кругоў), праведзеных праз цэнтры мас. Маса адзінкі сячэння роўна $m' = \rho \cdot l$, маса ўсяго цела $m = \pi r^2 m'$, дзе ρ – удзельная маса; r – радыус цыліндра; l – яго даўжыня.

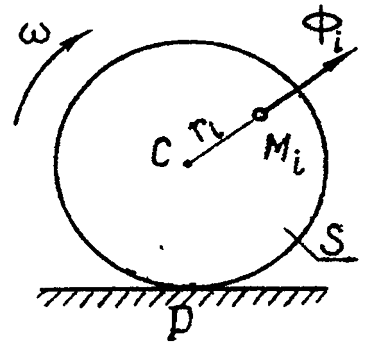
Ніжэй разгледжаны прыватныя выпадкі качэння, апісаны для іх адпаведныя палі сіл інерцыі і знойдзены іх галоўныя вектары і галоўныя моманты. У выпадку нераўнамернага качэння цыліндраў упершыню ў дынамічных разліках выкарыстоўваецца метад двух імгненных цэнтраў паскарэнняў, апісаны ў рабоце [1]. Устаноўленая ніжэй інтэнсіўнасць сіл інерцыі можа быць выкарыстана для даследавання напружана-дэфармаванага стану цыліндраў, а знойдзеныя галоўныя вектары і галоўныя моманты – для вывучэння іх сілавога ўзаемадзеяння з іншымі целамі.

Раўнамернае качэнне па плоскасці

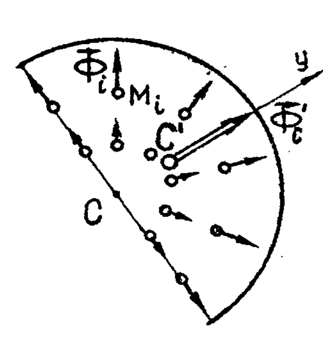
У гэтым выпадку, як і пры вярчальным руху вакол нерухомай восі, узнікае восесіметрычнае поле адцэнтрабежных сіл інерцыі, інтэнсіўнасць якіх узрастае ад цэнтра C да перыферыі па лінейнаму закону (рыс. 1):

$$\Phi_i = m' r_i \omega^2 . \qquad (1)$$

Формула (1) апісвае інтэнсіўнасць сіл інерцыі ў сячэнні на акружнасці радыуса $r_i = const$. Назавём яе *эквісілавой.* У цыліндры эквісілавой акружнасці адпавядае *эквісілавая паверхня.* Знойдзем галоўны вектар сіл інерцыі, якія дзейнічаюць на палову сячэння і нагружаюць яго дыяметр (рыс. 2): $\Phi_C = \dfrac{m}{2} a_{C'} = \dfrac{1}{2} \pi r^2 l \rho \cdot y_{C'} \omega^2 = \dfrac{2}{3} \rho l r^3 \omega^2$. Сіла Φ_C імкнецца раскалоць цыліндр.



Рыс. 1.



Рыс. 2

Раўнамернае качэнне па выпуклай паверхні

У артыкуле [1] паказана, што імгненны цэнтр паскарэнняў Q_0 у гэтым выпадку пры любых геаметрычных параметрах сістэмы застаецца ў межах адрэзка CP (рыс. 3). Пры $r_1 \to \infty$ Q_0 знаходзіцца ў цэнтры C сячэння S, як пры качэнні па плоскасці; пры $r_1 \to 0$ Q_0 супадае с пунктам P і плоскі рух сячэння пераходзіць у вярчальны вакол восі, што праходзіць праз імгненны цэнтр скорасцей P. Для значэнняў $0 < r_1 < \infty$ палажэнне імгненнага цэнтра паскарэнняў Q_0 вызначаецца па формуле [1]:

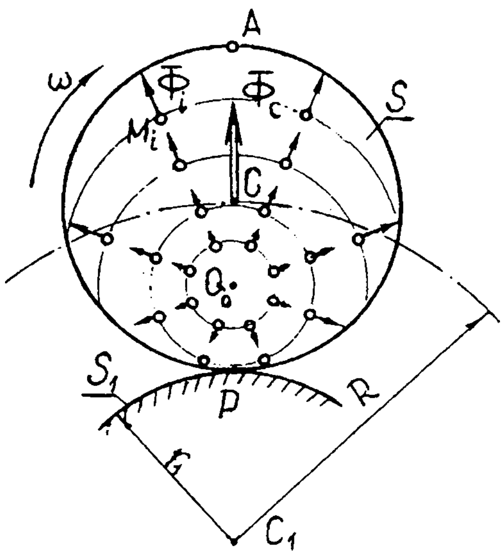
$$C\,Q_0 = \alpha r\,, \tag{2}$$

дзе $\alpha = \dfrac{r}{R}$.

