Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

Матвеева Л.Д.   Рудый А.Н.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. КУРС ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОТЕЙ. 1 СЕМЕСТР.

Минск   2013

УДК 519.85 (075.8)

ББК 18.87я7

М 54

Авторы: Л.Д. Матвеева, А.Н. Рудый

Рецензент:

И.Н.Катковская

Настоящее издание включает в себя задания по темам «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия».

По всем темам приводятся примеры решения типовых задач.

Издание содержит список рекомендуемой литературы.

Задания и методические указания предназначены для студентов 1 курса энергетического факультета БНТУ. Они могут быть также полезны преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail:…
http://www...
Регистракционный № БНТУ/ЭФ41-48.2013

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Матрицы. Операции над матрицами.

Определение 1. Матрицей размерности $m\times n$ называется прямоугольная таблица из $m\cdot n$ чисел, записанных в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n. \qquad (1)$$

Если $m=n$, то матрица называется квадратной порядка n.

Замечание. Первый индекс в обозначении элемента – номер строки, второй – номер столбца.

Определение 2. Пусть $A=(a_{ij}),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ и $B=(b_{ij}),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ две матрицы, размерности $m\times n$. Суммой матриц $A+B$ будем называть матрицу вида $A+B=(a_{ij}+b_{ij}),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ (складываются элементы, стоящие на одинаковых местах).

Произведением матрицы A на число c будем называть матрицу $c\cdot A=(c\cdot a_{ij}),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ (каждый элемент матрицы A умножается на число c).

Пример 1.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A+B,\ 3A$.

Решение. $A+B=\begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 & 3+5 \\ 4+3 & 1+0 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3 \\ 3\cdot4 & 3\cdot1 & 3\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Определение 3. Пусть A – матрица размерности $m\times n$ вида (1). Транспонированной матрицей к матрице A будем называть матрицу A' размерности $n\times m$ вида

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Пример 2.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A'.

Решение. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число.

Для любых матриц *A, B, C* размерности $m \times n$ и любых действительных чисел λ, μ выполняются следующие 8 свойств:

1. $A+B=B+A$ – коммутативность сложения.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативность сложения.
3. Существование нулевого элемента 0, обладающего свойством: $0+A=A+0=A$. В качестве 0 берется матрица, все элементы которой равны 0.
4. Существование противоположного элемента: $\forall$ матрицы *A* $\exists$ матрица $-A$ такая, что $A+(-A)=(-A)+A=0$. В качестве $-A$ берется матрица, элементы которой противоположны по знаку соответствующим элементам матрицы *A*.
5. $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$.
7. $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda(\mu \cdot A)$.
8. $1 \cdot A = A$.

Определение 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nk} \end{pmatrix}$ две матрицы размерности $m \times n$ и $n \times k$ (число столбцов 1-ой матрицы равно числу строк 2-ой). Произведением матриц *A* и *B* называется матрица $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & ... & c_{2k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & ... & c_{mk} \end{pmatrix}$ размерности $m \times k$, элементы которой находятся по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj},\ i=1, ..., m,\ j=1, ..., k. \qquad (3)$$

Пример 3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

Решение. По формуле (3):

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1)+4\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 2+4\cdot 1+(-1)\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 3 & 16 \\ 13 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Замечание. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Определители матриц.

Определение 5. Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размерности 2×2. Определителем(детерминантом) матрицы *A* будем называть число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Пусть *A* – квадратная матрица размерности 3×3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем(детерминантом) матрицы *A* будем называть число $\det A=$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} \quad (5)$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot 5-3\cdot 4=-7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot 6+2\cdot 2\cdot 2+(-1)\cdot 5\cdot 4-2\cdot 3\cdot 4-2\cdot 5\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 6=-16$$

Свойства определителей.

1. Если какую-либо строку (столбец) матрицы *A* умножить на число *c*, то и определитель умножится на число *c*, то есть определитель полученной матрицы A_1 будет равен : $\det A_1=c\cdot\det A$.

2. Если переставить местами любые две строки (столбца) матрицы, то определитель поменяет знак, то есть определитель полученной матрицы A_1 будет равен: $\det A_1=-\det A$.

3. Если к какой-нибудь строке (столбцу) матрицы А прибавить любую другую строку (столбец) матрицы А умноженной на любое число с, то определитель не изменится, то есть определитель полученной матрицы A_1 будет равен: $\det A_1=\det A$.

4. $\det(A\cdot B)=detA\cdot\det B$.

5. Определитель единичной матрицы *E* равен 1. (единичная матрица – это матрица, у которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0).

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Замечание. Из свойств 1-5 следуют другие полезные свойства.

Следствие 1. Если строка (столбец) матрицы равны 0, то ее определитель равен 0.

Следствие 2. Если у матрицы две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.

Пример 5. Найдем определитель из примера 4, предварительно преобразовав матрицу

1. Ко второй строке матрицы прибавим первую, и к третьей строке матрицы прибавим первую, умноженную на –2, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Переставим местами вторую и третью строки, затем к третьей прибавим вторую, умноженную на –5, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -16.$$

Определение 6. Пусть *A* квадратная матрица порядка n и a_{ij} – фиксированный элемент в этой матрице. Мысленно вычеркнем i-ю строку и j-й столбец из матрицы А и обозначим определитель матрицы, составленной из оставшихся элементов, через M_{ij}. Тогда $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением к элементу a_{ij}.

Теорема 1. Пусть А – квадратная матрица порядка n, $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \ i = 1, \ldots, n \qquad (6)$$

Формула (6) называется формулой разложения определителя по элементам i-й строки.

Замечание. Аналогичная формула верна для любого столбца.

Формула (6) сводит вычисления определителя n-ого порядка к вычислению определителя n–1 порядка.

Пример 6. Вычислим определитель из примера 4. разложенного по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 8 - 2\cdot(-10) + 4\cdot(-11) = 8 + 20 - 44 = -16.$$

Разложим определитель по элементам 2-ого столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\cdot(-6-4)+3\cdot(-2)-5\cdot(2+4)=20-6-30=-16.$$

Методы вычисления определителя n- ого порядка.

1. Разложение по элементам строки (столбца).

В этом случае используют теорему 1 и сводят вычисление определителя порядка n к вычислению определителя порядка $n-1$ (см. пример 6).

2. Приведение определителя к треугольному виду.

С помощью свойств определителя приводят матрицу к треугольному виду. Определитель полученной матрицы равен произведению элементов, стоящих на диагонали (следует из теоремы 1).

Пример 7. Вычислить определитель порядка n: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$.

1. Прибавим к 1-ой строке все остальные строки, получим:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n-2 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}\cdot(n-2).$$

2. Вычтем 1-ую строку из всех остальных строк, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}\cdot(n-2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{vmatrix}\cdot(n-2)=(n-2)\cdot(-2^{n-1}).$$

Упражнения к § 1.

Упражнение 1.1. Найти матрицу $C=2A-B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.2. Даны следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 7 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 4 & 0\\ 3 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) все произведения матриц, которые имеют смысл;
б) соответствующие транспонированные матрицы;
в) матрицу $2G-G^2$; г) матрицу C^3.

Упражнение 1.3 Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти A^2, A^3, A^n.

Упражнение 1.4 Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Найти A^2, A^3, A^n.

Упражнение 1.5. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$. Найти A^2, A^3, A^n.

Упражнение 1.6. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Найти 1) (AB)C; 2) A(BC) и проверить свойство ассоциативности умножения (AB)C= A(BC); 3) найти AB и BA и проверить свойство: $AB \neq BA$.

Упражнение 1.7 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ из примера 3.

а) Переставить местами первую и вторую строки матрицы А и умножить полученную матрицу на матрицу В. Результат сравнить с AB.

в) Переставить местами первый и второй столбцы матрицы В и умножить А на полученную матрицу. Результат сравнить с AB.

Упражнение 1.8. Найти матрицы X и Y из системы $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.9 Матрица X имеет вид $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и удовлетворяет уравнению $X' \cdot X = E$, где E- единичная матрица. Найти X.

Упражнение 1.10. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ -2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{vmatrix}$.

Упражнение 1.11. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

а) по формуле (5);

б) разложением по первой строке;

в) разложением по второму столбцу;

г) переставить местами первую и вторую строки матрицы и проверить выполнение свойства 2 определителей;

д) прибавить ко второй строке матрицы - первую и проверить выполнение свойства 3 определителей;

е) вычесть из третьей строки матрицы сумму первых двух и проверить выполнение свойства 3 определителей;

ж) с помощью свойства 3 привести матрицу к треугольному виду и проверить выполнение свойства 6 определителей;

Упражнение 1.12. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ используя п.а)- ж) упр.1.11.

Упражнение 1.13. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ -x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 4\sin x & -1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

Упражнение 1.14. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > -1$; б) $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 5$.

Упражнение 1.15. Не раскрывая определитель, докажите, что

$$\begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнение 1.16. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти следующие миноры и алгебраические дополнения этой матрицы: M_{23}, M_{14}, A_{32}, A_{43}, A_{24} .

Упражнение 1.17. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20536 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Упражнение 1.18 Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \end{vmatrix}$.

Упражнение 1.19 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.Найти 1) AB , $\det(AB)$;2) $\det(A)$, $\det(B)$ и проверить свойство 4 определителей.

Упражнение 1.20 Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

доказать, что ее определитель делится на 13.

Ответы на упражнения к § 1.

1.1. $C=\begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 & 3 \\ 14 & -2 & 5 & 0 \\ -5 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. а) $A\cdot F=\begin{pmatrix} 23 & 41 \\ 11 & 16 \\ 6 & 36 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 8 & 14 & 6 & -8 & 1 \\ -5 & 32 & -7 & 31 & 9 \\ 13 & 90 & 5 & 29 & 17 \\ 9 & -6 & 1 & -13 & 17 \end{pmatrix}$,

$B\cdot D=\begin{pmatrix} -11 & -8 & 17 \\ 37 & -1 & 3 \\ 30 & -23 & 50 \\ 9 & -5 & 9 \end{pmatrix}$, $C\cdot E=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 19 & -16 \\ 5 & 31 \end{pmatrix}$,

$G\cdot E=\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 5 & 31 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}$, $C\cdot G=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 10 & -18 & 27 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$D\cdot E=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 7 & 35 \\ 9 & 60 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}$, $D\cdot C=\begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 11 & -4 & 9 \\ 2 & 13 & 10 \\ 16 & -9 & 7 \end{pmatrix}$,

$D\cdot G=\begin{pmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 4 & 3 & 9 \\ 8 & 20 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $G\cdot C=\begin{pmatrix} -9 & 14 & 16 \\ 9 & -3 & 6 \\ 9 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

б) $A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & -3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$,

$C^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $D^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$E^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $F^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $2G - G^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

г) $C^3 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 70 \\ 49 & -16 & 119 \\ 21 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

1.3. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4. $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 27 & 27 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-2} \cdot 6 + (n-2) \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$.

1.6. 1) $(AB)C = \begin{pmatrix} 15 & 39 \\ 16 & 8 \\ 51 & 114 \end{pmatrix}$, 2) $A(BC) = \begin{pmatrix} 15 & 39 \\ 16 & 8 \\ 51 & 114 \end{pmatrix}$,

3) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 11 & 6 & 11 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 11 & 1 \\ 1 & 13 & 7 \end{pmatrix}$.

1.7. a) $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 4 \\ 10 & 3 & 16 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 10 & 16 \\ 6 & 13 & 4 \end{pmatrix}$.

1.8. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{8}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{17}{13} \end{pmatrix}$.

1.9. $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.10. а) -8; б) -27; в) 0; г) 1.

1.13. *а*) $x_1 = 5;\ x_2 = -2$; *б*) $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n\pi}{2}$; *в*) $x = -4$; *г*) $x_1 = 1,\ x_2 = -2$.

1.14. а) $x \in (-\infty;\ 2) \cup (4; +\infty)$; б) $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

1.16. $M_{23} = -21,\ M_{14} = -1,\ A_{32} = 80,\ A_{43} = -13,\ A_{24} = -21$.

1.17. а) 2; б) -3; в) 0,г) -44.

§ 2. Обратная матрица.

Определение 1. Пусть *A* квадратная матрица размерностью $n \times n$. Матрица *B* называется обратной матрицей к матрице А, если

$$A \cdot B = B \cdot A = E, \qquad (1)$$

где Е – единичная матрица.

При этом матрица *B* обозначается как A^{-1} и тогда равенство (1) переписывается в следующем виде:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \qquad (2)$$

Теорема 1. Если обратная матрица существует. То она единственна.

Доказательство. От противного. Предположим, что для матрицы А существует две неравные друг другу матрицы В и С, такие, что

$A \cdot B = B \cdot A = E$ и $A \cdot C = C \cdot A = E$.

Тогда рассмотрим равенства

$C \cdot (A \cdot B) = C \cdot E = C$, и

$(C \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B$.

Так как левые части равенств равны, то равны и правые, то есть С=В – противоречие, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Для матрицы А существует обратная матрица A^{-1} тогда и только тогда, когда определитель матрицы А не равен 0.

Доказательство.

1. Необходимость. Докажем, что если для матрицы А существует обратная матрица A^{-1}, то $\det A \neq 0$.

По свойству (2): $A \cdot A^{-1} = E$. Тогда $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$, $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, поэтому $\det A \neq 0$, ч.т.д.

2. Достаточность. Пусть определитель А не равен 0. Докажем, что для матрицы А существует обратная.

Рассмотрим матрицу из алгебраических дополнений к элементам матрицы А, составленную так, что алгебраические дополнения к строкам пишутся в соответствующие столбцы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Непосредственно проверяем, что для этой матрицы выполняется равенство (2):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}\det A & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=E.$$

Действительно, по формуле (3) §1 элемент c_{11} равен

$$c_{11}=\frac{1}{\det A}(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n})=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=1,$$

элемент c_{12} равен

$$c_{12}=\frac{1}{\det A}(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\dots+a_{1n}A_{2n})=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

и т.д. Теорема доказана.

Пример 1.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Проверить, что для матрицы существует обратная и найти ее.

Решение. $\det A=-16\neq 0$ (см. пример 4 §1), поэтому по теореме 2 матрица A^{-1} существует.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}=8,\ A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 6\end{vmatrix}=8,\ A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=10,\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-11,\ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-5.$$

Тогда по формуле (3):

$$A^{-1}=-\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}8 & 8 & -8\\ 10 & -2 & -6\\ -11 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Определение 2. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

называется системой m линейных уравнений с n неизвестными. Матрица А, составленная из коэффициентов при неизвестных, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

называется матрицей системы, столбец $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбцом свободных членов.

При этом систему можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Совокупность чисел $(x_1^0,\ x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - называется решением системы (4), если при подстановке их в систему получаются верные равенства.

Если система (4) имеет хотя бы одно решение, она называется совместной, в противном случае – несовместной.

Теорема 3. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где А – матрица системы. Предположим, что для матрицы А существует обратная матрица. Тогда система (6) имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (6) на A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}\Longrightarrow E\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}, \text{ поэтому } \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание. Решение системы по формуле (7) называется матричным методом решения системы. Из формул (7) и (3) следует:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{m1}&A_{m2}&A_{m3}&\dots&A_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix},$$

тогда $x_1=\dfrac{1}{\det A}\cdot\left(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{m1}\right)=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\dots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\b_n&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, где

через Δ обозначен определитель матрицы А системы, а Δ_1 – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой первого столбца столбцом свободных членов. Аналогично, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой второго столбца столбцом свободных членов и т.д.

Полученные формулы называются формулами Крамера.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=3\\-x_1+3x_2+2x_3=3\\2x_1+5x_2+6x_3=4\end{cases}$

1) матричным способом; 2) по формулам Крамера.

Решение. 1) Матричный способ. Перепишем систему в матричном виде:

$\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&2\\2&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&2\\2&5&6\end{pmatrix}$, $\Delta=\det A=-16\neq 0$ (см. пример 4 §1), поэтому обратная матрица существует и решение системы единственно.

$A^{-1}=-\dfrac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}8&8&-8\\10&-2&-6\\-11&-1&5\end{pmatrix}$, (см пример 1), тогда по формуле (7)

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot\begin{pmatrix}8&8&-8\\10&-2&-6\\-11&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot\begin{pmatrix}16\\0\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \text{ то есть}$$

$x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1.$

2) Формулы Крамера. $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\left(-\dfrac{1}{16}\right)\begin{vmatrix}3&2&4\\3&3&2\\4&5&6\end{vmatrix}=\dfrac{16}{-16}=-1.$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\left(-\frac{1}{16}\right)\begin{vmatrix}1&3&4\\-1&3&2\\2&4&6\end{vmatrix}=\frac{0}{-16}=0.$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\left(-\frac{1}{16}\right)\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&3&3\\2&5&4\end{vmatrix}=\frac{12+12-15-18-15+8}{-16}=\frac{-16}{-16}=1.$$

Замечание. Если рассмотреть матричное уравнение

$$A\cdot X=B, \tag{8}$$

где A и B данные матрицы, а X – неизвестная матрица, то, рассуждая аналогично теореме 3, получим формулу:

$$X=A^{-1}\cdot B. \tag{9}$$

Аналогично, для матричного уравнения

$$X\cdot A=B, \tag{10}$$

получим формулу:

$$X=B\cdot A^{-1}. \tag{11}$$

Пример 3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&2\\2&5&6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}8&16\\4&8\\4&4\end{pmatrix}.$

Решение. $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&2\\2&5&6\end{pmatrix}, A^{-1}=-\dfrac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}8&8&-8\\10&-2&-6\\-11&-1&5\end{pmatrix}$, (см. пример 1), тогда по формуле (9):

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}8&8&-8\\10&-2&-6\\-11&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8&16\\4&8\\4&4\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}16&40\\12&30\\-18&-41\end{pmatrix}.$$

Упражнения к § 2.

Упражнение 2.1. Найдите обратные матрицы для заданных матриц:

a) $\begin{pmatrix}3&-5\\7&-9\end{pmatrix}$: b) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&3&-2\\-5&-4&-1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1&4&-5\\2&3&-4\\1&-2&-1\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}2&-1&-3\\1&3&2\\3&2&2\end{pmatrix}$.

Упражнение 2.2. Выяснить при каких значениях α существует матрица, обратная данной.

a) $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$: b) $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 8 & \alpha \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.3 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$и проверить свойства : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Упражнение 2.4 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1}, A', $(A')^{-1}$и проверить свойство : $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Упражнение 2.5. Решить систему уравнений по правилу Крамера.

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 11. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = 2. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 = -3, \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$

Упражнение 2.6. Решить матричное уравнение:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 11 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; f) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.7 Квадратная матрица А удовлетворяет уравнению $A^2 + 4A = 5E$. Доказать, что для А существует обратная матрица и найти ее.

Ответы на упражнения § 2.

2.1. a) $\begin{pmatrix} -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{18} & \frac{6}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{14}{18} & -\frac{6}{18} & -\frac{2}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{6}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{16} & \frac{14}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{2}{16} & \frac{4}{16} & -\frac{6}{16} \\ -\frac{7}{16} & \frac{6}{16} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{7}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{13}{21} & -\frac{7}{21} \\ -\frac{7}{21} & -\frac{7}{21} & \frac{7}{21} \end{pmatrix}$.

2.2. a) $\alpha \neq 1$; b) $\alpha \neq \pm 4$; c) $\alpha \in R$; d) $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$; e) $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq \pm 1$; f) $\alpha \neq 1$.

2.5. a) $\left(-\frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{3}{5}\right)$; b) $\left(\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$; c) $\left(\frac{8}{7};\ -\frac{1}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$; d) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ 1\right)$.

2.6. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

§ 3. Ранг матрицы.

Определение 1. Пусть $A=(a_{ij}),\ i=1,\ ...,\ m,\ \ j=1,\ ...,\ n$ произвольная матрица размерности $m\times n$. Выберем в матрице А k строк $i_1, i_2, ..., i_k$ и k столбцов $j_1,\ j_2, ...,\ j_k$ и обозначим через

$M\begin{matrix} i_1, i_2, ..., i_k \\ j_1,\ j_2, ...,\ j_k \end{matrix}$ определитель матрицы размерности $k\times k$, составленный из элементов матрицы А, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов.

$M\begin{matrix} i_1, i_2, ..., i_k \\ j_1,\ j_2, ...,\ j_k \end{matrix}$ называется минором порядка k.

Пример 1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & -4 & 13 \end{pmatrix}$. Найдем миноры M_1^1, M_3^2, M_{12}^{12}, M_{34}^{23}.

Решение. M_1^1=1, M_3^2=-2, $M_{12}^{12}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5$, $M_{34}^{23}=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-8$.