Знойдзены такім чынам пункт Q_0 адначасова з'яўляецца і цэнтрам адцэнтрабежных сіл інерцыі. Найбольшага значэння інтэнсіўнасць сілы інерцыі дасягае ў пункце A. Тут яна можа (калі $\alpha = 1$) у два разы перавышаць значэнне сілы інерцыі пры качэнні цыліндра па плоскасці. Такім чынам, інтэнсіўнасць сілы інерцыі ў выпадку раўнамернага качэння цыліндра па выпуклай паверхні змяняецца ў межах ад нуля да $2\,m'r\,\omega^2$. Размеркаванне сіл інерцыі ў сячэнні цыліндра паказана на рысунку 3.1 пры $r_1 = r$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{2}\right)$. Галоўны вектар сіл інерцыі змешчаны на восі сіметрыі адпаведнага поля і вылічваецца па формуле

$$\Phi_C = \pi\alpha\rho l r^3\omega^2\,, \tag{3}$$

дзе $0 < \alpha < 1$. Як відаць з формулы (3.2), велічыня Φ_C залежыць не толькі ад размераў цыліндра і вуглавой скорасці ω, але і ад радыуса паверхні качэння r_1.

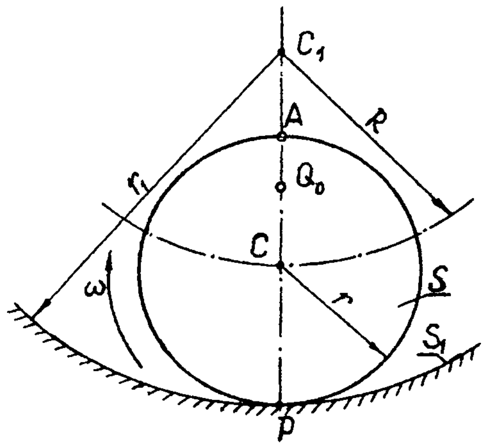


Рыс. 3

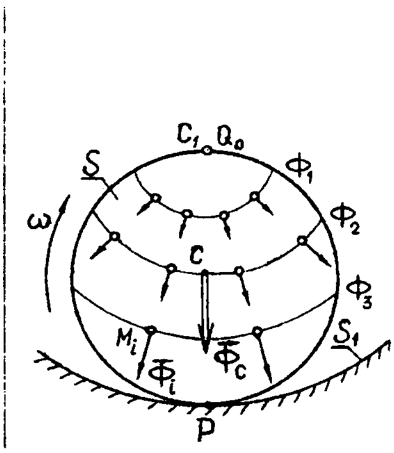
Раўнамернае качэнне па ўвагнутай паверхні

Качэнне па ўвагнутай паверхні магчыма пры ўмове, што яе радыус крывізны большы, чым радыус цыліндра ($r_1 > r$). Пры гэтым каэфіцыент α у формуле (2) мяняецца ад значэнняў блізкіх да нуля (пры вельмі вялікіх радыусах r_1) да бесканечнасці пры $r_1 \to r$. У апошнім выпадку неабмежавана ўзрастаюць нармальныя паскарэнні, а значыць, і адцэнтра-бежныя сілы інерцыі. Далей разгледзім качэнне цыліндра па паверхні радыуса $r_1 = 2r$. Пункт C_1 у гэтым выпадку знаходзіцца на контуры сячэння S, г. зн. $R = r$, $\alpha = 1$, $C\,Q_0 = r$, а імгненны цэнтр паскарэнняў Q_0 (ён жа і цэнтр поля адцэнтрабежных сіл інерцыі) супадае з пунктам C_1