Определение 2. Рангом матрицы называется наибольший из порядков миноров, отличных от нуля. Ранг будем обозначать через $\operatorname{rank} A$ или rA. Не равный нулю минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором.

Замечание. Не обязательно перебирать все миноры матрицы, чтобы найти ее ранг. Оказывается, для этого достаточно рассматривать вложенные друг в друга миноры. На этом основывается, так называемый, метод окаймляющих миноров.

Для нахождения ранга матрицы проводят настолько долго, насколько это возможно следующие операции.

1. Рассматривают миноры 1-ого порядка. Если все они равны 0, то $\operatorname{rank} A=0$ и конец алгоритма.

Если хотя бы один из них не равен 0, то $\operatorname{rank} A\ge 1$ и переходят на п.2.

2. Рассматривают все миноры 2-ого порядка, окаймляющие фиксированный ненулевой минор 1-ого порядка. Если все они равны 0, то $\operatorname{rank} A=1$ и конец алгоритма.

Если хотя бы один из них не равен 0, то $\operatorname{rank} A\ge 2$ и переходят на рассмотрение миноров 3-ого порядка, окаймляющих фиксированный ненулевой минор 2-ого порядка, и т.д., пока есть что окаймлять.

Пример 2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти ранг А методом окаймляющих миноров.

1. $M_1^1\ne 0$, поэтому $\operatorname{rank} A\ge 1$. Рассмотрим минор M_{12}^{12}, окаймляющий M_1^1.

2. $M_{12}^{12}=5\ne 0$, поэтому $\operatorname{rank} A\ge 2$.

3. Минор M_{12}^{12} окаймляют два минора третьего порядка M_{123}^{123} и M_{124}^{123}.

$$M_{123}^{123}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}=-12-25+40-3=0,$$

$$M_{124}^{123}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=8-4-15+24+2-10=5\neq 0, \text{ поэтому } \operatorname{rank} A=3.$$

Определение 3. Элементарными преобразованиями матрицы называются:
1) перестановка любых 2-х строк (столбцов) матрицы;
2) умножение любой строки (столбца) матрицы на отличное от нуля число;
3) прибавление к любой строке (столбцу) матрицы любой другой строки (столбца) матрицы, умноженных на произвольное число.

Теорема 1. Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга. С помощью элементарных преобразований любую матрицу А можно привести к трапециевидному виду:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1k} & b_{1k+1} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2k} & b_{2k+1} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \ldots & b_{3k} & b_{3k+1} & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{kk} & b_{kk+1} & \ldots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Где все строки, начиная с k+1 – ой равны 0, а элементы стоящие на диагонали $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots, b_{kk}$ не равны 0. И тогда ранг матрицы равен k.

Пример 3. С помощью элементарных преобразований найти ранг матрицы А и базисный минор, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 8 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 11 & 0 & 10 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 8 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 11 & 0 & 10 & 6 & 10 \end{pmatrix} \overset{\sim}{1-й\ шаг} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 8 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 10 & 11 & 10 \end{pmatrix} \overset{\sim}{2-й\ шаг}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -8 & -1 & -14 \end{pmatrix} \underset{3-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{4-й\ шаг}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{5-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1- й шаг. Меняем местами 1-й и 4-й столбцы.

2-й шаг. Ко второй, третьей и четвертой строкам прибавляем первую, умноженную соответственно на -4, -2, -6.

3-й шаг. К третьей и четвертой строкам прибавляем вторую, умноженную соответственно на -1, -2.

4-й шаг. Меняем местами 3-й и 4-й столбцы.

5-й шаг. К четвертому столбцу прибавляем третий, умноженный на -1.

В результате получаем матрицу трапециевидного вида из теоремы 1. Тогда $\operatorname{rank} A = 3$, базисный минор в первоначальной матрице: M_{124}^{123}, так как в результате двух перестановок столбцов первый столбец оказался на третьем месте, а четвертый – на первом.

Упражнения к § 3.

Упражнение 3.1. Найти миноры $M_2^2, M_4^3, M_3^4, M_{23}^{12}, M_{12}^{23}$, $M_{14}^{34}, M_{234}^{134}, M_{135}^{124}, M_{245}^{234}$ в указанных матрицах:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

с) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

Ответы: а) $M_2^2 = 3, M_4^3 = 0, M_3^4 = 6, M_{23}^{12} = -9, M_{12}^{23} = 8$, $M_{14}^{34} = -1, M_{234}^{134} = 19, M_{135}^{124} = 69, M_{245}^{234} = 27$.

в) $M_2^2 = -1, M_4^3 = -2, M_3^4 = -1, M_{23}^{12} = -2, M_{12}^{23} = 3$, $M_{14}^{34} = 8, M_{234}^{134} = -4, M_{135}^{124} = -42, M_{245}^{234} = 27$.

c) $M_2^2 = 2$, $M_4^3 = 0$, $M_3^4 = 0$, $M_{23}^{12} = -1$, $M_{12}^{23} = 9$,

$M_{14}^{34} = 0$, $M_{234}^{134} = -8$, $M_{135}^{124} = -8$, $M_{245}^{234} = -94$.

Упражнение 3.2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 8 & -9 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & -10 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & 7 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ -6 & -10 & 14 & 2 & -16 \end{pmatrix}$.

Ответы: а) 3; в) 3; с) 2.

Упражнение 3.3. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 11 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответы: а) 4; в) 4; с) 4; d) 3.

Упражнение 3.4. Найти ранг матрицы в зависимости от значений параметра α: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & \alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 1 & \alpha^2 - 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha - 2 & 2 - \alpha \\ 1 & 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$. При каких значениях α матрица имеет обратную?

§ 4. Решение произвольных систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

или в матричном виде $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, (2)

где A – матрица системы. При этом матрица $\tilde{A}$ вида $\tilde{A} = \left(A \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{matrix} \right)$, которая получается, если к матрице A справа добавить столбец свободных членов, называется расширенной матрицей системы.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли).

Для того, чтобы система уравнений (1) имела решение необходимо и достаточно, чтобы $rank\, A = rank\, \tilde{A}$.

Докажем необходимость. Дано: система имеет решение. Докажем, что $rank\, A = rank\, \tilde{A}$. Пусть $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ – решение системы. Тогда при подстановке этих чисел в систему получим верные равенства. Запишем эти равенства в векторном виде:

$$x_1^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Рассмотрим матрицу $\tilde{A}$. Вычтем из последнего столбца первый, умноженный на $x_1^{(0)}$, второй – умноженный на $x_2^{(0)}$, …, n-й – умноженный на $x_n^{(0)}$. Из (3) следует, что в результате такого преобразования получим:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \,\vdots\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Поэтому $rank\, A = rank\, \tilde{A}$.

Замечание. Теорема 1 дает конкретный алгоритм решения произвольных систем:

1. Находят $rank\,A$, $rank\,\tilde{A}$. Если они не равны, то система не имеет решений.

2. Если они равны, рассматриваем базисный минор матрицы А. Все уравнения, не входящие в базисный минор отбрасывают. Неизвестные в оставшихся уравнениях, не входящие в базисный минор, переносят направо и полученную систему решают по правилам Крамера или матричным методом.

При этом $rank\,A$, $rank\,\tilde{A}$ можно находить одновременно методом элементарных преобразований, если последний столбец матрицы $\tilde{A}$ не прибавлять к другим столбцам и не переставлять его с другими.

Пример 1. Решить систему: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 8 \\ 7x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 16 \end{cases}$.

Решение. Найдем $rank\,A$, $rank\,\tilde{A}$.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 11 & 8 & 16 \end{array}\right) \overset{1-шаг}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 8 & 16 \end{array}\right) \overset{2-шаг}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{3-шаг}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

1-й шаг. Переставляем местами 1-й и 2-й столбцы матрицы.

2-й шаг. Ко второй и третьей строке прибавляем первую, умноженную на -2 и -4 соответственно.

3-й шаг. От третьей строки отнимаем вторую. $rank\,\tilde{A} = 2 = rank\,A \Rightarrow$ система совместна.

Базисный минор находится в 1, 2 столбце и 1, 2 строке. Отбрасываем 3-е уравнение. Переменные x_3 и x_4 в оставшихся уравнениях переносим направо (x_3 и x_4 - свободные неизвестные).

В результате получим систему: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 - 3x_3 - 2x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 - 5x_3 - 4x_4 \end{cases}$. Решим ее по Правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 - 3x_3 - 2x_4 & 1 \\ 8 - 5x_3 - 4x_4 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6x_3 - 4x_4 - 8 + 5x_3 + 4x_4 = -x_3.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 - 3x_3 - 2x_4 \\ 3 & 8 - 5x_3 - 4x_4 \end{vmatrix} = 16 - 10x_3 - 8x_4 - 12 + 9x_3 + 6x_4 = 4 - x_3 - 2x_4 .$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -x_3 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$. Таким образом: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ 4 - c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, где $c_1, c_2 \in R$.

Метод Гаусса.

Если при нахождении ранга матриц $rank\,A$, $rank\,\tilde{A}$ использовать только элементарные преобразования строк или перестановку столбцов, не переставляя столбец свободных членов с другими, то нет необходимости возвращаться к первичной матрице. Можно решать систему вида (1) §3. На этом основывается метод Гаусса.

Алгоритм метода Гаусса.

1. Прямой ход метода Гаусса. Элементарными преобразованиями матрица A приводится к виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1k} & a'_{1k+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2k} & a'_{2k+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & & \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{kk} & a'_{kk+1} & \dots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{k+1} \\ \dots & & \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix},$$

где $a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \dots, a'_{kk} \neq 0$. Если хотя бы один из элементов $b'_{k+1}, \dots, b'_m \neq 0$, то система не имеет решений. Если же $b'_{k+1} = \dots = b'_m = 0$, то система имеет решение и начинают обратный ход.

2. Обратный ход метода Гаусса.

Рассмотрим последнее k-е уравнение и из него выражаем x_k через все остальные неизвестные. Подставляем найденные x_k во все остальные уравнения и из (k-1) – ого уравнения выражают переменную x_{k-1} через остальные и т.д., пока не дойдем до первого уравнения.

Пример 2. Решить систему по методу Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Прямой ход метода Гаусса:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{1\ шаг}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

$$2\ шаг \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). rank\,\tilde{A} = 2 = rank\,A \Rightarrow \text{система совместна.}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 5x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 10 \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{5}(10 + 2x_3 + 3x_4) \end{cases}$$

Из первого уравнения

$$x_1 = 2x_2 - x_4 - 3 = \frac{2}{5}(10 + 2x_3 + 3x_4) - x_4 - 3 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4.$$

Пусть $x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$, тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, где $c_1, c_2 \in R$.

Упражнения к § 4.

Упражнение 4.1. Исследовать данную систему и в случае совместности решить ее.

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 13x_4 = -33. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

Ответы: a) $\left\{ \dfrac{4 - 8c_1 + c_2}{12}, c_1, c_2, -\dfrac{3}{4}c_2 \middle| c_1, c_2 \in R \right\}$;

b) $\left\{ \dfrac{1 - c_1}{4}, c_1, \dfrac{3 - 7c_1 - 4c_2}{4}, c_2 \middle| c_1, c_2 \in R \right\}$;

c) $\{8 - 5c, c, 5 - 3c \mid c \in R\}$;

d) $\{-1 - c_1 - 2c_2, c_1, c_2, -2 \mid c_1, c_2 \in R\}$;

e) $\{1-c,\ 2+c,\ c \mid c \in R\}$

Упражнение 4.2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

a) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+\quad 3x_4+5x_5=8, \\ 3x_2-x_3+2x_4+2x_5=3, \\ x_1+2x_2+\quad 2x_4+3x_5=5, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+5x_4+9x_5=16, \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=6. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ x_2+\quad x_4+x_5=2, \\ 2x_1+4x_2+x_3+5x_4+7x_5=13, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+8x_5=6. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1+3x_2+\quad 3x_4+4x_5=7, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=2, \\ x_1+4x_2+\quad 4x_4+5x_5=9, \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4+4x_5=8. \end{cases}$

Ответы: a) $\{1-c_2, 2-c_1-c_2, 3-c_1-c_2, c_1, c_2 \mid c_1, c_2 \in R\}$;

b) $\{1-c,\ 4-2c,\ 5-2c,\ c-2,\ c \mid c \in R\}$;

c) $\{1+4c_2, 2-c_1-c_2, 3-c_1-11c_2, c_1, c_2 \mid c_1, c_2 \in R\}$;

d) $\{1-c_2, 2-c_1-c_2, 3-c_1-c_2, c_1, c_2 \mid c_1, c_2 \in R\}$.

Упражнение 4.3. Решить системы в зависимости от значений параметра α:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+7x_2+\alpha x_3=\alpha+7 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+7x_2+\alpha x_3=\alpha^2-13 \end{cases}$.

Упражнение 4.4. Решить систему в зависимости от значений параметров α и β: $\begin{cases} x_1+\alpha x_2+2x_3=4, \\ x_1-3x_2-x_3=0, \\ x_1-8x_2-4x_3=\beta \end{cases}$

§ 5. Линейные векторные пространства.

Определение 1. Произвольное множество V будем называть линейным векторным пространством, если на V определена операция сложения его элементов (векторов), а именно: $\{\vec{u}, \vec{v}\} \to \vec{u}+\vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ и операция умножения вектора на действительное число $\{\alpha, \vec{u}\} \to \alpha\vec{u}, \forall \alpha \in R, \vec{u} \in V$. При этом необходимо, чтобы выполнялись следующие 8 аксиом:

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, коммутативность сложения векторов.
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}), \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ - ассоциативность сложения векторов.
3. Существование нулевого элемента $\vec{0}$:

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}, \ \forall \vec{u} \in V$.

4. Существование противоположного элемента:

$\forall \vec{u} \in V, \ \exists -\vec{u} \in V: \vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$.

5. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{u}, \ \forall \alpha \in R, \vec{u}, \vec{v} \in V$.
6. $(\alpha \cdot \beta)\vec{u}=\alpha \cdot (\beta\vec{u}), \ \forall \alpha, \beta \in R, \vec{u} \in V$.
7. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}, \ \forall \alpha, \beta \in R, \vec{u} \in V$.
8. $1 \cdot \vec{u}=\vec{u}, \ \forall \vec{u} \in V$.

Пример 1. Множество действительных чисел R с обычными операциями сложения и умножения чисел будет линейным векторным пространством (все 8 аксиом выполняются).

Пример 2. Множество $M(m, n)$ всех матриц размерности $m \times n$ с обычными операциями сложения и умножения матрицы на число будет линейным векторным пространством (все 8 аксиом выполняются).

Пример 3. Множество матриц вида:

$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_{12} \in R$ - не будет линейным векторным пространством, так как это множество не замкнуто относительно операции сложения и умножения (сумма двух элементов данного вида не будет элементом данного вида).

Пример 4. Множество матриц вида

$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ будет линейным векторным пространством.

Пример 5. Арифметическое пространство $R^n=\{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in R\}$ будет линейным векторным пространством, если задать операции сложения его элементов $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ и операцию умножения на число α: $\alpha \cdot \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ (все 8 аксиом выполняются).

Определение 2. Векторы $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_m}$ называются линейно-зависимыми, если ∃ такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ не все равные нулю, что

$$\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + ... + \lambda_m \overrightarrow{u_m} = 0. \qquad (1)$$

Если же равенство (1) выполняется только при нулевых значениях λ_i $(\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0)$, то векторы называются линейно-независимыми.

Базисом пространства V называется совокупность векторов $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n} \in V$, если : 1) они линейно-независимы; 2) любой вектор $\vec{u} \in V$ выражается через базис с какими-то координатами:

$$\vec{u} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{v_n}. \qquad (2)$$

При этом числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ в (2) называются координатами вектора $\vec{u}$ в базисе $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$. Число n векторов базиса называется размерностью пространства V, $n = \dim V$.

Пример 6. Для линейного пространства M(2, 2) всех матриц размерности 2×2 (см.пример 2) матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ являются базисом, при этом любая матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть координатами A в данном базисе будут числа $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$.

Теорема 1. Координаты вектора в данном базисе определены однозначно.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\vec{u} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{v_n}$ и $\vec{u} = \beta_1 \overrightarrow{v_1} + \beta_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \beta_n \overrightarrow{v_n}$ - два различных выражения вектора $\vec{u}$ через базис. Тогда $\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \beta_1 \overrightarrow{v_1} + \beta_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \beta_n \overrightarrow{v_n}$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{v_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{v_2} + ... + (\alpha_n - \beta_n)\overrightarrow{v_n} = 0. \qquad (3)$$

Векторы образующие базис, линейно-независимы, поэтому из (3) следует:

$\alpha_1 - \beta_1 = 0; \alpha_2 - \beta_2 = 0; ...; \alpha_n - \beta_n = 0$, то есть $\alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$. Противоречие, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Система векторов

$u_1(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$

$u_2(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$

...

$u_m(a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$

заданных своими координатами в некотором базисе, будет линейно независимой тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленный из координат векторов равна m – числу векторов.

Доказательство. Достаточность. Дано: ранг матрицы равен m. Докажем, что векторы линейно-независимы. От противного. Предположим, что векторы линейно-зависимы. Тогда один из них линейно выражается через остальные. Например $u_m = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}}$ и если от последней строки отнять первую, умноженную на α_1, вторую – умноженную на α_2, ..., $(m-1)$ - ю умноженную α_{m-1}, то получим нулевую строку, то есть ранг < m. Противоречие, ч. т. д.

Пример 7. Даны векторы $\overrightarrow{u_1}(1, 2, -1), \overrightarrow{u_2}(-2, -2, 3), \overrightarrow{u_3}(0, 2, 2)$. Доказать, что они образуют базис в пространстве R^3 и найти в этом базисе координаты вектора $\vec{b}(0, 4, 3)$.

Решение. Применим теорему 2. Найдем ранг матрицы А, составленной из координат векторов: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Координаты векторов выпишем в столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{1-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{2-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{3-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1-й шаг. Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на -2. К третьей строке прибавляем первую.

2-й шаг. Переставляем местами 2-ю и 3-ю строки.

3-й шаг. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на -2.

$rank\, A = 3 \Rightarrow$ векторы линейно-независимы.

Три линейно-независимых вектора трехмерного пространства образуют базис. Найдем координаты вектора $\vec{b}(0, 4, 3)$ в базисе $\overrightarrow{u_1}(1, 2, -1), \overrightarrow{u_2}(-2, -2, 3), \overrightarrow{u_3}(0, 2, 2)$:

$$\vec{b} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + x_3\overrightarrow{u_3}.$$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

или в матричном виде $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, где A – матрица системы.

Теорема 3. Система (4) всегда совместна. Множество решений системы (4) образует линейное пространство.

Доказательство. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ является решением системы, поэтому она совместна. Пусть $(x_1^0, ..., x_n^0), (y_1^0, ..., y_n^0)$ - решения системы, тогда

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ ... \\ y_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим вектор $\begin{pmatrix} x_1^0 + y_1^0 \\ x_2^0 + y_2^0 \\ ... \\ x_n^0 + y_n^0 \end{pmatrix}$, тогда

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 + y_1^0 \\ x_2^0 + y_2^0 \\ ... \\ x_n^0 + y_n^0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ ... \\ y_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, то есть вектор $\begin{pmatrix} x_1^0 + y_1^0 \\ x_2^0 + y_2^0 \\ ... \\ x_n^0 + y_n^0 \end{pmatrix}$, также является решением системы (4) (множество всех решений замкнуто относительно операции сложения).

Аналогично доказывается, что $\forall\, \alpha \in R$

$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1^0 \\ \alpha x_2^0 \\ ... \\ \alpha x_n^0 \end{pmatrix}$ - решение системы (4). Значит множество всех решений системы замкнуто относительно операции умножения решений на число. Все 8 аксиом линейного пространства проверяются непосредственно, ч.т.д.

Определение. Базис пространства всех решений системы (4) называется фундаментальной системой решений.

Пример 8. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Решим систему по методу Гаусса.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&3&3&3\\2&4&5&6&7\end{pmatrix}\underset{1\text{–й шаг}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&2&2&2\\0&2&3&4&5\end{pmatrix}\underset{2\text{–й шаг}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&2&3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A=3$.

1-й шаг. Ко второй и третьей строкам прибавляем первую умноженную соответственно на -1 и -2.

2-й шаг. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на -1. Вторую строку сокращаем на 2.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ \qquad x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ \qquad\quad x_3+2x_4+3x_5=0\end{cases}$$

$x_4=c_1,\ x_5=c_2$. Из последнего уравнения $x_3=-2c_1-3c_2$.

Из второго уравнения $x_2=-x_3-x_4-x_5=2c_1+3c_2-c_1-c_2=c_1+2c_2$. Из первого уравнения $x_1=0$.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c_1+c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$, $c_1, c_2\in R$ - общее решение. Количество свободных неизвестных задает размерность пространства решений. Для того, чтобы получить фундаментальную систему решений, одно из свободных неизвестных приравнивают к 1 остальные берут равными 0. И так поступают со всеми свободными неизвестными по очереди. В результате получают векторы фундаментальной системы решений.

$c_1=1,\ c_2=0\Rightarrow \overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. $c_2=1,\ c_1=0\Rightarrow \overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ - фундаментальная система решений. При этом общее решение:

$$\begin{pmatrix}0\\c_1+c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1\cdot\overrightarrow{u_1}+c_2\cdot\overrightarrow{u_2}.$$

Упражнения к § 5.

Упражнение 5.1. Даны векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$. Доказать, что они образуют базис в пространстве R^3 и найти в этом базисе координаты вектора $\vec{b}$.

1) $\overrightarrow{a_1}=(2;1;2),\overrightarrow{a_2}=(1;2;2),\ \overrightarrow{a_3}=(2;2;1),\ \vec{b}=(1;\ 2;\ 1)$

2) $\overrightarrow{a_1}=(1;2;1),\overrightarrow{a_2}=(2;1;1),\ \overrightarrow{a_3}=(1;1;2),\ \vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$

3) $\overrightarrow{a_1}=(1;3;2),\overrightarrow{a_2}=(2;1;3),\ \overrightarrow{a_3}=(3;2;1),\ \vec{b}=(5;\ 6;\ 1)$

4) $\overrightarrow{a_1}=(1;4;6),\overrightarrow{a_2}=(2;-2;-1),\ \overrightarrow{a_3}=(2;-5;3),\ \vec{b}=(3;\ 5;\ 1)$

5) $\overrightarrow{a_1}=(1;4;7),\overrightarrow{a_2}=(2;5;8),\ \overrightarrow{a_3}=(3;6;9),\ \vec{b}=(1;\ 7;\ 13)$

6) $\overrightarrow{a_1}=(2;4;3),\overrightarrow{a_2}=(1;2;4),\ \overrightarrow{a_3}=(3;5;7),\ \vec{b}=(3;\ 5;\ 2)$

7) $\overrightarrow{a_1}=(3;1;2),\overrightarrow{a_2}=(4;5;3),\ \overrightarrow{a_3}=(2;2;4),\ \vec{b}=(8;\ 5;\ 3)$

8) $\overrightarrow{a_1}=(1;2;4),\overrightarrow{a_2}=(3;6;8),\ \overrightarrow{a_3}=(2;1;-1),\ \vec{b}=(4;\ 2;\ 2)$

Ответы: 1) $\left(-\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; 3) (1; - 1; 2); 4) (1; 2; -1); 5) (2; 1; -1); 6) (1; -2; 1); 7) (2; 1; -1); 8) (3; -1; 2).

Упражнение 5.2. Найти фундаментальную систему решений:

1) $\begin{cases} 2x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+5x_3-4x_4=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-4x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 7x_1 \qquad +5x_3-7x_4=0 \end{cases}$

3) $x_1-2x_2+4x_3-x_4=0$

4) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$

Ответы: 1) $X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-11\\-9\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\11\\9\end{pmatrix}$; 2) $X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\14\\11\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\7\\5\end{pmatrix}$;

3) $X=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$;

4) $X=c\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$; 5) $X=c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\\frac{7}{3}\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$; 6) $X=c\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$; 7) $X=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\0\\1\\-\frac{7}{5}\end{pmatrix}$.

Упражнение 5.3. Проверить образует ли линейное пространство множество:

а) P_2 всех многочленов вида $P_2=\left\{a_0x^2+a_1x+a_2 \mid a_i\in R, i=0,1,2\right\}$;

в) всех многочленов вида $\left\{x^2+a_1x+a_2 \mid a_i\in R, i=1,2\right\}$;

с) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\left\{(x_1,x_2,0) \mid x_i\in R, i=1,2\right\}$;

d) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\left\{(x_1,x_2,1) \mid x_i\in R, i=1,2\right\}$;

e) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\left\{(x_1,x_2,x_1+x_2) \mid x_i\in R, i=1,2\right\}$;

e) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\left\{(x_1,x_2,3x_1+2x_2) \mid x_i\in R, i=1,2\right\}$;

ж) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\left\{(x_1,x_2,3x_1+2x_2+5) \mid x_i\in R, i=1,2\right\}$;

Упражнение 5.4. Найти базис для линейных пространств из упражнения 5.3.

§ 6. Метод Жордана - Гаусса.

Рассмотрим систему уравнений (1) из §4. Решение систем по методу Жордана-Гаусса аналогично решению системы по методу Гаусса. При решении систем проводят элементарные преобразования строк в расширенной матрице системы. При этом, выбрав разрешающий элемент a_{ij} в i- ой строке, обнуляют, с помощью элементарных преобразований, все остальные элементы в j-ом столбце.

Алгоритм метода Жордана-Гаусса.

1. Выписываем расширенную матрицу $\tilde{A}$ системы и в первой строке среди первых n элементов находим ненулевой элемент (например $a_{1k} \neq 0$). Делим 1-ю строку на $a_{1k} \neq 0$. Проведя элементарные преобразования строк, обнуляем остальные элементы k –ого столбца.

2. Во второй строке полученной матрицы находим среди первых n элементов ненулевой элемент $\overline{a_{2l}}$. Проводя элементарные преобразования строк, обнуляем все остальные элементы l- ого столбца и т. д.

Если по ходу алгоритма получаем строки содержащие нули в первых n столбцах, опускаем их в конец матрицы. В результате преобразований матрица $\tilde{A}$ сведется к виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \overline{a_{1k+1}} & \dots & \overline{a_{1n}} & | & \overline{b_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \overline{a_{2k+1}} & \dots & \overline{a_{2n}} & | & \overline{b_2} \\ \dots & & \dots & & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \overline{a_{kk+1}} & \dots & \overline{a_{kn}} & | & \overline{b_k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \overline{b_{k+1}} \\ \dots & & \dots & & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \overline{b_m} \end{pmatrix}.$$

Если хотя бы одно из чисел $\overline{b_{k+1}}, \dots, \overline{b_m}$ не равно нулю, то система не имеет решений. Если $\overline{b_{k+1}} = \dots = \overline{b_m} = 0$, то система имеет решение. При этом $x_{k+1}, \dots, x_n$ объявляют свободными неизвестными и переменные $x_1, \dots, x_k$ выражают через свободные неизвестные. Свободные неизвестные в системе часто будут равными нулю. В результате получают частное (базисное решение) $x = (\overline{b_1}, \dots, \overline{b_k}, 0, \dots, 0)$.

Пример 1. Найти все базисные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 = -24 \end{cases}.$$

Базис	x_1 x_2 x_3 x_4	$в$	Комментарий
- - -	$1 \quad 1 \quad 5 \quad \boxed{1}$ $3 \quad -1 \quad -3 \quad 1$ $2 \quad -2 \quad -8 \quad 0$	24 0 -24	Элемент a_{14} - разрешающий
x_4 - -	$1 \quad 1 \quad 5 \quad 1$ $\boxed{2} \quad -2 \quad -8 \quad 0$ $2 \quad -2 \quad -8 \quad 0$	0 -24 -24	Элемент a_{21} - разрешающий
x_4 x_1	$0 \quad 2 \quad 9 \quad 1$ $1 \quad -1 \quad -4 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$	36 -12 0	Отбрасываем третье уравнение
x_4 x_1	$0 \quad 2 \quad 9 \quad 1$ $1 \quad \boxed{-1} \quad -4 \quad 0$	36 -12	Базисные переменные x_4, x_1 Базисное решение (-12, 0, 0, 36)
x_4 x_2	$2 \quad 0 \quad \boxed{1} \quad 1$ $-1 \quad 1 \quad 4 \quad 0$	12 12	Базисные переменные x_4, x_2 Базисное решение (0, 12, 0, 12)
x_3 x_2	$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ $-9 \quad 1 \quad 0 \quad \boxed{-4}$	12 -36	Базисные переменные x_3, x_2 Базисное решение (0, -36, 12, 0)
x_3 x_4	$-\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad 0$ $\boxed{\frac{9}{4}} \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad 1$	3 9	Базисные переменные x_3, x_4 Базисное решение (0, 0, 3, 9)
x_3 x_1	$0 \quad \boxed{\frac{2}{9}} \quad 1 \quad \frac{1}{9}$ $1 \quad -\frac{1}{9} \quad 0 \quad \frac{4}{9}$	4 4	Базисные переменные x_3, x_1 Базисное решение (4, 0, 4, 0)
x_2 x_1	$0 \quad 1 \quad \frac{9}{2} \quad \frac{1}{2}$ $1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	18 6	Базисные переменные x_2, x_1 Базисное решение (6, 18, 4, 0)

Упражнения к § 6.

Упражнение 6.1. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса. Найти базисное решение.

1) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 \qquad\qquad - 3x_4 = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

Ответы: 1) $\left\{1;\ 2-c;\ 3-c;\ c;\ 0 \,\middle|\, c \in R\right\},\ X_1 = (1;\ 2;\ 3;\ 0;\ 0)$

2) $\left\{\dfrac{11c-8}{3};\ 4c-3;\ c;\ \dfrac{23-20c}{3} \,\middle|\, c \in R\right\},\ X_1 = (1;1;1;1)$

3) $\left\{\dfrac{20-11c}{9};\ 6c-5;\ \dfrac{34c-25}{9};\ c \,\middle|\, c \in R\right\},\ X_1 = (1;1;1;1)$

4) $\left\{\dfrac{2+3c_2}{5};\ \dfrac{3-5c_1+7c_2}{5};\ c_1;\ c_2 \,\middle|\, c_1,\ c_2 \in R\right\},\ X_1 = (1;1;1;1)$

5) $\left\{c;\ -13+c;\ -7;\ 0 \,\middle|\, c \in R\right\},\ X_1 = (1;\ -13;\ -7;\ 0)$

6) $\left\{c_1;\ c_2;\ 5-8c_1+4c_2;\ -3;\ 1+2c_1-c_2 \,\middle|\, c_1,\ c_2 \in R\right\},\ X_1 = (1;1;1;\ -3;\ 2)$

Упражнение 6.2. Найти все базисные решения системы.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$

Ответы: 1) $X_1 = (-3;\ 0;\ -1)$, $X_2 = \left(0;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $X_3 = (-1;\ 1;\ 0)$

2) $X_1 = \left(\frac{13}{10}; \frac{13}{10}; 0;\ \frac{16}{10}\right)$, $X_2 = \left(0;\ 0;\ \frac{13}{3}; \frac{10}{3}\right)$, $X_3 = \left(\frac{10}{4}; \frac{10}{4}; -4;\ 0\right)$

3) $X_1 = (0; -2;\ 1;\ 0)$, $X_2 = (-1; -3;\ 0;\ 0)$,

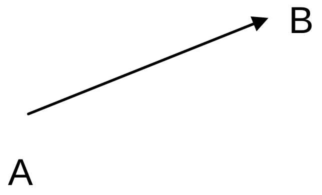
$X_3 = \left(-1; -2;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$, $X_4 = (2; 0;\ 3;\ 0)$, $X_5 = \left(2; 0;\ 0;\ \frac{3}{2}\right)$

4) $X_1 = (7;\ -6;\ 3;\ 0; -1)$, $X_2 = (6;\ -5;\ 3;\ -1; 0)$,

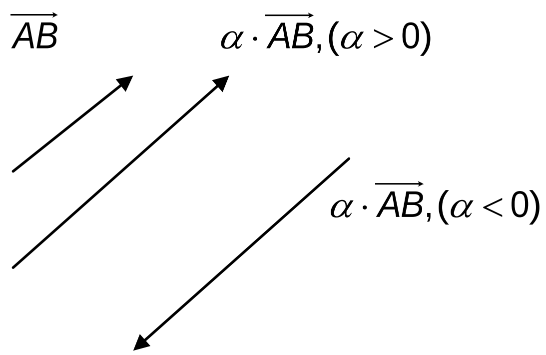
$X_3 = (1;\ 0;\ 3;\ -6; 5)$, $X_4 = (0;\ 1;\ 3;\ -7; 6)$.

§ 7. **Векторное пространство** R^3.

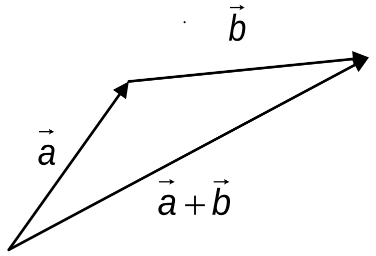
Определение 1. Пусть *A* и *B* – точки трехмерного пространства. Направленный отрезок с начальной точкой *A* и конечной точкой *B* называется вектором $\overrightarrow{AB}$ отложенным от точки *A* и обозначается $(A,\overrightarrow{AB})$:



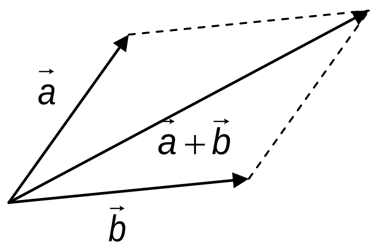
Векторы $(A,\overrightarrow{AB})$ и $(C,\overrightarrow{CD})$ называются равными, если $|AB|=|CD|$, прямые AB и CD параллельны и векторы одинаково направлены. Множество всех векторов равных вектору $(A,\overrightarrow{AB})$ называется свободным вектором $\overrightarrow{AB}$ (свободный вектор $\overrightarrow{AB}$ можно отложить от любой точки пространства). Свободные векторы обозначаются также малыми латинскими буквами $(\vec{a},\vec{i},...)$. Длина $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ - это число равное длине отрезка $|AB|$. Произведение свободного вектора $\overrightarrow{AB}$ на число α – свободный вектор $\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$, такой что $|\alpha\cdot\overrightarrow{AB}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{AB}|$ и векторы $\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB}$ одинаково направлены, если $\alpha>0$ и противоположно направлены, если $\alpha<0$.



Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ надо вектор $\vec{b}$ отложить от конца $\vec{a}$:



Тогда вектор, начало которого совпадает с началом $\vec{a}$, а конец с концом $\vec{b}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (правило треугольника). Векторы можно складывать и по правилу параллелограмма:

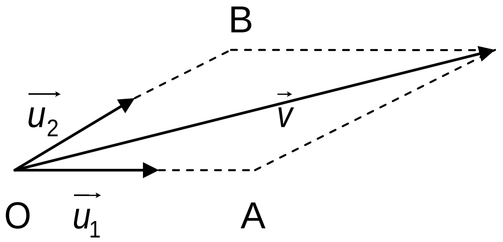


Замечание. Можно проверить, что множество всех свободных векторов с операциями сложения и умножения на число, как в определении 1, образуют линейное пространство (все 8 аксиом (см.§ 5, определение 1) выполняются). Это пространство обозначается R^3.

Определение 2. Углом между двумя векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один вектор, чтобы он совпал по направлению с другим вектором. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны. Векторы называются перпендикулярными, если угол между ними = 90^0.

Теорема 1. Любые 3 некомпланарных вектора трехмерного пространства R^3 образуют базис этого пространства. Любые 2 неколлинеарных вектора плоскости образуют базис в пространстве R^2 всех векторов плоскости.

Доказательство. Рассмотрим случай плоскости.

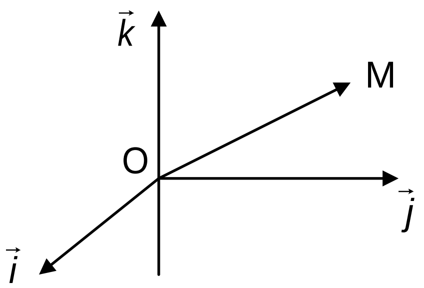


1) Пусть $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ – два некомпланарных вектора плоскости, $\vec{v}$ – произвольный вектор плоскости. Отложим их от одной точки О. Тогда $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=x\cdot\overrightarrow{u_1}+y\cdot\overrightarrow{u_2}$, так как вектор получается растяжением вектора $\overrightarrow{u_1}$ в x раз, аналогично вектор $\overrightarrow{OB}=y\cdot\overrightarrow{u_2}$. Таким образом любой вектор $\vec{v}$ плоскости выражается через $\overrightarrow{u_1}$ и $\overrightarrow{u_2}$.

2) Докажем, что $\overrightarrow{u_1}$ и $\overrightarrow{u_2}$ – линейно - независимы.

От противного. Пусть $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$ (см. опр. 2 § 5). Тогда $\overrightarrow{u_1} = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \overrightarrow{u_2} \Rightarrow$ векторы коллинеарны. Противоречие. Из 1) и 2) следует , что $\overrightarrow{u_1}$ и $\overrightarrow{u_2}$ образуют базис (см.определение 2 §5).

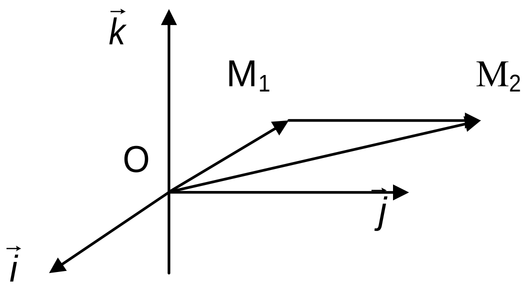
Определение 3. Три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ пространства R^3, имеющие единичную длину, называются ортонормированным базисом пространства R^3. Отложив $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в одной точке О пространства получаем прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Координатами точки *M* в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называют координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($\overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки *M*).



Теорема 2. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – две точки трехмерного пространства, заданные своими координатами в декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда координаты вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \qquad (1)$$

Доказательство.

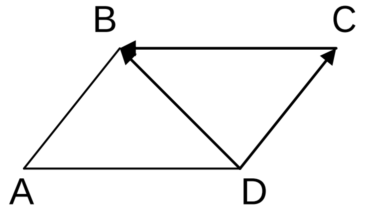


$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$

$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, ч.т.д.

Пример 1. Дан параллелограмм $ABCD$:
$D(3;-5;\,6)$, $\overrightarrow{DC}(-2;-4;\,4)$, $\overrightarrow{DB}(6;-3;\,2)$. Найти координаты точки A.

Решение.



$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=(8;1;-2)$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$;

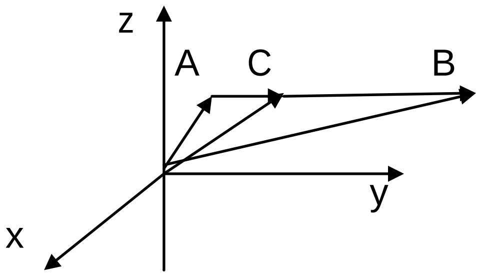
$A=D+\overrightarrow{DA}=(3;-5;\,6)+(8;1;-2)=(11;-4;\,4)$. Таким образом $A=(11;-4;\,4)$.

Определение 4. Говорят, что точка $C\in AB$ делит внутренним образом отрезок AB в отношении λ, если $\dfrac{|AC|}{|CB|}=\lambda$.

Теорема 3. Пусть координаты точки $A(x_1,\,y_1,\,z_1),\,B(x_2,\,y_2,\,z_2)$. Тогда координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении λ:

$$C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\,\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\,\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $C(x,\,y,\,z)$.



Тогда $\overrightarrow{AC}(x-x_1,\,y-y_1;\,z-z_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2-x,\,y_2-y;\,z_2-z)$. Из определений 1 и 4:
$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$, $x-x_1=\lambda(x_2-x)\Rightarrow x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)\Rightarrow y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$,

$$z-z_1=\lambda(z_2-z)\Rightarrow z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

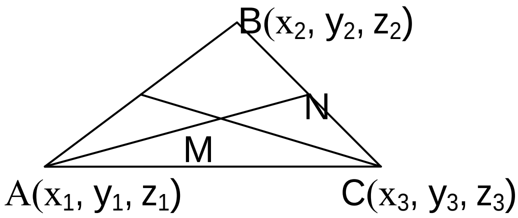
Следствие. Пусть точка C делит отрезок AB пополам (то есть $\lambda=1$), тогда по формуле (2):

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2};\,\frac{y_1+y_2}{2};\,\frac{z_1+z_2}{2}\right). \qquad (3)$$

Замечание. При доказательстве теоремы 3 использовалось следующее очевидное свойство коллинеарных векторов: если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны.

Пример 2. Дан $\Delta\, ABC,\ A(1,3,-1),\ B(3,4,6),\ C(5;2;-2)$. Найти координаты точки M – пересечения медиан треугольника.

Решение. Пусть N – середина стороны BC.