(рыс. 5). Пакуль цэнтр Q_0 застаецца ў межах сячэння на адрэзку CA (рыс. 4), найбольшае значэнне сілы інерцыі, як і ў папярэднім выпадку, не перавышае велічыні $2m'r\omega^2$. Такая інтэнсіўнасць цяпер мае месца ў пункце P. Эквісілавыя паверхні Φ_i, канцэнтрычныя з паверхняй качэння S_1, паказаны на рыс. 5. Галоўны вектар Φ_C вылічваецца па формуле (3), у якой $\alpha = 1$. Ён таксама можа неабмежавана ўзрастаць, а разам з ім і ціск цыліндра на паверхню качэння. Заўважым, што пры $r_1 = 2r$ любы пункт контура сячэння S апісвае прамалінейную траекторыю, якая супадае з дыяметрам паверхні качэння.



Рыс. 4



Рыс. 5

Нераўнамернае качэнне ($\varepsilon \neq 0$)

Спосаб прадстаўлення поля паскарэнняў і адпаведных сіл інерцыі па формуле з чатырох складнікаў, якая выражае тэарэму Рывальса і звычайна прымяняецца ў гэтым выпадку, неаглядны і непрыдатны для практычнага аналізу задачы. Больш эфектыўным магло б стаць выкарыстанне для даследавання сіл інерцыі «класічнага» імгненнага цэнтра паскарэнняў Q. Але яго палажэнне залежыць ад зменных кінематычных характарыстык качэння ω і ε, што таксама пры $\varepsilon \neq 0$ ускладняе задачу аналізу паскарэнняў і сіл інерцыі. Альтэрнатывай згаданым спосабам з'яўляецца выкарыстанне двух цэнтраў паскарэнняў, палажэнне якіх залежыць толькі ад пастаянных геаметрычных параметраў сістэмы. Такімі цэнтрамі служаць ужо вядомыя пункты P і Q_0 – імгненныя цэнтры адпаведна вярчальнага і дацэнтрабежнага паскарэнняў. Абодва яны пры любых параметрах паверхняў цела і качэння знаходзяцца на прамой, якая вызначаецца адрэзкам CP (рыс. 6). Размеркаванне інтэнсіўнасці сіл інерцыі адносна цэнтра Q_0 пры $\varepsilon = 0$ разглядалася вышэй. Пункт P заўсёды супадае з імгненным цэнтрам скорасцей. Адносна яго вярчальныя паскарэнні размяркоўваюцца таксама, як і скорасці. Такім чынам, па метаду двух цэнтраў паскарэнне любога пункта M знаходзіцца як геаметрычная сума дацэнтрабежнага і вярчальнага паскарэнняў:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\,дц} + \vec{a}_M^{\,вр}, \tag{4}$$

дзе $a_M^{дц} = \omega^2 M\, Q_0$, $a_M^{вр} = \varepsilon \cdot MP$.

Адпаведна формуле (5.1) вызначаецца і інтэнсіўнасць поля сіл інерцыі:

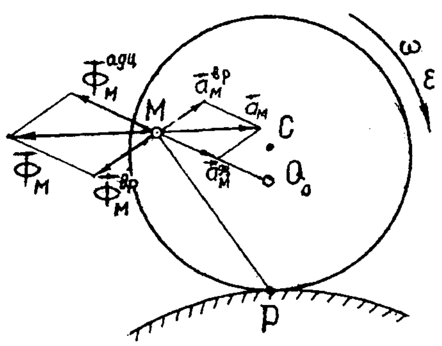
$$\vec{\Phi}_{\mathrm{M}} = \vec{\Phi}_{\mathrm{M}}^{\,\text{адц}} + \vec{\Phi}_{\mathrm{M}}^{\,\text{вр}}. \tag{5.2}$$