$N\left(\dfrac{x_2+x_3}{2};\dfrac{y_2+y_3}{2};\dfrac{z_2+z_3}{2}\right)$. $\lambda=\dfrac{|AM|}{|MN|}=2$. Тогда по формуле (2) первая координата точки M: $x=\dfrac{x_1+\dfrac{2(x_2+x_3)}{2}}{3}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Аналогично $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$, $z=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$. Таким образом M(3; 3; 1).

Пример 3. $\vec{u}(\alpha,3,5),\vec{v}(8,6,\beta)$. При каких α и β векторы коллинеарны?

Решение. Так как векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны, поэтому:

$$\frac{8}{\alpha}=\frac{6}{3}=\frac{\beta}{5}\Rightarrow\alpha=4,\ \beta=10,\ \vec{u}=(4;3;5),\ \vec{v}=(8;6;10).$$

Упражнения к § 7.

Упражнение 7.1. Найти координаты вектора $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$, если $\vec{a}=(4;-3;1)$; $\vec{b}=(-2;1;5)$.

Ответ: $\vec{c}=(16;-11;-7)$.

Упражнение 7.2. В треугольнике с вершинами $A(-1;3;-2),\ B(3;0;-4),$ $C(1;5;-6)$ найти длину медианы, проведенной из вершины B и периметр треугольника.

Ответ: $5;\ \sqrt{29}+\sqrt{24}+\sqrt{33}$.

Упражнение 7.3. Найти центр тяжести треугольника, зная координаты вершин: $A(1;-4;3),\ B(2;-3;0),\ C(5;2;1)$.

Ответ: $\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Упражнение 7.4. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(5;-8;3)$ и $M_2(4;0;1)$. Найти координаты центра масс стержня.

Ответ: $\left(\dfrac{9}{2};-4;2\right)$.

Упражнение 7.5. Даны три последовательные вершины ромба: $A(9;-11;5)$, $B(7;4;-2)$, $C(-7;13;-3)$. Найти четвертую вершину D. Вычислить периметр ромба и длины его диагоналей.

Ответ: $D(-5;-2;4)$, $P=4\sqrt{278}$, $d_1=6\sqrt{6}$, $d_2=8\sqrt{14}$.

Упражнение 7.6. Дан параллелограмм $ABCD$: $A(2;-6;-1)$, $\overrightarrow{CB}(3;1;5)$, $\overrightarrow{CD}(-2;0;-4)$. Найти координаты вершин B,C,D и точки пересечения диагоналей параллелограмма.

Ответ: $B(4;-6;3)$, $C(1;-7;-2)$, $D(-1;-7;-6)$, $O\left(\frac{3}{2};-\frac{13}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Упражнение 7.7. Дан треугольник ABC. Точки K и L-середины сторон AB и BC, $\overrightarrow{BA}(2;1;1)$, $\overrightarrow{KL}(3;2;-1)$. Найти вектор $\overrightarrow{CB}$.

Ответ: $\overrightarrow{CB}(-8;-5;1)$.

Упражнение 7.8. В трапеции $ABCD$: $\overrightarrow{AB}(1;2;1)$, $\overrightarrow{BC}(3;1;-2)$; $\overrightarrow{CD}(5;0;-5)$. Найти координаты $\overrightarrow{MN}$, где M- середина стороны AB, N- середина стороны CD.

Ответ: $\overrightarrow{MN}(6;2;-4)$.

Упражнение 7.9. При каком значении параметров α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

a) $\vec{a}=2\vec{i}-\alpha\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{b}=\beta\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$.

b) $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{b}=4\vec{i}-3\vec{j}+\beta\vec{k}$.

Ответ: a) $\alpha=15$; $\beta=-\frac{2}{3}$; b) $\alpha=-\frac{4}{3}$; $\beta=6$.

Упражнение 7.10. Заданы векторы: $\vec{a}=(1;\ 2;\ 5)$; $\vec{b}=(1;3;2)$, $\vec{c}=(-2;-7;1)$, $\vec{d}=(6;16;16)$. При каких значениях α,β,γ векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и $\vec{d}$ будут образовывать замкнутую ломанную линию так, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего?

Ответ: $\alpha=-3$; $\beta=-1$; $\gamma=1$.

Упражнение 7.11. Найти координаты концов отрезка AD, который точками $B(3;0;3)$, $C(6;-3;0)$ поделены на три равные части.

Ответ: $A(0;\ 3;6)$, $D(9;-6;-3)$.

§ 8. **Скалярное произведение векторов.**

Определение 1. Скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v})$ двух векторов $\vec{u},\vec{v}$ пространства R^3 называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{u},\vec{v})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u}\,{}^\wedge\vec{v}). \qquad (1)$$

Число $(\vec{u},\vec{u})=|\vec{u}|^2$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{u}$, обозначается $\vec{u}^{\,2}$.

Свойства скалярного произведения.

1) $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{v},\vec{u})$

2) $(\vec{u},\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u},\vec{v})+(\vec{u},\vec{w})$

3) $(\vec{u},\alpha\cdot\vec{v})=(\alpha\vec{u},\vec{v})=\alpha(\vec{u},\vec{v})$

4) $(\vec{u},\vec{u})=|\vec{u}|^2\ge 0;\ (\vec{u},\vec{u})=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

Свойства 1 – 4 выполняются $\forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in R^3,\ \alpha\in R$.

Пример 1. $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=3,\ \vec{u}\,{}^\wedge\vec{v}=\dfrac{\pi}{3}$. Найти $(3\vec{u}-2\vec{v},-3\vec{u}+4\vec{v})$.

Решение. $(3\vec{u}-2\vec{v},-3\vec{u}+4\vec{v})=-9(\vec{u},\vec{u})+6(\vec{v},\vec{u})+12(\vec{u},\vec{v})-8(\vec{v},\vec{v})=$

$$=-9(\vec{u},\vec{u})+18(\vec{u},\vec{v})-8(\vec{v},\vec{v})=-9\cdot|\vec{u}|^2+18\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\frac{\pi}{3}-8\cdot|\vec{v}|^2=$$

$$=-9\cdot 4+18\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}-8\cdot 9=-54.$$

Пример 2. В условиях примера 1 найти угол между векторами $3\vec{u}-2\vec{v}$ и $-3\vec{u}+4\vec{v}$.

Решение. Из формулы (1):

$$\cos(3\vec{u}-2\vec{v}\ {}^\wedge -3\vec{u}+4\vec{v})=\frac{(3\vec{u}-2\vec{v},-3\vec{u}+4\vec{v})}{|3\vec{u}-2\vec{v}|\cdot|-3\vec{u}+4\vec{v}|}.$$

Из примера 1: $(3\vec{u}-2\vec{v},-3\vec{u}+4\vec{v})$=-54.

Найдем $|3\vec{u}-2\vec{v}|$ и $|-3\vec{u}+4\vec{v}|$.

$$|3\vec{u}-2\vec{v}|=\sqrt{(3\vec{u}-2\vec{v})(3\vec{u}-2\vec{v})}=\sqrt{9(\vec{u},\vec{u})-6(\vec{v},\vec{u})-6(\vec{u},\vec{v})+4(\vec{v},\vec{v})}=$$

$$=\sqrt{9(\vec{u},\vec{u})-12(\vec{u},\vec{v})+4(\vec{v},\vec{v})}=\sqrt{9\cdot|\vec{u}|^2-12\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u}\ {}^\wedge\ \vec{v})+4\cdot|\vec{v}|^2}=$$

$$=\sqrt{9\cdot 4-12\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 9}=6.$$

Аналогично $|-3\vec{u}+4\vec{v}|=\sqrt{(-3\vec{u}+4\vec{v},-3\vec{u}+4\vec{v})}=6\sqrt{3}$.

Поэтому $\cos(3\vec{u}-2\vec{v}\ {}^\wedge -3\vec{u}+4\vec{v})=\dfrac{-54}{6\cdot 6\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$(3\vec{u}-2\vec{v}\ {}^\wedge -3\vec{u}+4\vec{v})=150^0$.

Теорема 1. Пусть векторы $\vec{u},\vec{v}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$: $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Тогда:

$$(\vec{u},\vec{v})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{2}$$

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}} \tag{3}$$

$$\cos(\vec{u}\ {}^\wedge\ \vec{v})=\frac{(\vec{u},\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как векторы $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ взаимно перпендикулярны и их длина равна 1, то $(\vec{i},\vec{j})=(\vec{i},\vec{k})=(\vec{j},\vec{k})=0$, $(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1$. Поэтому $(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Остальные формулы также легко следуют из свойств 1) – 4) скалярного произведения.

Пример 3. Даны векторы $\vec{u}(7,3,5)$ и $\vec{v}(-5,0,1)$. Найти

1) $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$.

2) Угол между векторами $\vec{u}+\vec{v}$ и $\vec{u}-\vec{v}$.

Решение. Найдем координаты $\vec{u}+\vec{v}$ и $\vec{u}-\vec{v}$:

$\vec{u}+\vec{v}$=(2; 3; 6), $\vec{u}-\vec{v}$=(12; 3; 4). Тогда по формуле (2): $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ =24+9+24=57. По формуле (4):

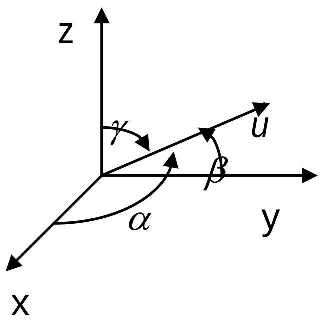
$$\cos((\vec{u}+\vec{v})\ {}^\wedge\ (\vec{u}-\vec{v}))=\frac{(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})}{\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}-\vec{v}\right|}=\frac{57}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=\frac{57}{7\cdot 13}=\frac{57}{91}.$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\ {}^\wedge\ (\vec{u}-\vec{v})=\arccos\left(\frac{57}{91}\right).$$

Замечание. Пусть $\vec{u}$ – произвольный ненулевой вектор пространства $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ - его координаты в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Рассмотрим вектор

$$\vec{e}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}};\frac{y_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}};\frac{z_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}}\right). \tag{5}$$

Тогда $\left|\vec{e}\right|=\sqrt{(\vec{e},\vec{e})}=\sqrt{\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|};\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)}=\frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\sqrt{(\vec{u},\vec{u})}=1$, то есть вектор $\vec{e}$ имеет единичную длину и сонаправлен с вектором $\vec{u}$. Координаты вектора $\vec{e}$ равны косинусам углов, образованных вектором $\vec{u}$ с осями координат (напрвляющие косинусы вектора $\vec{u}$):



$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};\ \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};\ \cos\gamma = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Пример 4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec v(-5, 0, 1)$ из примера 3.

Решение. $|\vec v| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, $\quad \frac{\vec v}{|\vec v|} = \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}; 0; \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$,

$$\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}};\ \cos\beta = 0;\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Определение 2. Числовой проекцией вектора $\vec u$ на полуось L называется число $np_L\vec a = (\vec u, \vec e) = |\vec u|\cos(\vec u \wedge \vec e)$, (6)

где $\vec e$ – вектор единичной длины, задающий направление на L.

Свойства проекции.

1) $np_L(\vec u + \vec v) = np_L(\vec u) + np_L(\vec v)$.

2) $np_L(\alpha \cdot \vec u) = \alpha \cdot np_L(\vec u),\ \alpha \in R$.

Замечание. Если $\vec v \neq 0$, то вектор $\vec e = \frac{\vec v}{|\vec v|}$ имеет единичную длину и сонаправлен с $\vec v$, поэтому $np_{\vec v}\vec u = \left(\vec u, \frac{\vec v}{|\vec v|}\right) = \frac{(\vec u, \vec v)}{|\vec v|}$. (7)

Пример 5. Для векторов $\vec u$ и $\vec v$ из примера 3 найти $np_{\vec u+\vec v}(\vec u - \vec v)$.

Решение. $\vec u - \vec v = (12, 3, 4)$, $\overrightarrow{u + v} = (2, 3, 6)$, $|\vec u + \vec v| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$, поэтому по формуле (7) $np_{\vec u+\vec v}(\vec u - \vec v) = \frac{(\vec u - \vec v, \vec u + \vec v)}{|\vec u + \vec v|} = \frac{57}{7}$.

Замечание. Работа *A* силы $\vec F$ при перемещении материальной точки вдоль прямой L из точки *B* в точку *C* вычисляется по формуле: $A = (\vec F, \overrightarrow{BC})$. (8)

Пример 6. Найти работу силы $\vec F = 3\vec i + 2\vec j - \vec k$ при перемещении точки из положения $B(2, -3, 1)$ в положение $C(3, 1, 7)$.

Решение. $\overrightarrow{BC}(1, 4, 6)$. По формуле (8) $A = (\vec F, \overrightarrow{BC}) = 3 + 8 - 6 = 5$.

Упражнения к § 8.

Упражнение 8.1. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, образующих угол φ, если известно, что:

1) $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4, \varphi=0$; 2) $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=1, \varphi=\frac{\pi}{6}$; 3) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=8, \varphi=\frac{3\pi}{4}$;

4) $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=2, \varphi=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1) 8; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 3) $-12\sqrt{2}$; 4) 0.

Упражнение 8.2. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a}=(2;-3;1), \vec{b}=(0;5;2)$; 2) $\vec{a}=(8;4;-2), \vec{b}=(-1;3;1)$;

3) $\vec{a}=(5;1;0), \vec{b}=(2;-4;4)$; 4) $\vec{a}=(1;2;-5), \vec{b}=(-3;4;3)$.

Ответ: 1) -13; 2) 2; 3) 6; 4) -10.

Упражнение 8.3. Найти угол между векторами, заданными своими координатами:

1) $\vec{a}=(5;6), \vec{b}=(6;-5)$; 2) $\vec{a}=(3;4), \vec{b}=(5;12)$;

3) $\vec{a}=(1;-1;2), \vec{b}=(8;0;3)$; 4) $\vec{a}=(4;1;1), \vec{b}=(1;4;4)$.

Ответ: 1) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 2) $\varphi=\arccos\left(\frac{63}{65}\right)$; 3) $\arccos\left(\frac{14}{\sqrt{438}}\right)$; 4) $\varphi=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right)$.

Упражнение 8.4. $|\vec{u}|=1, |\vec{v}|=2, \vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}=\frac{2\pi}{3}$. Найти а) $(2\vec{u}+\vec{v}, 4\vec{u}+\vec{v})$;в) $(2\vec{u}+\vec{v}\,\hat{}\,4\vec{u}+\vec{v})$.

Ответ: a) 6; b) $\frac{\pi}{3}$.

Упражнение 8.5. Даны векторы $\vec{u}(1;2;0), \vec{v}(2;4;2)$.Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{u}, \vec{v}$.

Ответ: $\arccos\frac{19}{21}$

Упражнение 8.6. Дан треугольник с вершинами $A(2;-1;4)$; $B(3;1;1)$, $C(0;-5;2)$. Найти:

1) скалярные произведения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$;

2) внутренние углы треугольника.

Ответ: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=28$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$.

2) $\angle A=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$; $\angle B=\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{161}}\right)$; $\angle C=\arccos\left(\frac{7}{\sqrt{69}}\right)$.

Упражнение 8.7. В четырехугольнике $ABCD$: $\overrightarrow{AB}(2;1;1)$, $\overrightarrow{BC}(1;11;3)$; $\overrightarrow{CD}(1;-5;0)$. Найти угол между диагоналями четырехугольника.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{90}{91}$.

Упражнение 8.8. Вектор $\vec{e}$ имеет длину 1, коллинеарен вектору $\vec{a}(2;1;-2)$ и противоположно с ним направлен. Найти координаты вектора $\vec{e}$.

Ответ: $\vec{e} = \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Упражнение 8.9. На оси абсцисс найти точку *A*, равноудаленную от точек $M_1(2;5;-2)$ и $M_2(1;4;7)$.

Ответ: $A\left(-\dfrac{33}{2}; 0; 0\right)$.

Упражнение 8.10. На оси ординат найти точку *A*, расстояние которой от точки *B*(9; 4) равно 9.

Ответ: $A(0;4)$.

Упражнение 8.11. Найти расстояние от начала координат до точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(4;-1;2)$, $B(-3;3;-2)$, $C(8;1;0)$.

Ответ: $d = \sqrt{10}$.

Упражнение 8.12. Проверить является ли четырехугольник с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(4;4;1)$, $C(7;1;1)$, $D(4;-2;1)$ квадратом.

Ответ: да.

Упражнение 8.13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Найти $|2\vec{a}+\vec{b}|$ и $|2\vec{a}-\vec{b}|$.

Ответ: $\left|2\bar{a}+\bar{b}\right| = \left|2\bar{a}-\bar{b}\right| = 5$.

Упражнение 8.14. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, векторы $2\vec{a}+3\vec{b}$ и $4\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ: $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Упражнение 8.15. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-2;3;1)$, $\vec{c}(3;4;1)$. Найти при каком значении λ вектор $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

Ответ: $\lambda = -2$.

Упражнение 8.16. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислить проекцию каждого из них на ось другого вектора:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; 2) $\vec{a} = (2;-3;4)$, $\vec{b} = (1;2;1)$;

3) $\vec{a} = (2;2;-3)$, $\vec{b} = (1;5;1)$; 4) $\vec{a} = (1;-2;2)$, $\vec{b} = (5;10;0)$.

Ответ: 1) $np_{\bar{b}}\vec{a}=1,\ np_{\bar{a}}\vec{b}=\dfrac{3}{2}$; 2) $np_{\bar{b}}\vec{a}=np_{\bar{a}}\vec{b}=0$; 3) $np_{\bar{b}}\vec{a}=\sqrt{3},\ np_{\bar{a}}\vec{b}=\dfrac{9}{\sqrt{17}}$;

4) $np_{\bar{b}}\vec{a}=-\dfrac{3}{\sqrt{5}},\ np_{\bar{a}}\vec{b}=-5$.

Упражнение 8.17. Даны три вектора $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k};\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k};\ \vec{c}=3\vec{j}-8\vec{k}$.

Вычислить: 1) $np_{\bar{c}}(\vec{a}+2\vec{b})$; 2) $np_{\bar{a}+\bar{b}}(3\vec{c})$; 3) $np_{2\bar{a}-\bar{b}}(\vec{c})$.

Ответ: 1) $-\dfrac{27}{\sqrt{73}}$; 2) $-\dfrac{114}{\sqrt{29}}$; 3) $-\dfrac{109}{\sqrt{179}}$.

Упражнение 8.18. Найти линейную комбинацию векторов $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}-3(\vec{a},\vec{c})\vec{a}+3(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, если $\vec{a}=(4;\ 1;\ 3),\ \vec{b}=(1;\ 2;\ -2),\ \vec{c}=(10;\ 8;\ 1)$.

Ответ: $(-540;\ -9;\ -603)$.

Упражнение 8.19. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2},\ |\vec{b}|=4$, угол между векторами $\varphi=135^0$.

Ответ: 40.

Упражнение 8.20. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(4;-2;\ 2)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=-48$.

Ответ: $\vec{x}=(-8;4;\ -4)$.

Упражнение 8.21. Даны два вектора $\vec{a}=(4;\ 3;-1),\ \vec{b}=(2;\ 0;\ 1)$. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен оси *Oy* и удовлетворяет условиям: $\vec{x}\cdot\vec{a}=12,\ \vec{x}\cdot\vec{b}=6$.

Ответ: $\vec{x}=(3;0;\ 0)$.

Упражнение 8.22. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}=(4;\ -2;\ \alpha),\ \vec{b}=(\alpha;\ 2;\ 2)$ ортогональны?

Ответ: $\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Упражнение 8.23. Найти направляюшие косинусы вектора, заданного своими координатами:

1) $\vec{a}=(2;\ -1;\ 0)$, 2) $\vec{b}=(4;1;\ 2)$, 3) $\vec{a}=(3;1;1)$, 4) $\vec{b}=(2;\ -4;\ 2)$.

Ответ: 1) $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\gamma=0$;

2) $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{21}};\ \cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{21}};\ \cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$;

3) $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{11}};\ \cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{11}};\ \cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$;

4) $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{6}};\ \cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Упражнение 8.24. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известны углы α, β, γ, образуемые им с осями Ox, Oy, Oz и его длина:

1) $|\vec{a}| = 5$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 60^0$;

2) $|\vec{a}| = 2$, $\alpha = 120^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$.

Ответ: 1) $\vec{a} = \left(\frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{2}}{2};\ \frac{5}{2}\right)$; 2) $\vec{a} = \left(-1;\ 1;\ \sqrt{2}\right)$.

Упражнение 8.25. Три силы $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей силы $\vec{F}$, если известно, что $|\vec{F_1}| = 4$, $|\vec{F_2}| = 22$, $|\vec{F_3}| = 20$.

Ответ: $|\vec{F}| = 30$.

Упражнение 8.26. Даны проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси: $x = -5$, $y = 5$, $z = 5\sqrt{2}$. Найти величину силы $\vec{F}$ и направление ее действия.

Ответ: $|\vec{F}| = 10$; $\alpha = 120^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$.

Упражнение 8.27 Вычислить работу, совершаемую силой $\vec{F} = (2;\ 4;-6)$ при перемещении ее точки приложения:

1) из начала в конец вектора $\vec{s} = (5;\ 0;-8)$;

2) из $M_1(5;\ 5;\ 2)$ в $M_2(8;\ 11;\ 3)$.

Ответ: 1) A=58; 2) A=24.

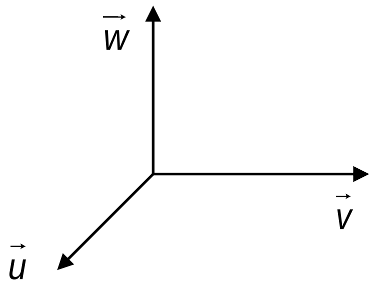
Упражнение 8.28. Три силы $\vec{F_1} = (-4;\ 7;\ 1)$, $\vec{F_2} = (2;\ -6;-5)$, $\vec{F_3} = (3;\ 5;\ 9)$ приложены к одной точке. Вычислить работу, производимую их равнодействующей, если ее точка приложения перемещается из положения $M_1(4;\ 1;\ -2)$ в положение $M_2(2;\ 2;\ 0)$.

Ответ: A=14.

§ 9. **Векторное произведение векторов.**

Определение 1. Пусть векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ трехмерного пространства образуют базис (согласно теореме 1 §7, они должны быть некомпланарными). Тройка векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ – правая, если кратчайший поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ проходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{w}$.

Пример 1.



$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ – правая тройка, $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ – левая тройка, $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ – левая тройка, $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ – правая тройка.

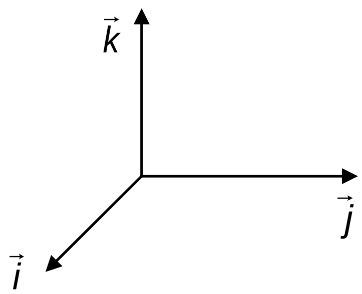
Определение 2. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть вектор, обозначаемый $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ и такой , что:

1) $\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.

2) $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] \perp \vec{a}$ и $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] \perp \vec{b}$.

3) тройка векторов $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right)$ – правая.

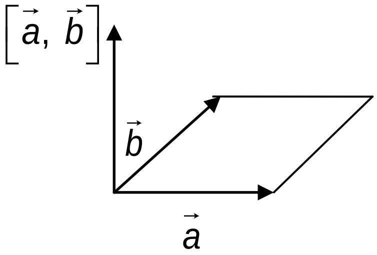
Пример 2. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ стандартный ортонормированный базис в пространстве R^3:



$\left[\vec{i},\ \vec{j}\right] = \vec{k}$, $\left[\vec{j},\ \vec{k}\right] = \vec{i}$, $\left[\vec{i},\ \vec{k}\right] = -\vec{j}$, $\left[\vec{i},\ \vec{i}\right] = \left[\vec{j},\ \vec{j}\right] = \left[\vec{k},\ \vec{k}\right] = 0$ (тройка $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ в определении 3 § 7 всегда выбирается правой).

Свойства векторного произведения векторов.

1. $\left\|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right\|$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



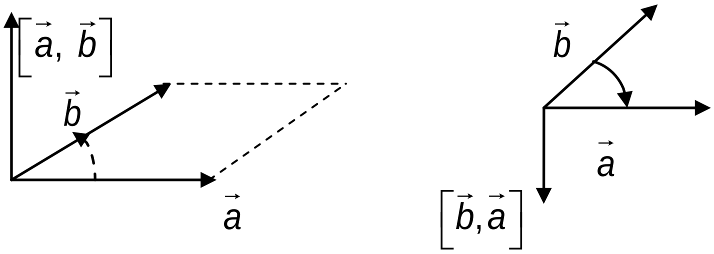
Доказательство. По определению 2:
$\left\|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right\| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\ ^\wedge\ \vec{b}\right) = S_{параллелограмма}$.

2. $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = 0 \Leftrightarrow$ когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Доказательство. $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = 0 \Leftrightarrow \left\|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right\| = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\ ^\wedge\ \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow$ векторы коллинеарны.

3. $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\ \vec{a}\right]$.

Доказательство.



4. $\left[\vec{a},\ \lambda\cdot\vec{b} + \mu\cdot\vec{c}\right] = \lambda\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] + \mu\left[\vec{a},\ \vec{c}\right]$.

Свойство 1 – 4 выполняется $\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3,\ \lambda,\ \mu \in R$.

Пример 3. $\left|\overrightarrow{a_1}\right| = 2, \left|\overrightarrow{a_2}\right| = 3,\ \overrightarrow{a_1}\ ^\wedge\ \overrightarrow{a_2} = \dfrac{\pi}{6}$. Найти $\left\|\left[2\overrightarrow{a_1} + 3\overrightarrow{a_2},\ 4\overrightarrow{a_1} + 5\overrightarrow{a_2}\right]\right\|$.

Решение.

$$\left\|\left[2\overrightarrow{a_1} + 3\overrightarrow{a_2},\ 4\overrightarrow{a_1} + 5\overrightarrow{a_2}\right]\right\| = \left|8\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1}\right] + 10\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] + 12\left[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}\right] + 15\left[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_2}\right]\right\| =$$

$=$ ($\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1}\right] = 0, \left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = -\left[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}\right], \left[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_2}\right] = 0$ - по свойствам 2 и 3)=

$$= \left|-2\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right]\right\| = 2\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a_2}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 6.$$

Теорема 1. Пусть $\vec a = x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k,\ \vec b = x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k$ - векторы, заданные своими координатами в стандартном ортонормированном базисе $\vec i,\ \vec j,\ \vec k$, тогда

$$\left[\vec a,\ \vec b\right] = \vec i\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

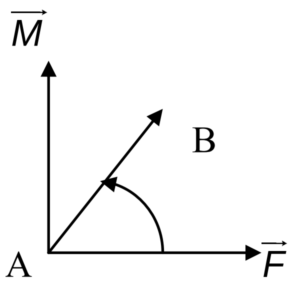
Доказательство. По свойствам 1 – 4 и согласно примеру 2:

$$\left[\vec a,\ \vec b\right] = \left[x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k, x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k\ \right] = \ =$$

$x_1y_2\left[\vec i,\ \vec j\right] + y_1x_2\left[\vec j, \vec i\right] + ... = (x_1y_2 - y_1x_2)\left[\vec i,\ \vec j\right] + ... = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\cdot \vec k + ...$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Сила $\vec F = 3\vec i - 2\vec j + 4\vec k$ приложена к точке A(3, 1, 7). Найти момент $\vec M$ силы относительно точки B(2, 3, 1).

Решение. $\vec M = \left[\vec F,\ \overrightarrow{AB}\right],\ \overrightarrow{AB}(-1, 2, -6)$.



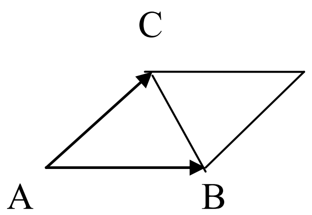
$$\vec M = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec i(12 - 8) - \vec j(-18 + 4) + \vec k(6 - 2) = 4\vec i + 14\vec j + 4\vec k;$$

$$\left|\vec M\right| = \sqrt{4^2 + 14^2 + 4^2} = 2\sqrt{57}.$$

Пример 5. Дан треугольник ABC, A(1, 1, 2), B(-1, 2, 3), C(1, 2, 2). Найти его площадь.

Решение.



$\overrightarrow{AB}(-2, 1, 1),\ \overrightarrow{AC}(0, 1, 0)$.

Найдем $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec i(-1) - \vec j\cdot 0 + \vec k(-2) = -\vec i - 2\vec k$. Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{\text{параллелограмма } ABCK}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+4}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Упражнения к § 9.

Упражнение 9.1. Упростить выражение:

1) $\left[(3\vec{a}-4\vec{b}),\ (2\vec{a}+5\vec{b})\right]$;

2) $\left[(5\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}),\ (4\vec{a}+7\vec{b}-6\vec{c})\right]$;

3) $\left[(2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}),\ (4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k})\right]$;

4) $\left[(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}),\ (2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})\right]$.

Упражнение 9.2. Найти векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}=7\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$;

2) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}$;

3) $\vec{a}=(1;\ 2;-3),\ \vec{b}=(3;\ 0;\ 4)$;

4) $\vec{a}=(5;\ 1;\ 0),\ \vec{b}=(6;\ 1;-2)$;

5) $\vec{a}=(1;\ 3;\ 2),\ \vec{b}=(3;-1;\ 0)$;

6) $\vec{a}=(0;\ -2;-1),\ \vec{b}=(4;\ 0;\ 3)$.

Упражнение 9.3. Найти синус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a}=(2;\ -4;\ 4),\ \vec{b}=(2;\ 1;-2)$;

2) $\vec{a}=(2;\ 1;\ -2),\ \vec{b}=(6;-3;\ 2)$;

3) $\vec{a}=(2;\ 2;\ 1),\ \vec{b}=(11;\ 10;\ 2)$;

4) $\vec{a}=(2;\ 1;\ 2),\ \vec{b}=(-2;\ 2;\ 1)$.

Упражнение 9.4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

1) $\vec{a}=(1;\ 2;-3),\ \vec{b}=(3;\ 0;\ 4)$;

2) $\vec{a}=(5;-1;\ 2),\ \vec{b}=(0;\ 3;-6)$.

Упражнение 9.5. Вычислить площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках:

1) $A(7;-5;\ 6),\ B(6;\ 0;\ 6),\ C(9;-5;\ 8)$;

2) $A(2;-2;\ 2),\ B(5;\ 3;\ 5),\ C(4;-2;\ 2)$.

Упражнение 9.6. $\left|\overrightarrow{a_1}\right|=3, \left|\overrightarrow{a_2}\right|=4,\ \overrightarrow{a_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{a_2}=\frac{5\pi}{6}$. Найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}$ и $2\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}$.

Упражнение 9.7. Даны векторы $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(3;0;4)$. Найти вектор $\vec{a}$ перпендикулярный векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$, имеющий длину $\sqrt{5}$,и образующий острый угол с осью Ox.

Упражнение 9.8. Дан треугольник ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины C:

1) $A(2;-1;3)$, $B(0;1;1)$, $C(2;\ 0;-2)$;

2) $A(3;1;1)$, $B(1;-2;3)$, $C(0;\ 5;-1)$.

Упражнение 9.9. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Найти $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right]$ и $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$ в каждом из случаев:

1) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$;

2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Упражнение 9.10. Сила $\vec{F} = (2;3;-5)$ приложена в точке A(1; 0; 2). Найти момент этой силы, ее величину и направляющие косинусы относительно:

1) начала координат;

2) точки B(2; 2; 3); 3) $C(4;\ 1;-2)$.

Упражнение 9.11. В точке $A(2;-1;\ 4)$ приложены три силы $\vec{F}_1 = (3;1;-7), \vec{F}_2 = (2;-4;8)$, $\vec{F}_3 = (-8;\ 7;1)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(-1;\ 2;\ 5)$.

Ответы на упражнения к § 9.

9.1. 1) $23\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$; 2) $47\left[\vec{a}, \vec{b}\right] - 38\left[\vec{a}, \vec{c}\right] + 4\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$; 3) $-2\vec{i} + 28\vec{j} + 22\vec{k}$; 4) $-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

9.2. 1) $5\vec{i} + 5\vec{k}$; 2) $2\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}$; 3) $(-8;\ 5;-6)$; 4) $(-2;\ 10;-1)$; 5) $(2;\ 6;-14)$; 6) $(-6;-4;\ 8)$.

9.3. 1) $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$; 2) $\dfrac{4\sqrt{26}}{21}$; 3) $\dfrac{\sqrt{89}}{45}$; 4) 1.

9.4. 1) $3\sqrt{10}$ (ед^2); 2) $15\sqrt{5}$ (ед^2).

9.5. 1) $2\sqrt{259}$ (ед^2); 2) $2\sqrt{34}$ (ед^2).

9.6. 30.

9.7. $\left(\dfrac{8}{5}, 1, -\dfrac{6}{5}\right)$

9.8. 1) $2\sqrt{14}$; 2) $\sqrt{\dfrac{393}{17}}$.

9.9. 1) $14\vec{i} + 14\vec{j} + 14\vec{k}$; $10\vec{i} + 40\vec{j} + 20\vec{k}$; 2) $-10\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k}$; $-8\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

9.10. 1) $-6\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k}$; $3\sqrt{14}$; $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

2) $13\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$; $\sqrt{219}$; $\cos\alpha=\frac{13}{\sqrt{219}}$; $\cos\beta=-\frac{7}{\sqrt{219}}$; $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{219}}$.

9.11. $\sqrt{190}$; $-\frac{10}{\sqrt{190}}$; $-\frac{9}{\sqrt{190}}$; $\frac{3}{\sqrt{190}}$.

§ 10. Смешанное произведение векторов.

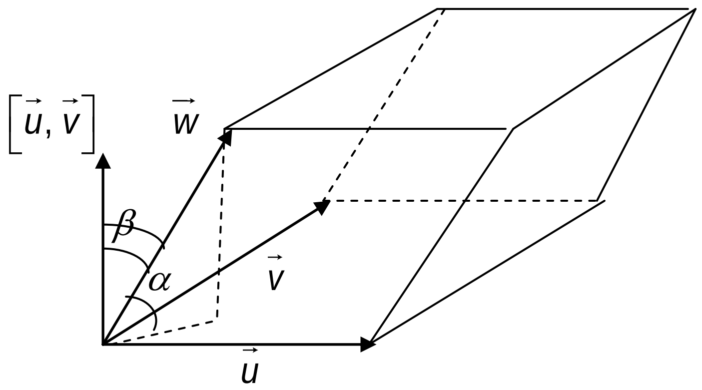
Определение 1. Смешанным произведением трех векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ называется число

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left(\left[\vec{u}, \vec{v}\right], \vec{w}\right). \qquad (1)$$

Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, взятому со знаком «+», если тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ – правая и со знаком «– », если тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ – левая.

Доказательство.



Пусть тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ – правая, тогда

$$v = S_{осн.} \cdot h = \left\|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right\| \cdot h = \left\|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right\| \cdot \left|\vec{w}\right| \cdot \sin\alpha = \left\|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right\| \cdot \left|\vec{w}\right| \cdot \cos\beta = \left(\left[\vec{u}, \vec{v}\right], \vec{w}\right) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

что и требовалось доказать.

2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})=0 \Leftrightarrow$ когда векторы компланарны.

3. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$.

Свойства 2 и3 следуют из 1.

Теорема 1. Пусть $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},\ \vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ заданы своими координатами в стандартном ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Доказательство. По формуле (1) § 9:

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$ поэтому

$\left(\left[\vec{u},\vec{v}\right],\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Следует из разложения определителя по 3-й строке.

Пример 1. Дана пирамида ABCD, A(1, 1, 2), B(- 1, 2, 3), C(1, 2, 2), D(2, 1, 1). Найти:
1) ее объем;
2) высоту h, опущенную на грань ABC.

Решение. $\overrightarrow{AB}(-2,1,1), \overrightarrow{AC}(0,1,0), \overrightarrow{AD}(1,0,-1)$. Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Тогда $V_{пир}=\frac{1}{6}V_{параллелепипеда}$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2-1=1.$

Тогда по свойству 1: $V_{параллелепипеда}=1$, $V_{пир}=\frac{1}{6}V_{параллелепипеда}=\frac{1}{6}$. С другой стороны

$V_{пир}=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h\Rightarrow h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, так как $S_{осн}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (см. пример 4 § 9).

Пример 2. Проверить лежат ли точки A(2, 1, 2), B(3, 2, 4), C(4, 2, 3), D(2, 0, -1) в одной плоскости.

Решение. $\overrightarrow{AB}(1,1,2), \overrightarrow{AC}(2,1,1), \overrightarrow{AD}(0,-1,-3)$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$, следовательно, (по свойству 2 смешанного произведения) векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ - компланарны и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Упражнения к § 10.

Упражнение 10.1. Определить какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в каждом из следующих случаев.

1) $\vec{a}=\vec{j}, \vec{b}=\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}$.

2) $\vec{a}=-\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}, \vec{c}=-\vec{j}$.

3) $\vec{a}=\vec{k}-\vec{j}, \vec{b}=\vec{j}+2\vec{i}-\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

4) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}$.

Упражнение 10.2. Вычислить смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$:

1) $\vec{a}=(2;\ 3;-1),\ \vec{b}=(-2;1;1),\ \vec{c}=(1;-2;\ 2)$.

2) $\vec{a}=(1;\ 2;1),\ \vec{b}=(2;1;1),\ \vec{c}=(1;1;\ 2)$.

3) $\vec{a}=(9;\ 7;\ 8),\ \vec{b}=(6;\ 4;\ 5),\ \vec{c}=(1;2;\ 3)$.

4) $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3),\ \vec{b}=(3;1;\ 2),\ \vec{c}=(2;\ 3;1)$.

Упражнение 10.3. Выяснить компланарны ли векторы.

1) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k},\ \ \vec{c}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$.

2) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k},\ \ \vec{c}=8\vec{i}+9\vec{j}+7\vec{k}$.

3) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\ \ \vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

4) $\vec{a}=\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=8\vec{i}+\vec{j}-8\vec{k},\ \ \vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$.

Упражнение 10.4. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах.

1) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{k},\ \ \vec{c}=5\vec{i}+2\vec{j}$.

2) $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\ \ \vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

3) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},\ \ \vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

4) $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-4\vec{q},\ \ \vec{c}=3\vec{p}+5\vec{q}$, где $\left|\vec{p}\right|=\dfrac{1}{2},\ \left|\vec{q}\right|=2,\ \varphi=(\vec{p},\ ^\wedge\ \vec{q})=45^0$.

Упражнение 10.5. Доказать, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости:

1) $A(-1,\ 2,1),\ B(-3,1,\ 2),\ C(3,-2,\ 2),\ D(3,\ -4,3)$.

2) $A(9,\ -11,\ 5),\ B(7,\ 4,\ -2),\ C(-7,13,\ -3),\ D(1,1,1)$.

Упражнение 10.6. При каком значении α векторы $\vec{a}=(2;\ \alpha;\ 3),\ \vec{b}=(4;\ 4;\ 2\alpha),\ \vec{c}=(1;-1;\ 2)$ будут компланарны?

Упражнение 10.7. Дана треугольная пирамида ABCD. Найти объем пирамиды и высоту, опущенную из вершины D в каждом из случаев.

1) $A(6,1,\ 4),\ B(2,-2,-5),\ C(7,1,\ 3),\ D(1,-3,7)$.

2) $A(1,\ 2,\ 6),\ B(0,\ 3,\ 8),\ C(-5,-1,\ 4),\ D(-3,\ 2,-6)$.

3) $A(2,1,1),\ B(6,-2,\ 2),\ C(4,\ 3,\ 2),\ D(-6,\ 8,\ 7)$.

4) $A(1,\ 2,\ 3),\ B(3,1,2),\ C(2,3,1),\ D(12,0,0)$.

Ответы на упражнения к § 10.

10.1. 1) правая; 2) правая; 3) правая; 4) левая.

10.2. 1) 20; 2) -2; 3) -9; 4) 18.

10.3. 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) нет.

10.4. 1) 1; 2) 76; 3) 14; 4) 0.

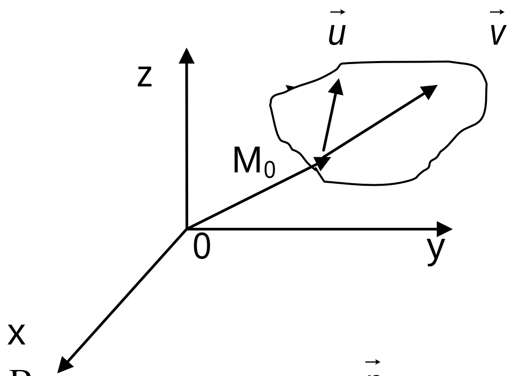
10.6. $\alpha=1\pm\sqrt{5}$.

10.7. 1) $\dfrac{23}{3},\ \dfrac{46}{\sqrt{34}}$; 2) $\dfrac{62}{3},\ \dfrac{124}{\sqrt{293}}$; 3) $\dfrac{55}{3},\ \dfrac{22}{3}$; 4) $3,\ 2\sqrt{3}$.

§ 11. Плоскость в пространстве.