У формуле (5) адцэнтрабежны і вярчальны складнікі роўны: $\Phi_{\mathrm{M}}^{\text{адц}} = m' a_M^{дц}$, $\Phi_{\mathrm{M}}^{\text{вр}} = m' a_M^{вр}$. Вектары, якія ўваходзяць у формулы (4), (5), паказаны на рыс. 6. Як відаць з формулы (5), *інтэнсіўнасць поля сіл інерцыі ў выпадку нераўнамернага качэння знаходзіцца па метаду суперпазіцыі двух цэнтральных палёў: поля адцэнтрабежных сіл інерцыі з цэнтрам у пункце Q_0 і поля вярчальных сіл інерцыі с цэнтрам у пункце P.* Структура адцэнтрабежных палёў разгледжана ў папярэдніх прыватных выпадках. Поле вярчальных сіл інерцыі ствараецца вуглавым паскарэннем ε і мае структуру, адваротную да поля вярчальных паскарэнняў (рыс. 7). Эквісілавыя лініі абазначаны літарай Φ_i^l. Найбольшага значэння інтэнсіўнасць поля вярчальных сіл інерцыі дасягае ў пункце A: $\Phi_A^{вр} = 2m'\varepsilon r$. Пры нераўнамерным качэнні галоўны вектар сіл інерцыі роўны:

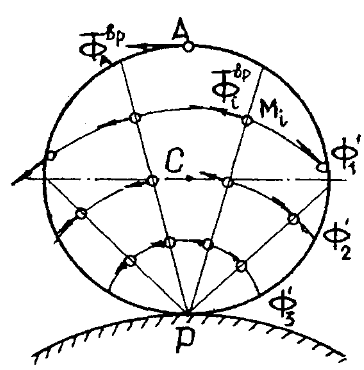
$$\vec{\Phi}_C = \vec{\Phi}_C^{адц} + \vec{\Phi}_C^{вр},$$

дзе $\Phi_C^{адц} = ma_C^{оц}$, $\Phi_C^{вр} = ma_C^{вр}$, $a_C^{оц} = \omega^2 \cdot CQ_0$, $a_C^{вр} = \varepsilon \cdot CP$. Вектары $\vec{\Phi}_C^{вр}$ і $\vec{\Phi}_C^{адц}$ узаемна перпендыкулярны. Галоўны момант вярчальных сіл інерцыі адносна пункта P ва ўсіх прыватных выпадках знаходзіцца па формуле:

$$M_P(\vec{\Phi}_i^{вр}) = \frac{3}{2} m r^2 \varepsilon.$$



Рыс.6



Рыс. 7

Заключэнне. Прывядзем асноўныя рэзультаты аналізу палёў сіл інерцыі.

1. Пры раўнамерным качэнні цыліндра па плоскасці, як і ў выпадку раўнамернага вярчальнага руху вакол цэнтральнай восі, утвараецца восесіметрычнае поле адцэнтрабежных сіл з абмежаваным значэннем яго максімальнай інтэнсіўнасці. Галоўны вектар і галоўны момант сіл інерцыі роўны нулю. У дыяметральным сячэнні цыліндра дзейнічае сіла $\Phi_C = \frac{2}{3}\rho l r^3 \omega^2$, якая імкнецца яго раскалоць.

2. Пры раўнамерным качэнні цыліндра па выпуклай паверхні ствараецца невосесіметрычнае поле адцэнтрабежных сіл інерцыі, максімальная інтэнсіўнасць якога ў два разы большая, чым у выпадку раўнамернага вярчальнага руху. Галоўны вектар сіл інерцыі накіраваны ў бок знешняй нармалі да траекторыі цэнтра мас цыліндра і знаходзіцца па формуле: $\Phi_C = \alpha m r \omega^2$, дзе пры $r = const$ $0 < \alpha < 1$. Галоўны момант роўны нулю.

3. У выпадку раўнамернага качэння цыліндра па ўвагнутай паверхні інтэнсіўнасць цэнтральнага поля сіл інерцыі пры набліжэнні цэнтра крывізны паверхні качэння да восі цыліндра неабмежавана узрастае (пры $\omega = const$). Гэтак жа змняецца і галоўны вектар Φ_C.

4. Пры нераўнамерным качэнні цыліндра для даследавання палёў сіл інерцыі мэта-згодна прымяняць метад двух цэнтраў: цэнтра адцэнтрабежных сіл Q_0 і цэнтра вярчальных сіл P. Тады інтэнсіўнасць поля сіл інерцыі знаходзіцца шляхам суперпазіцыі двух цэнтральных палёў.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика изучения кинематических характеристик качения колеса / С. И. Русан // Теоретическая и прикладная механика. Межведомственный сборник научно-методических статей. – 2004. – № 17. – С. 174 – 178.