Определение 1. Рассмотрим трехмерное пространство R^3. Пусть $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - прямоугольная декартова система координат, M_0 – фиксированная точка, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$ - ее радиус вектор, $\vec{u}, \vec{v}$ - два произвольных неколлинеарных вектора. Плоскостью P, проходящей через точку M_0 и параллельной векторам $\vec{u}, \vec{v}$ будем называть множество точек M пространства, радиус векторы $\vec{r}$ которых заданы формулой:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t_1\vec{u} + t_2\vec{v},\ t_1, t_2 \in R. \qquad (1)$$



Вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости P будем называть произвольный ненулевой вектор перпендикулярный плоскости.

Теорема 1. Пусть $\vec{n}(A, B, C)$ - вектор нормали к плоскости P, заданный своими координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - фиксированная точка плоскости, $\vec{r_0}$ - ее радиус вектор, $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости, $\vec{r}$ - ее радиус вектор. Тогда

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r_0}) = 0 \text{ -} \qquad (2)$$

векторное уравнение плоскости, и

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ -} \qquad (3)$$

уравнение плоскости по точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектору нормали $\vec{n}(A, B, C)$.

Доказательство. Из формулы (1) следует, что $\vec{r} - \vec{r_0} = +t_1\vec{u} + t_2\vec{v},\ \vec{n} \perp \vec{u}, \vec{n} \perp \vec{v}$, поэтому $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r_0}) = 0$ и формула (2) доказана.

Формула (3) следует из формулы (2).

Замечание. Если раскрыть скобки в формуле (3), получим:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0 \text{ или } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ -} \qquad (4)$$

общее уравнение плоскости (здесь $\vec{n}(A, B, C)$ - вектор нормали).

Пример 1. написать уравнение плоскости P, проходящей через точки A(1, 2, -3) и B(2, 3, 1) параллельно вектору $\vec{u}(3,1,-1)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}(1, 1, 4), \vec{u}(3, 1, -1)$, тогда вектор нормали $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] =$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 13\vec{j} - 2\vec{k};$$ $\vec{n}(-5, 13, -2)$ - вектор нормали, поэтому по формуле (3):

$-5(x-1)+13(y-2)-2(z+3)=0$

$-5x+13y-2z-27=0$ - уравнение искомой плоскости.

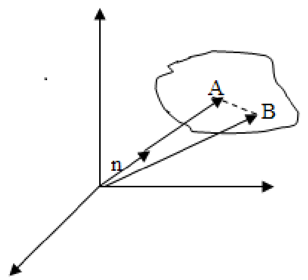
Замечание. Пусть $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ - три фиксированные точки плоскости Р и $D(x, y, z)$ - произвольные точки плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ - компланарны и, следовательно, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=0$ (см.§ 10. свойство 2), то есть:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ -} \qquad (5)$$

уравнение плоскости по трем точкам.

Нормальное уравнение плоскости.

Пусть $\overrightarrow{n^0}$ - вектор нормали к плоскости Р, $\left|\overrightarrow{n^0}\right|=1$, и пусть $\overrightarrow{n^0}$ направлен от начала координат к плоскости. Согласно §8 $\overrightarrow{n^0}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.



Пусть точка $A \in P$ и такая, что $\overrightarrow{OA}$ - сонаправлен с $\overrightarrow{n^0}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = p$ - расстояние от начала координат до плоскости, пусть $B(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости Р. Тогда $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{n^0}\right) = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{n^0}\right) = p$. С другой стороны по формуле (2) §8 $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{n^0}\right) = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\cdot\beta + z\cdot\cos\gamma$. Поэтому

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\cdot\beta + z\cdot\cos\gamma - p = 0 \text{ -} \qquad (6)$$

нормальное уравнение плоскости.

Пусть $d>0$. Рассмотрим плоскость P_1 параллельную Р, отстоящую от начала координат на $p+d$ единиц и такую, что любая точка $M(a, b, c) \in P_1$ и O(0, 0, 0) – расположены по разные стороны от плоскости Р. Тогда по формуле (6):

$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\cdot\beta+z\cdot\cos\gamma-(p+d)=0$ - уравнение плоскости P_1. Так как $M(a,b,c)\in P_1$, то $a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\cdot\beta+c\cdot\cos\gamma-(p+d)=0$. Поэтому $d=a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\cdot\beta+c\cdot\cos\gamma-p$ - (7)
расстояние от точки $M(a,b,c)$ до плоскости P заданной уравнением (6). Аналогично $d=-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma-p)$ - (8)
если $M(a,b,c)$ и O(0, 0, 0) лежат по одну сторону от плоскости P. Таким образом из (7), (8) следует, что $d=\left|a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma-p\right|$ - (9)
расстояние от произвольной точки $M(a,b,c)$ пространства до плоскости P, заданной нормальным уравнением (6).

Замечание. Для того, чтобы из уравнения (4) получить уравнение (6) надо представить его в виде:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

причем знак перед корнем выбираем противоположным знаку D.

Пример 2. Написать общее и нормальное уравнение плоскости P, проходящей через точки A(1, 1, 2), B(- 1, 2, 3), C(1, 2, 2). Найти расстояние от точки D(2, 1, 1) до плоскости P.

Решение. По формуле (5)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1-1 & 2-1 & 3-2 \\ 1-1 & 2-1 & 2-2 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$-(x-1)-2(z-2)=0;\ x+2z-5=0$ - общее уравнение плоскости; $\vec{n}=(1,0,2)$ - вектор нормали к плоскости; $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{5}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}z-\frac{5}{\sqrt{5}}=0$ - нормальное уравнение плоскости. Далее, по формуле (9):

$$d=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot2+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot1-\frac{5}{\sqrt{5}}\right|=\left|-\frac{5}{\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}$$ (сравни с примером 1 § 10).

Замечание. Рассмотрим плоскость P, заданную уравнением (4): $Ax+By+Cz+D=0$. Пусть $M_1(a_1,b_1,c_1)$ и $M_2(a_2,b_2,c_2)$ - две произвольные точки пространства $M_1, M_2\notin P$. Тогда, если

$$(A\cdot a_1+B\cdot b_1+C\cdot c_1+D)(A\cdot a_2+B\cdot b_2+C\cdot c_2+D)>0, \qquad (10)$$

то точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от плоскости P. В противном случае по разные стороны.

Пример 3. Дана пирамида ABCD; A(3, 2, 1), B(1, 3, 2), C(3, 3, 1), D(3, 2, 2). Написать уравнение плоскости. делящей пополам двугранный угол с ребром AB пирамиды ABCD.

Решение. Напишем уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1-3 & 3-2 & 2-1 \\ 3-3 & 3-2 & 1-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$-(x-3)-2(z-1)=0;\ x+2z-5=0$.

Напишем уравнение плоскости ABD:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1-3 & 3-2 & 2-1 \\ 3-3 & 2-2 & 2-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$(x-3)+2(y-2)=0;\ x+2y-7=0$. Точка $M(x,\ y,\ z)$ на искомой плоскости равноудалена от плоскостей ABC и ABD. По формуле (9):

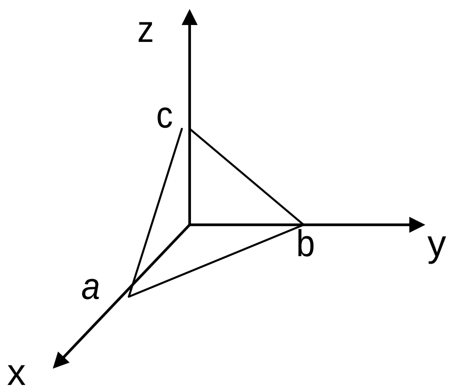
$$\left|\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2z}{\sqrt{5}}-\frac{5}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}-\frac{7}{\sqrt{5}}\right|, \qquad |x+2z-5| = |x+2y-7|,$$

$x+2z-5=\pm(x+2y-7)$, $x+2z-5=x+2y-7$ или $x+2z-5=-x-2y+7$, $y-z-1=0$ или $x+y+z-6=0$. Получим две взаимно-перпендикулярные плоскости. Одна из них делит внутренний угол, другая – внешний. Проверим условие (10) для точек C и D. Возьмем плоскость $y-z-1=0$, тогда, (см.(10)), $(3-1-1)(2-2-1)<0$, поэтому точки C и D лежат по разные стороны от плоскости; $y-z-1=0$ - искомая плоскость.

Замечание. Рассмотрим (4) - общее уравнение плоскости. Пусть $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде:

$$Ax+By+Cz=-D;\ \frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)}+\frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)}=1 \text{ или } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (11)$$

где $a=-\dfrac{D}{A};\ b=-\dfrac{D}{B};\ c=-\dfrac{D}{C};$ (11)_ - уравнение плоскости в отрезках.



Плоскость, заданная уравнением (11) проходит через точки $(a,\ 0,\ 0);\ (0,\ b,\ 0);\ (0,\ 0,\ c)$ на осях координат.

Предположим, что какие-то из коэффициентов A, B, C, D в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ равны нулю. Тогда:

1) если D=0, то плоскость проходит через начало координат;

2) если A=0, то плоскость проходит параллельно оси Ox;

3) если B=0, то плоскость проходит параллельно оси Oy;

4) если C=0, то плоскость проходит параллельно оси Oz;

5) если A=B=0, то плоскость проходит перпендикулярно оси Oz и т.д.

Теорема 2. Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ - две плоскости, заданные общими уравнениями. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \qquad (12)$$

где φ - двугранный угол между плоскостями. Если $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, то плоскости перпендикулярны. Если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ - то плоскости параллельны.

Доказательство. $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ - векторы нормалей к плоскостям. Поэтому угол между плоскостями находится через угол между векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ по формуле (12).

Упражнения к § 11.

Упражнение 11.1. Составить уравнения плоскостей, параллельных координатным плоскостям и проходящим через точку $M_0(3;-2;4)$.

Упражнение 11.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор $\vec{n}$ в каждом из следующих случаев:

1) $M_0(6;2;-2)$, $\vec{n}=(3,-5,1)$;

2) $M_0(1;-5;3)$, $\vec{n}=(3,0,-3)$.

Упражнение 11.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 и параллельную двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ в каждом из следующих случаев:

1) $M_0(4;1;-2)$, $\overrightarrow{a_1}=(2,-1,-2)$, $\overrightarrow{a_2}=(1,3,0)$;

2) $M_0(1;1;0)$, $\overrightarrow{a_1}=(3,-3,2)$, $\overrightarrow{a_2}=(2,1,4)$;

3) $M_0(3;4;2)$, $\overrightarrow{a_1}=(3,3,1)$, $\overrightarrow{a_2}=(1,0,2)$.

Упражнение 11.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 и перпендикулярную двум плоскостям P_1 и P_2:

1) $M_0(4;1;-2)$, $P_1: 2x+3y-z+5=0; P_2: x-2y+3z-1=0$;

2) $M_0(1;1;0)$, $P_1: x+y-z+1=0; P_2: 2x-y+3z-1=0$;

Упражнение 11.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(0;0;7), M_2(2;2;4), M_3(3;1;2)$;

2) $M_1(4;3;0), M_2(1;-1;2), M_3(7;0;-8)$;

3) $M_1(8;0;-2), M_2(1;5;-1), M_3(3;0;4)$.

Упражнение 11.5. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью, в каждом из следующих случаев:

1) $5x+y-z+20=0$; 2) $x+2y+4z=8$;

3) $2x-y+5z-40=0$; 4) $6x+2y-5z+30=0$.

Упражнение 11.6. Записать уравнение плоскости, проходящей через две точки M_1, M_2 и параллельной данному вектору $\vec{a}$:

1) $M_1(1;-2;-1), M_2(4;1;1), \vec{a}=(5;3;4)$;

2) $M_1(3;2;1), M_2(1;-4;3), \vec{a}=(2;-1;-2)$.

Упражнение 11.7. Среди данных плоскостей указать параллельные, совпадающие, перпендикулярные:

1) $2x-3y+4z-5=0$; 2) $4x-6y+8z-10=0$;

3) $6x-9y+12z-15=0$; 4) $3x+2y-8=0$.

Упражнение 11.8. Найти угол между двумя плоскостями:

1) $3x-2y+5z+12=0$; $x+4y+z+4=0$;

2) $5x-3y+z-20=0$; $-x+10y+2z-17=0$;

3) $2x-z+9=0$; $5y+4z-2=0$.

Упражнение 11.9. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;4;0)$ и параллельной плоскости $3x+y-4z-7=0$.Найти расстояние между плоскостями.

Упражнение 11.10. Дана вершина параллелепипеда $M(1;-2;1)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат три его непараллельные грани: $2x-y+2z-4=0$, $3x+5y-z-11=0$, $2x+y+3z-10=0$. Записать уравнения плоскостей, в которых лежат три другие грани. Найти длину диагонали MN этого параллелепипеда.

Упражнение 11.11. Вычислить расстояние от данной точки M до указанных плоскостей:

1) $M(2;1;3)$, $x-5y+z+4=0$;

2) $M(1;3;-4)$, $2x-y+4z-1=0$;

3) $M(4;0;-2)$, $x+5z-3=0$.

Упражнение 11.12. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

1) $x-4y+z+6=0$; $x-4y+z-10=0$;

2) $2x+y-3z+16=0$; $4x+2y-6z-3=0$;

3) $5x-y+6z-1=0$; $5x-y+6z+4=0$.

Упражнение 11.13. Записать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x+2y+z-4=0$ и отстоящих от нее на расстояние $\alpha=4$.

Упражнение 11.14. Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы между двумя пересекающимися плоскостями:

1) $x-y+z-2=0$; $2x+2y-2z+3=0$;

2) $z-2x-3y+4=0$; $3x-2y+z-4=0$.

Упражнение 11.15. Дан четырехугольник ABCD, $A(1;0;1), B(-1;1;2), C(-1;3;-1), D(1,-2,2)$ и плоскости $x+4y+z+4=0$,

$3x-2y+5z+12=0$, рассекающие плоскость четырехугольника на четыре угла . Определить как расположены вершины четырехугольника(в одном угле, в смежных или вертикальных углах).

Ответы на упражнения к § 11.

11.1. $x-3=0,\ y+2=0,\ z-4=0$.

11.2. 1) $3x-15y+z-6=0$; 2) $3x-3z+6=0$.

11.3. 1) $6x-2y+7z-8=0$; 2) $14x+8y-9z+22=0$;

3) $6x-5y-3z+8=0$.

11.4. 1) $7x+15y-4z-28=0$; 2) $38x-18y+23z-98=0$;

3) $30x+37y+25z-190=0$.

11.5. 1) $a=-4,\ b=-20,\ c=20$; 2) $a=8,\ b=4,\ c=2$;

3) $a=20,\ b=-40,\ c=8$; 4) $a=-5,\ b=-15,\ c=6$.

11.6. 1) $6x-2y-6z-4=0$; 2) $14x+14z-56=0$.

11.7. Плоскости 1) и 2) параллельны; плоскости 1) и 3) совпадают; плоскость 4) перпендикулярна плоскостям 1), 2), 3).

11.8. $\varphi=90^0$; 2) $\varphi\approx 57^0 22'$; 3) $\varphi\approx 73^0 78'$.

11.9. $3x+y-4z-10=0$.

11.10. $2x-y+2z-6=0$, $3x+5y-z+8=0$, $2x+y+3z-3=0$, $|MN|=\sqrt{17}$.

11.11. 1) $d=\dfrac{4}{\sqrt{26}}$; 2) $d=\dfrac{17}{\sqrt{21}}$; 3) $d=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$.

11.12. 1) $\dfrac{16}{3\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{35}{3\sqrt{6}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{62}}$.

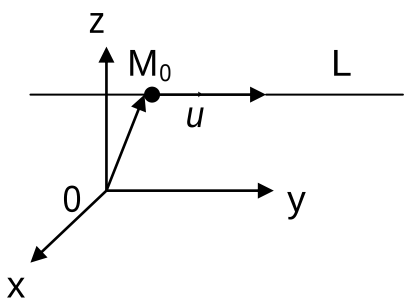
11.13. 1) $2x+2y+z+6=0$; 2) $2x+2y+z-16=0$.

11.14. 1) $4y-4z+7=0,\ 4x-1=0$; 2) $5x+y-8=0,\ x-5y+2z=0$.

§ 12. Прямая линия в пространстве.

Определение 1. Пусть $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - прямоугольная декартова система координат пространства. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка пространства, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$ - ее радиус вектор, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ - произвольный ненулевой вектор пространства. Прямой линией L, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{u}$ называется множество точек пространства, радиус-векторы $\vec{r}(x, y, z)$ которых задаются в виде:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u},\ t \in R \qquad (1)$$



Замечание. Уравнение (1) – векторное уравнение прямой. Перепишем формулу (1) в координатном виде: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_2, u_3)$,

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2\ ,\ t \in R. \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Уравнение (2) – параметрическое уравнение прямой. Выразим из (2) параметр t:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$. Если даны две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямой L, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ - направляющий для L, поэтому из формулы (3) получим:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\ - \qquad (4)$$

уравнение прямой по двум точкам $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Пример 1. Написать уравнение высоты, проходящей через вершину D пирамиды ABCD, если A(1, 1, 2), B(-1, 2,3), C(1, 2, 2), D(2, 1, 1).

Решение. Запишем уравнение плоскости P, проходящей через три точки A, B, C (см. пример 2 §11)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;\quad x+2z-5=0,\ \vec{n}(1,\,0,\,2)$$ - вектор нормали к плоскости P – будет направляющим вектором высоты.

Поэтому по формуле (3) –

$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{2}$ - каноническое уравнение высоты.

Напишем еще параметрическое уравнение высоты. Для этого каждую дробь приравняем к t.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{2}=t;\quad \begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases},\ t\in R.$$

Замечание. В формуле (3) допускают запись, когда в знаменателе стоят нули(если некоторые координаты направляющего вектора $\vec{u}$ равны нулю). Рассмотрим две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Если векторы нормалей $\overrightarrow{n_1}(A_1,\,B_1,\,C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2,\,B_2,\,C_2)$ не коллинеарны, то плоскости не параллельны и поэтому пересекаются по прямой L. Таким образом система уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{5}$$

задает прямую (общее уравнение прямой).

Пример 2. Прямая задана общим уравнением $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y-2z+2=0 \end{cases}$. Написать каноническое уравнение прямой.

Решение. Найдем хотя бы одну точку на прямой. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y-2z=-2 \end{cases}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x+2y=-3 \\ -3y=8z-2. \end{cases}$ Пусть $z=1$, тогда $y=-2;\ x=1;\ M_0(1,\,-2,\,1)$ - точка на прямой.

Найдем направляющий вектор $\vec{u}$ прямой. Пусть $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ - векторы нормали к плоскостям, тогда $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}$ и $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}$, поэтому в качестве направляющего можно взять, например, вектор $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\,\overrightarrow{n_2}\right]$. $\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\vec{i}+8\vec{j}-3\vec{k}$.

Тогда по формуле (3): $\dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z-1}{-3}$ - каноническое уравнение прямой.

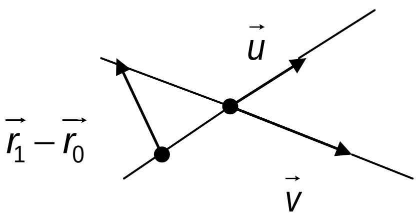
Теорема 1. Пусть $\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{u},\ \vec{r}=\vec{r_1}+t\cdot\vec{v}$ - две прямые L_1 и L_2.

а) Прямые пересекаются или параллельны тогда и только тогда, когда $(\vec{r_1}-\vec{r_0},\vec{u},\vec{v})=0$.

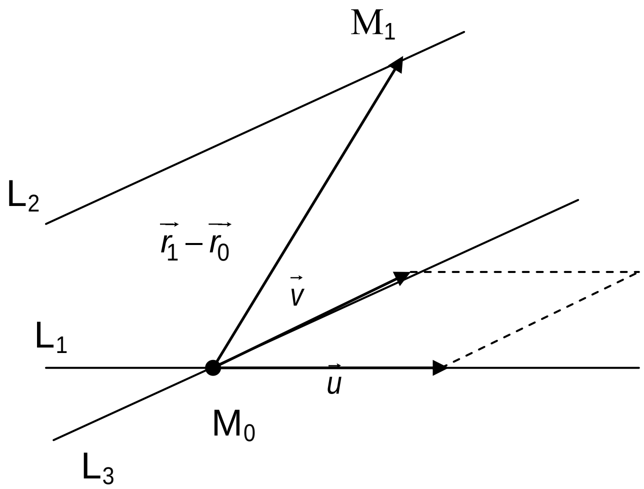
б) Прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда $(\vec{r_1}-\vec{r_0},\vec{u},\vec{v})\neq 0$. При этом расстояние $d(L_1,L_2)$ между скрещивающимися прямыми:

$$d(L_1,L_2)=\frac{\left|(\vec{r_1}-\vec{r_0},\vec{u},\vec{v})\right|}{\left\|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right\|}. \qquad (6)$$

Доказательство. Если прямые пересекаются или параллельны, то векторы $\vec{u},\vec{v},\vec{r}-\vec{r_0}$ компланарны, и, следовательно, $(\vec{r_1}-\vec{r_0},\vec{u},\vec{v})=0$



Пусть прямые L_1 и L_2 скрещиваются. M_0 и M_1 – точки на L_1 и L_2, радиус векторы которых равны $\vec{r_0}$ и $\vec{r_1}$. Проведем через точку M_0 прямую L_3 параллельную прямой L_2 и построим параллелепипед на векторах $\vec{u},\vec{v}$, и $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{r_1}-\vec{r_0}$ (считаем, что тройка $(\vec{u},\vec{v},\vec{r}-\vec{r_0})$ - правая).



Тогда $d(L_1,L_2)=h_{параллелепипеда}$ – высота параллелепипеда, опущенная из точки M_1 на плоскость, образованную прямыми L_1 и L_3. Поэтому

$\left|(\vec{r_1}-\vec{r_0},\vec{u},\vec{v})\right|=V_{параллелепипеда}=S_{осн}\cdot h=\left\|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right\|\cdot h$, откуда следует формула (6).

Пример 3. Заданы прямые

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{-1}$ и $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Доказать, что они скрещиваются и найти расстояние d между ними.

Решение. $\vec{u}=(2,\,0,-1),\ \vec{v}=(-1,\,-2,\,1)$ - направляющие векторы прямых $\vec{r_0}=(2,1,-3),\ \vec{r_1}=(-2,-3,\,3)$.

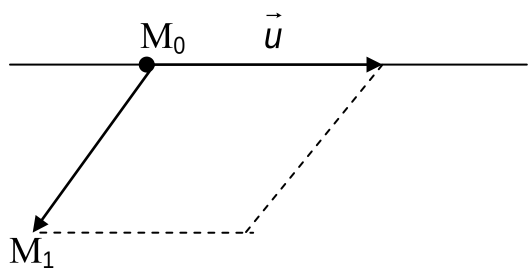
$$(\vec{r_1}-\vec{r_0},\,\vec{u},\,\vec{v})=\begin{vmatrix}-4 & -4 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-12\neq 0$$, следовательно прямые – скрещиваются.

По формуле (6): $d=\frac{\left|(\vec{r_1}-\vec{r_0},\,\vec{u},\,\vec{v})\right|}{\left\|\left[\vec{u},\,\vec{v}\right]\right\|}$, $\left[\vec{u},\,\vec{v}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$

$\left\|\left[\vec{u},\,\vec{v}\right]\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$. Поэтому $d=\frac{12}{\sqrt{21}}$.

Замечание. Пусть прямая L задана каноническим уравнением:

$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$, где $\vec{u}(u_1,\,u_2,\,u_3)$ - направляющий вектор прямой и $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ - точка на прямой. Пусть $M_1(x_1,\,y_1,\,z_1)$ - произвольная точка пространства. Найдем расстояние $D(M_1,\,L)$ от точки M_1 до прямой L. Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{u}$.



Тогда $d(M_1,\,L_1)=h_{параллелограмма}=\frac{\left\|\left[\vec{u},\,\overrightarrow{M_0M_1}\right]\right\|}{\left|\vec{u}\right|}$. (7)

Пример 4. В условиях примера 3 найдем расстояние от точки M_1 (-2, -3, 3) до прямой L_1: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{-1}$.

Решение. M_0(2,1- 3) точка на прямой,

$\overrightarrow{M_0M_1}(-4,-4,6), \vec{u}(2,0,-1)$ - направляющий вектор прямой,

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5},\ \left[\vec{u},\ \overrightarrow{M_0M_1}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\left|\left[\vec{u},\ \overrightarrow{M_0M_1}\right]\right| = \sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-8)^2} = 12.$$

Тогда по формуле (7): $d(M_1,\ L_1) = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

Упражнения к § 12.

Упражнение 12.1. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через заданную точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$.

1) $M_0(2,\ 0,\ 4),\ \vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

2) $M_0(-1,\ 4,\ 2),\ \vec{s} = \vec{j} - 2\vec{k}$;

3) $M_0(5,\ -2,\ 0),\ \vec{s} = (2,\ 4, -5)$.

Упражнение 12.2. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку M_1 перпендикулярно плоскости:

1) $M_1(2,\ -5,\ 4),\ 3x + y - 7 = 0$;

2) $M_1(3,\ 0, -5),\ x + 2y + 3z + 11 = 0$.

Упражнение 12.3. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку M_0 параллельно прямой:

1) $M_0(-1,\ 4,\ 0),\ x = 3 - 4t,\ y = 2 + t,\ z = -2 - 6t$;

2) $M_0(5, 1, -2),\ \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{4}$.

Упражнение 12.4. Записать параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_0(-3,\ 2,\ 1)$ и параллельной вектору, образующему с координатными осями углы $\alpha = \dfrac{\pi}{3},\ \beta = \dfrac{\pi}{3},\ \gamma = \dfrac{\pi}{4}$.

Упражнение 12.5. Дан треугольник с вершинами A(- 1, 3, 4); B(2, 0, 1); C(1, 0, -5). Записать уравнения его сторон, медиан.

Упражнение 12.6. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(2, 3, 4); B(3, -4, 1); C(4, 1, -1). Записать уравнения его сторон и диагоналей.

Упражнение 12.7. Найти косинус угла между двумя прямыми:

1) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z-5}{-2}$ и $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$;

2) $x = 3 - t,\ y = 2t,\ z = 4 + t$ и $x = 5 + t,\ y = 8 - t,\ z = 1 + 3t$.

Упражнение 12.8. Вычислить расстояние от точки $M(2,\ 3,\ -1)$ до каждой из следующих прямых:

1) $x = 2 + t,\ y = 3t,\ z = 6 - 2t$;

2) $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

Упражнение 12.9. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

1) $x=1+3t,\ y=-t,\ z=4+2t$ и $x=4+6t,\ y=1-2t,\ z=3+4t$;

2) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{6}$ и $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-2}{18}$.

Упражнение 12.10. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 4.

Упражнение 12.11. Составить параметрические и канонические уравнения следующих прямых:

1) $3x+y-2z-6=0,\ x-3y+z+3=0$;

2) $2x+2y-3z+3=0,\ x+2y+z-1=0$;

3) $5x-2y+3z-3=0,\ 4x-3y+2z-1=0$.

Упражнение 12.12. Записать параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку M_0 параллельно прямой:

1) $M_0(4,-3,1),\ x+2y+3z-5=0,\ 2x+y+2z=3=0$;

2) $M_0(2,0,4),\ 2x-y+6=0,\ x+y-z-7=0$.

Упражнение 12.13. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x-y+5z-6=0, x+3y-z-3=0$ параллельно плоскости $3x-y+2z+5=0$.

Упражнение 12.14. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $3x-2y+4z-1=0, x+2y+3z-5=0$ и равноудаленную от точек $M(2,3,-2)$ и $N(-2,1,2)$.

Упражнение 12.15. Исследовать взаимное расположение прямых:

1) $x-2y-4z=0, x+2y+2=0$ и $x-2y-6=0, 3x+3y+4z=0$;

2) $x=8+3t,\ y=7-2t,\ z=11+t$ и $x=5-6t,\ y=9+4t,\ z=10-2t$;

3) $x=2+2t,\ y=1,\ z=-2t$ и $x=2t,\ y=0,\ z=-2t$.

Упражнение 12.16. Найти угол между прямой и плоскостью в каждом из следующих случаев:

1) $x=2-t,\ y=5+10t,\ z=t$; $3x+y-7=0$;

2) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+3}{1}$; $x-y+z-5=0$;

3) $x-2y+z-4=0, 2x+y-z-7=0$; $9x-y-2=0$.

Упражнение 12.17. Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $x=1+4t,\ y=-3+2t,\ z=6+2t$; $x+3y-5z-2=0$;

2) $x=3+t,\ y=-2+4t,\ z=5+4t$; $4x-7y+6z-56=0$;

3) $x=1+3t,\ y=-2+4t,\ z=5-2t$; $6x-5y+3z-7=0$.

Упражнение 12.18. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{0}$ с плоскостью $2x-y-8=0$.

Упражнение 12.19. Найти точку, симметричную точке $P(2,-1,1)$ относительно :

1) прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$;

2) плоскости $x-y+z+5=0$.

Упражнение 12.20. Найти проекцию точки $N(2,1,\ -2)$ на:

1) прямую $x=1+2t,\ y=2-t,\ z=4+t$;

2) плоскость $4x-y+z-5=0$.

Упражнение 12.21. Найти точку, симметричную точке $P(-3,2,7)$ относительно :

прямой $x-1=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{2}$;

Упражнение 12.22. Найти точку, симметричную точке $P(2,3,1)$ относительно :

плоскости $x+2y+z-3=0$.

Упражнение 12.23. Даны прямые $L_1: x-1=y=z-2$ и $L_2:\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$. Найти

1) точку пересечения прямых;
2) Написать уравнение плоскости, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Упражнение 12.24. Даны прямые $L_1: x-1=y=z-2$ и $L_2:\begin{cases} x=t+1 \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$. Доказать что прямые скрещиваются и найти:

1) Расстояние между прямыми;
2) Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_1 параллельно L_2;
3) Уравнение общего перпендикуляра к прямым L_1 и L_2.

Упражнение 12.25. Дана плоскость $P: 2x+3y-5z+1=0$ и точки $M_1(1;2;1), M_2(3,1,0)$. Найти:

1) Уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2;
2) Уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 перпендикулярно плоскости P;
3) Уравнение проекции прямой L на плоскость P.

Упражнение 12.26. Даны прямая $L: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$ и точка $M(1;2;1)$. Найти

1) Уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку М перпендикулярно прямой L;
3) Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки М на прямую L;
4) Проекцию точки М на прямую L;

Ответы на упражнения к § 12.

12.1. 1) $x=2+t,\ y=-t,\ z=4+t$; 2) $x=-1,\ y=4+t,\ z=2-2t$;
3) $x=5+2t,\ y=-2+4t,\ z=-5t$.

12.2. 1) $x=2+3t,\ y=-5+t,\ z=4$,. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-4}{0}$;

2) $x=3+t,\ y=2t,\ z=-5+3t$, $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+5}{3}$.

12.3. 1) $x=-1-4t,\ y=4+t,\ z=-6t$,. $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{-6}$;

2) $x=5+4t,\ y=1,\ z=-2+4t$, $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{4}$.

12.4. $x=-3+t,\ y=2+t,\ z=1+\sqrt{2}t$,. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{\sqrt{2}}$.

12.5. 1) уравнения сторон: AB: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-4}{-3}$;

AC: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-4}{-2}$; BC: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

2) уравнения медиан: из вершины A: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{-7}=\dfrac{z-4}{-5}$;

из вершины B: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, из вершины C: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

12.6. AB: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+5}{6}$; BC: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$;

CD: $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-6}$; AD: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z=5}{-2}$;

AC: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+5}{4}$; BD: $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+4}{9}=\dfrac{z-1}{-8}$.

12.7. 1) $\cos\varphi=\dfrac{2}{3\sqrt{255}}$; 2) $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2\sqrt{21}}$.

12.8. 1) $5\sqrt{\dfrac{19}{14}}$; 2) $\sqrt{11}$.

12.9. 1) $\sqrt{\dfrac{59}{7}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2130}{41}}$.

12.10. $\frac{4}{\sqrt{6}}$.

12.11. 1) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$; $x=2+t,\ y=2+t,\ z=1+2t$;

2) $\frac{x}{8}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{2}$; $x=8t,\ y=-5t,\ z=1+2t$;

3) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-7}$; $x=1+5t,\ y=1+2t,\ z=-7t$.

12.12. 1) $x=4+t,\ y=-3,\ z=1-t$; $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{-1}$;

2) $x=2+t,\ y=2t,\ z=4+3t$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{3}$.

12.13. $3x-y+2z-9=0$.

12.14. $4x+4y+8z-13=0$.

12.15. 1) скрещиваются; 2) совпадают; 3) параллельны.

12.16. 1) $\approx 12^0 66'$; 2) $\approx 63^0$; 3) 0^0.

12.17. 1) параллельны; 2) параллельны; 3) пересекаются.

12.18. M(5, 2, - 1).

12.19. 1) $Q(4,-2,-4)$; 2) $Q(-10,5,-5)$.

12.20. 1) $M\left(0;\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$; 2) M(- 2; 2; - 3).

12.21. $Q(9,2,1)$.

12.22. $Q(0,-1,-1)$.

12.23. 1) $O(1,0,2)$; 2) $\alpha: x+y-2z+3=0$.

12.24. 1) $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\alpha: x+y-2z+3=0$; 3) $\begin{cases} x-y-1=0, \\ x+y+z-4=0. \end{cases}$

12.25. 1) $L: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$; 2) $P_1: 8x+13y+11z-45=0$;

3) $\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0, \\ x+y+z-4=0. \end{cases}$

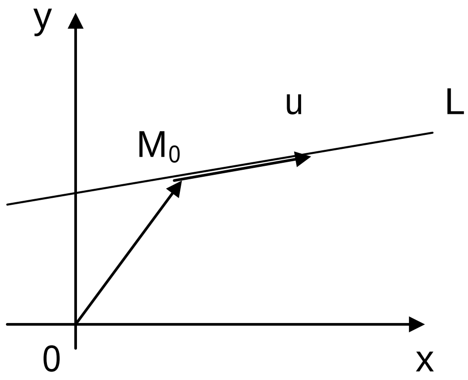
12.26. 1) $5x-y+9z-12=0$; 2) $2x+y-z-3=0$;

3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$; 4) $N\left(\frac{7}{3};-\frac{11}{6};\frac{1}{6}\right)$.

§ 13. Прямая линия на плоскости.

Определение 1. Пусть $(0, \vec{i}, \vec{j})$ - прямоугольная декартова система координат на плоскости, $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка плоскости, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}(x_0, y_0)$ - ее радиус вектор, $\vec{u}(u_1, u_2)$ - ненулевой вектор. Прямой линией L, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{u}$ называется множество точек плоскости, радиус-векторы $\vec{r}(x, y)$ которых записываются в виде:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u}, t \in R \qquad (1)$$



Замечание. Определение прямой на плоскости аналогично определению прямой в пространстве (определение 1 § 12). Аналогично §12 имеем:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}, \; t \in R. \qquad (2)$$

Уравнение (2) – параметрическое уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{u}(u_1, u_2)$.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \; - \qquad (4)$$

уравнение прямой по двум точкам $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$.

Определение 2. Вектором нормали к прямой (1) будем называть произвольный ненулевой вектор $\vec{n}$ перпендикулярный прямой.

Замечание. Любые два вектора нормали к прямой L – коллинеарны. Если $\vec{n}(A, B)$ - вектор нормали к L, то $(\vec{n}, \vec{u}) = 0$, то есть:

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r_0}) = 0 \; - \qquad (5)$$

векторное уравнение прямой. Так как $\vec{r} - \vec{r_0}(x - x_0, y - y_0)$, то из (5) следует:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \text{ -} \qquad (6)$$

уравнение прямой по точке $M_0(x_0, y_0)$ и вектору нормали $\vec{n}(A, B)$. Раскроем скобки в формуле (6), получим:

$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0$$

$$Ax+By+C=0 \text{ -} \qquad (7)$$

общее уравнение прямой.

Пример 1. Дана прямая L: $4x-3y+12=0$ и точка М(1; 2). Проверить, что М не принадлежит прямой и написать уравнение прямой, проходящей через точку М

1) параллельно прямой L; 2) перпендикулярно прямой L.

Решение. Подставим координаты точки М в уравнение: $4\cdot 1-3\cdot 2+12\neq 0$, поэтому точка М не принадлежит прямой.

1) Так как прямые параллельны, то их векторы нормали совпадают, поэтому $\vec{n}(4;-3)$ - вектор нормали к искомой прямой. Тогда по формуле (6):

$$4(x-1)-3(y-2)=0$$

$4x-3y+2=0$ - искомая прямая.

2) Так как прямые перпендикулярны, то вектор нормали $\vec{n}(4;-3)$ для первой прямой будет направляющим вектором для искомой прямой, поэтому по формуле (3):

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-3}$ - искомая прямая.

Нормальное уравнение прямой.

Пусть $\overrightarrow{n^0}$ - вектор нормали к прямой L, $\left|\overrightarrow{n^0}\right|=1$ и пусть $\overrightarrow{n^0}$ направлен от начала координат к прямой, $\overrightarrow{n^0}\,(\cos\alpha, \cos\beta)$.

Тогда, аналогично §11,

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta-p=0 \text{ -} \qquad (8)$$

нормальное уравнение прямой (р – расстояние от начала координат до прямой). При этом, если $M(a, b)$ - произвольная точка плоскости, то

$$d=\left|a\cos\alpha+b\cos\beta-p\right| \text{ -} \qquad (9)$$

расстояние от точки М до прямой. Для того, чтобы из уравнения (7) получить уравнение (8) надо представить его в виде:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

причем знак перед корнем выбирается противоположным знаку С.

Пример 2. В условиях примера 1 найдем расстояние от точки М до прямой L.

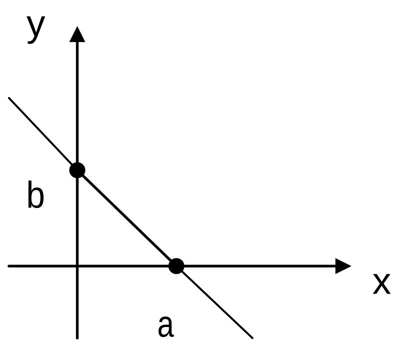
Решение. $L: 4x-3y+12=0, \vec{n}(4;-3)$ - вектор нормали, $|\vec{n}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. Тогда $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$ - нормальное уравнение прямой, поэтому, по формуле (9):

$$d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 2-\frac{12}{5}\right|=\frac{10}{5}.$$

Замечание. Рассмотри (7) – общее уравнение прямой. Пусть $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$. Тогда уравнение (7) можно переписать в виде:

$$Ax+By=-C; \frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1 \text{ или } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (10)$$

где $a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$; (10) – уравнение прямой в отрезках. Прямая , заданная уравнением (10), проходит через точки (a, 0), (0, b) на осях координат:



Предположим, что какие-то из коэффициентов А, В, С в уравнении $Ax+By+C=0$ равны нулю. Тогда:

1) если С=0, то прямая проходит через начало координат;
2) если А=0, то прямая проходит параллельно оси Ох;
3) если В=0, то прямая проходит параллельно оси Оу.

Аналогично теореме 2 §11 верна теорема:

Теорема 1. Пусть $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$ две прямые, заданные общими уравнениями. Тогда

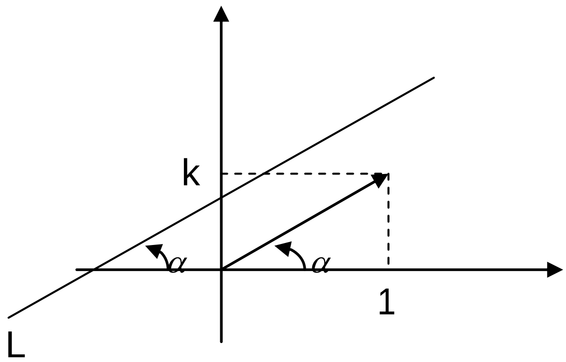
$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \qquad (11)$$

Где φ - угол между прямыми. Если $A_1A_2+B_1B_2=0$, то прямые перпендикулярны.

Если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны

Пусть $Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой L. Пусть $B \neq 0$. Тогда $y - -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Иди в других обозначениях $y = kx + b$ - (12)

Уравнение прямой с угловым коэффициентом к. При этом вектор $\vec{n}(-k.1)$ - вектор нормали к пря мой L. Тогда $u(1.\,k)$ - направляющий вектор прямой:



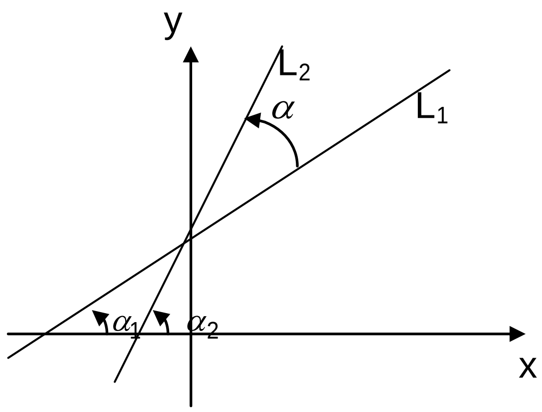
и $\mathrm{tg}\,\alpha = k$ - тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox (угол α отсчитывается от оси Ox и прямой против часовой стрелки).

Формула (12) получена преобразованием формулы (7). Аналогичные преобразования формулы (6) дадут формулу:

$$y = y_0 + k(x - x_0) \quad - \qquad (13)$$

уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ с угловым коэффициентом k.

Рассмотрим две прямые $L_1 : y = k_1x + b_1$ и $L_2 : y = k_2x + b_2$, заданные уравнениями (12):

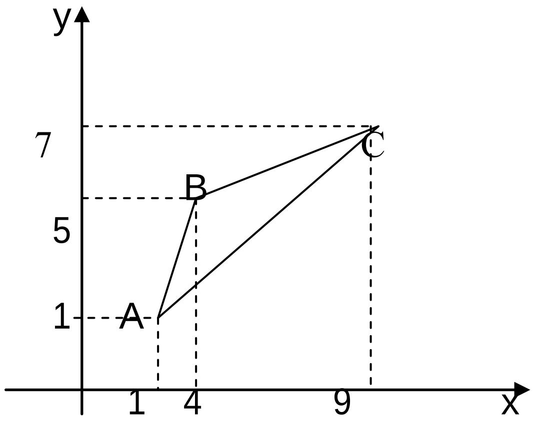


Тогда $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = k_1,\ \mathrm{tg}\,\alpha_2 = k_2,\ \alpha = \alpha_2 - \alpha_1,$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \quad - \qquad (14)$$

формула угла φ между прямыми (угол φ отсчитывается от прямой L_1 и L_2 против часовой стрелки).

Пример 3. Дан ΔABC, $A(1,1)$; $B(4,5)$; $C(9,7)$. Написать уравнение стороны АС, уравнение медианы и высоты, проведенных из вершины В, найти длину высоты. Написать уравнение биссектрисы, проведенной из вершины А. Сделать чертеж.



1) По формуле (4):

$AC: \dfrac{x-1}{9-1}=\dfrac{y-1}{7-1}; \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{6}; \; y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$ - уравнение стороны АС.

2) Найдем середину АС. $M\left(\dfrac{9+1}{2}; \dfrac{7+1}{2}\right)=(5;4)$, тогда $\dfrac{x-4}{5-4}=\dfrac{y-5}{4-5}$;

$x-4=-(y-5); \; y=-x+9$ - уравнение медианы.

3) $\overrightarrow{AC}(8;6)$ - вектор нормали к высоте

$8(x-4)+6(y-5)=0; \; 8x+6y-72=0; \; 4x+3y-36=0$ - уравнение высоты.

4) $3x-4y+1=0$ - уравнение стороны АС;

$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{1}{5}=0$ - нормальное уравнение стороны АС.

$d=\left|-\dfrac{3}{5}\cdot 4+\dfrac{4}{5}\cdot 5-\dfrac{1}{5}\right|=\dfrac{7}{5}$ - длина высоты.

5) $\overrightarrow{AB}(3,4)$, $\overrightarrow{AC}(8,6)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overrightarrow{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

$\vec{l}_1=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right); \; \vec{l}_2=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\left(\dfrac{8}{10}; \dfrac{6}{10}\right)=\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$.

$\vec{l}_1+\vec{l}_2=\left(\dfrac{7}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$ - направляющий вектор биссектрисы

$\dfrac{x-1}{\frac{7}{5}}=\dfrac{y-1}{\frac{7}{5}}; \; x-1=y-1; \; y=x$ - биссектриса угла А.

Упражнения к § 13.

Упражнение 13.1. Составить уравнения прямых, параллельных биссектрисе второго координатного угла и отсекающих на оси Оу отрезки, величины которых $b_1 = 3,\ b_2 = -7$.

Упражнение 13.2. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $4x - 2y + 7 = 0$ и проходящей через точку М(2; -1). Найти расстояние между прямыми.

Упражнение 13.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М(3; 2) и перпендикулярной прямой $5x + y = 6$.

Упражнение 13.4. Записать уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки:

1) $a = 2,\ b = -3$; 2) $a = 2\dfrac{1}{3},\ b = -4\dfrac{1}{2}$.

Упражнение 13.5. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой в каждом из следующих случаев:
1) $3x - y + 6 = 0$; 2) $x + 2y - 1 = 0$.

Упражнение 13.6. Диагонали ромба, принятые за оси координат, равны 8 и 10. Составить уравнения сторон ромба.

Упражнение 13.7. При каком значении С прямая $2x - 5y + C = 0$ отсекает на оси Ох отрезок $a = 6$?

Упражнение 13.8. При каких значениях А прямая $Ax + 3y + 12 = 0$ отсекает на координатных осях отрезки равной длины?

Упражнение 13.9. Найти значения В, при которых прямая $3x + By - 15 = 0$ образует с осью Ох соответственно углы 1) 45^0 ; 2) 135^0.

Упражнение 13.10. Через точку пересечения прямых $l_1,\ l_2$ провести прямую, параллельную прямой l в каждом из следующих случаев:
1) $l_1: 3x + 5y - 7 = 0,\ l_2: 2x + y - 7 = 0;\ l: x + 5y - 2 = 0$;
2) $l_1: 4x + y - 1 = 0,\ l_2: 3x - 5y + 1 = 0;\ l: x + 7y + 2 = 0$;
3) $l_1: 2x + y + 5 = 0,\ l_2: 5x + 4y - 7 = 0;\ l: x - y - 1 = 0$.

Упражнение 13.11. Найти углы между прямыми $l_1,\ l_2$ и расстояние от точки М до прямой l_1 в каждом из следующих случаев:
1) $l_1: 2x + 5y - 1 = 0,\ l_2: 4x - y - 2 = 0;\ M(-4,\ 2)$;
2) $l_1: x - y + 6 = 0,\ l_2: 5x - y - 6 = 0;\ M(3,\ 4)$;
3) $l_1: 11x - 2y - 7 = 0,\ l_2: 3x + y - 4 = 0;\ M(2,\ -2)$.

Упражнение 13.12. Через точку пересечения прямых $l_1,\ l_2$ провести прямую образующую угол φ с прямой l в каждом из следующих случаев:
1) $l_1: 3x - y - 8 = 0,\ l_2: x + y - 4 = 0; \varphi = 45^0;\ l: x + 5y - 1 = 0$;
2) $l_1: 2x - y + 5 = 0,\ l_2: x - y + 7 = 0; \varphi = 135^0;\ l: 2x + y - 1 = 0$.

Упражнение 13.13. Составить уравнения двух перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных из точек пересечения ее с осями координат.

Упражнение 13.14. Найти точку Q, симметричную точке N относительно прямой l в каждом из следующих случаев:
1) $N(2,-2), l: 3x+y-14=0$; 2) $N(2,7), l: 2x+y-1=0$;
3) $N(5,5), l: x-y-2=0$; 4) $N(6,1), l: 4x+2y-5=0$.

Упражнение 13.15. Составить уравнения прямых, на которых лежат медианы треугольника с вершинами A(3, -1), B(3, 5), C (1, 1).

Упражнение 13.16. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами A(2, 1), B(4, 3), C(6,3).

Упражнение 13.17. Стороны трапеции лежат на прямых, заданных уравнениями: $2x+y-6=0$, $6x+3y-9=0$, $x-y-3=0$, $5x+y+6=0$.
Найти точку пересечения диагоналей.

Упражнение 13.18. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из точки N к прямой l в каждом из следующих случаев:
1) $N(2, 2)$, $l: 5y-x+2=0$; 2) $N(1,-3), l: x-y+3=0$.

Упражнение 13.19. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $3x+4y-14=0$ и отстоящей от нее на расстоянии d=4.

Упражнение 13.20. Одна из сторон квадрата лежит на прямой $2x-y+5=0$, а центр его находится в точке M(2, -5). Составить уравнения его трех других сторон.

Ответы на упражнения к § 13.

13.1. $x+y-3=0$; $x+y+7=0$.
13.2. $2x-y-5=0$.
13.3. $x-5y+7=0$.
13.4. 1) $3x-2y-6=0$; 2) $27x-14y-63=0$.
13.5. 1) 6; 2) $\frac{1}{4}$.
13.6. $5x-4y+20=0$; $5x+4y-20=0$; $5x+4y+20=0$; $5x-4y-20=0$.
13.7. C=- 12. 13.8. A=3.
13.9. 1) B= - 3; 2) B=3.
13.10. 1) $x+5y+1=0$; 2) $x+7y-7=0$; 3) $x-y+22=0$.
13.11. 1) $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{22}{5}, d=\frac{1}{\sqrt{29}}$; 2) $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}, d=\frac{5}{\sqrt{2}}$;
2) $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}, d=\frac{19}{5\sqrt{5}}$.
13.12. 1) $2x-3y-3=0$; 2) $3x-y+3=0$.
13.13. $5x-3y-25=0$; $5x-3y+9=0$.
13.14. 1) Q(8, 0); 2) Q(-6, 3); 3) Q(7, 3); 4) Q(-2, 3).
13.15. $x-2y+1=0$; $5x-3y-10=0$; $4x+y-11=0$.
13.16. $O\left(4, \frac{7}{3}\right)$. 13.17. $O\left(-\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right)$.

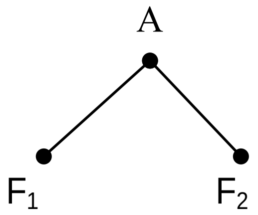
13.18. 1) $\frac{10}{\sqrt{26}}$; 2) $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

13.19. $3x+4y+6=0$.

13.20. $x+2y-7=0$; $2x-y-24=0$; $x+2y+23=0$.

§ 14. Кривые второго порядка.

Определение 1. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний d от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 – постоянное число. При этом точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса:



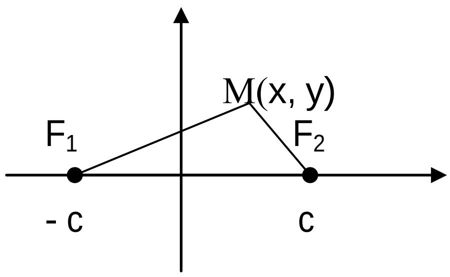
$|AF_1| + |AF_2| = d$.

Точки F_1 и F_2, не ограничивая общности, можно считать лежащими на оси Ox.

Теорема 1. Пусть $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), d = 2a, (a > c), b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Тогда эллипс задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a > b. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть M(x, y) принадлежит эллипсу:



Тогда $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$; $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (a^2 - xc)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделим обе части на $a^2(a^2 - c^2)$:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, что и требовалось доказать. Наоборот также верно.

Определение 2. Пусть эллипс задан уравнением (1). Числа a и b называются полуосями эллипса. Число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ -} \qquad (2)$$

эксцентриситетом эллипса. Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - директрисами эллипса.

Замечание. Из формулы (1) следует, что если M(x, y) принадлежат эллипсу, то $|x| \le a$, $|y| \le b$, точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ - принадлежат эллипсу:

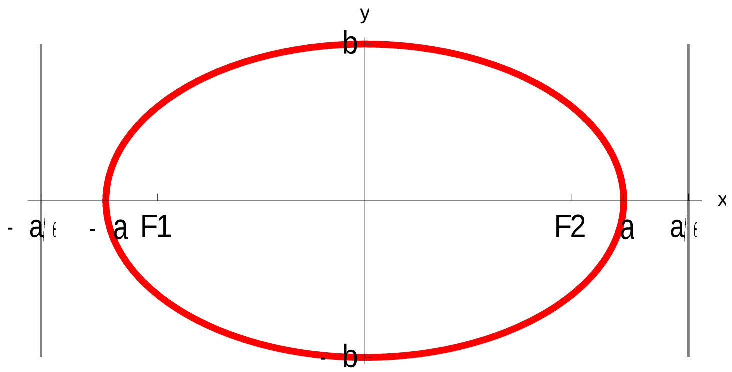


Рис.1 Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b$

Из формулы (2) следует, что $0 \le \varepsilon < 1$. Если $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 1$, поэтому уравнение (1) перепишется в виде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $x^2 + y^2 = a^2$ - окружность радиуса a. Если $\varepsilon \to 1$, то $\frac{b}{a} \to 0$, поэтому эксцентриситет характеризует сплюснутость эллипса.

Если эллипс задан уравнением (1), $(a > b)$, то фокусы F_1 и F_2 эллипса: $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, при этом отношение расстояния r_1 от любой точки эллипса до фокуса F_1 к расстоянию d_1 до соответствующей директрисы равно ε:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,\ \varepsilon < 1. \qquad (3)$$

Если эллипс задан уравнением (1) и $b > a$, то фокусы эллипса лежат на оси Oy: $F_1(0; -\sqrt{b^2 - a^2})$, $F_2(0; \sqrt{b^2 - a^2})$. $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$ - эксцентриситет, и $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ - директрисы эллипса:

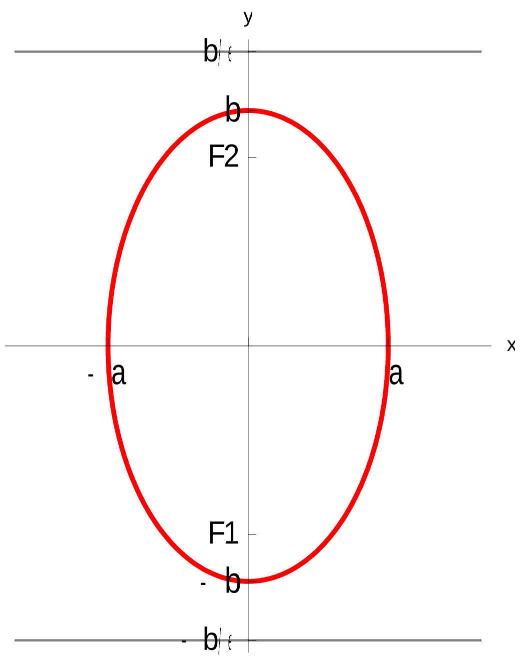


Рис.2 Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a<b$

Эллипс (1) можно задать параметрически в виде:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi . \tag{4}$$

Пример 1. а) Написать каноническое уравнение эллипса фокусы F_1 и F_2 которого равны $F_1(-4,\,0),\ F_2(4,\,0)$, и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

б) написать уравнения директрис.

в) проверит, что точка $M\left(3;\,\frac{12}{5}\right)$ принадлежит эллипсу.

г) найти расстояние от М до фокусов эллипса и до соответствующих директрис.
д) проверить для данной точки выполнение формул (3). Сделать чертеж.

Решение. а) c=4, тогда по формуле (2)

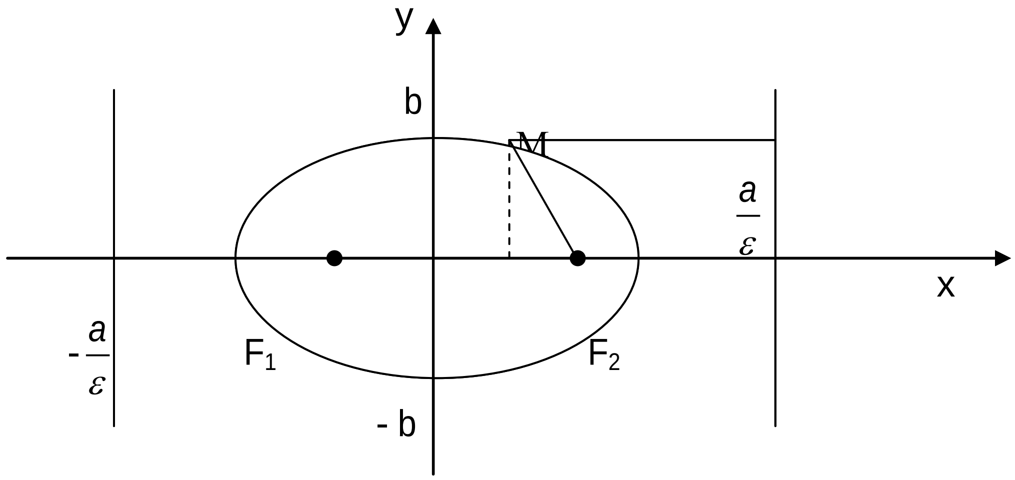
$$a=\frac{c}{\varepsilon}=\frac{4}{\frac{4}{5}}=5;\ c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-16=9,\ b=3$$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ - каноническое уравнение эллипса.

б) $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{5}{\frac{4}{5}}=\pm\frac{25}{4}$ - директрисы эллипса.

в) $M\left(3;\,\frac{12}{5}\right)$. Подставим точку М в уравнение :

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$: $\frac{9}{25}+\frac{144}{25\cdot 9}=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$, поэтому точка М принадлежит эллипсу.



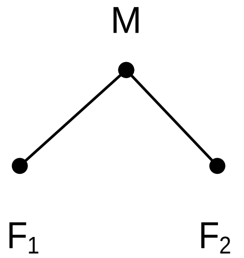
г) $r_2=\left|\overrightarrow{MF_2}\right|=\sqrt{(4-3)^2+\left(0-\frac{12}{5}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{144}{25}}=\frac{13}{5}$; $d_2=\frac{25}{4}-3=\frac{13}{4}$.

Аналогично $r_1=\left|\overrightarrow{MF_1}\right|=\frac{37}{5}$; $d_1=\frac{37}{4}$.

д) $\frac{r_1}{d_1}=\frac{4}{5}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$.

Замечание. Лучи, исходящие от источника света, помещенного в один из фокусов эллипса, после зеркального отражения от него пройдут через второй фокус.

Определение 3. Гиперболой называется геометрическое место точек М плоскости, для которых модуль d разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 – постоянное число. При этом точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы:



$$\left\|MF_1\right|-\left|MF_2\right\|=d.$$

Теорема 2. Пусть $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ - фокусы гиперболы, $d=2a$, $a<c$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Тогда гипербола задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Определение 4. Пусть гипербола задана уравнением (5). Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ называется эксцентриситетом гиперболы, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптотами гиперболы, прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - директрисами гиперболы, числа a и b – полуосями гиперболы.

Замечание. Из формулы (5) следует, что:

1) точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$ принадлежат гиперболе (вершины гиперболы), ось Ох – действительная ось гиперболы, ось Оу – мнимая.

2) Из уравнения (5) следует, что $y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$, поэтому $|x| \geq a$. При $x \geq a$ получаем правую ветвь гиперболы, при $x \leq -a$ - левую. Пусть $x \geq a$, тогда разности $\left|\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} - \frac{b}{a}x\right|$ и $\left|-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} + \frac{b}{a}x\right|$ приближаются к нулю при больших положительных значениях x. Аналогичное свойство выполняется и для левой ветви гиперболы, поэтому гипербола приближается к своим асимптотам при больших по модулю x.

3) Аналогично эллипсу для гиперболы выполняются формулы:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon\,, \qquad (6)$$

где r_1 и r_2 – расстояние от любой точки М гиперболы до фокусов F_1 и F_2 (фокальные радиусы), d_1 и d_2 – расстояние от точки М до соответствующей директрисы; $\varepsilon > 1$.

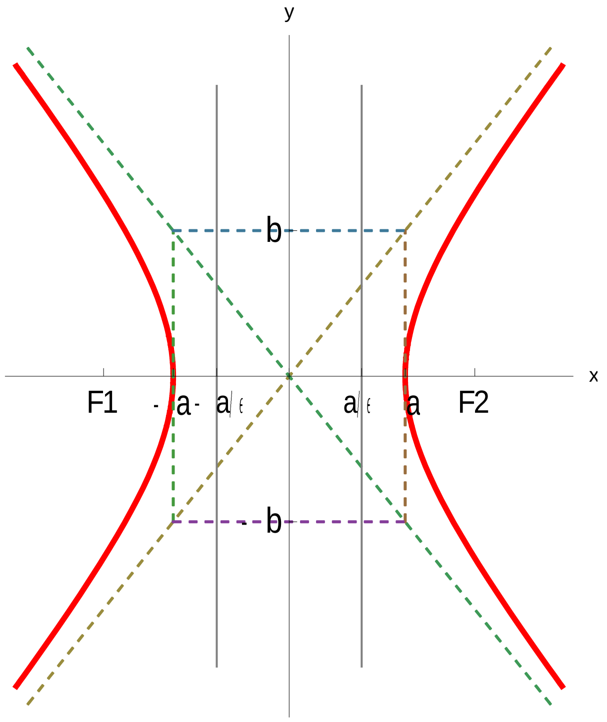


Рис.3 Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Пусть гипербола задана уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \qquad (7)$$

тогда действительной осью гиперболы будет ось Оу, точки $(0, b), (0, -b)$ - вершины гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{b} = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$ - эксцентриситет гиперболы, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы, прямые $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ - директрисы гиперболы.

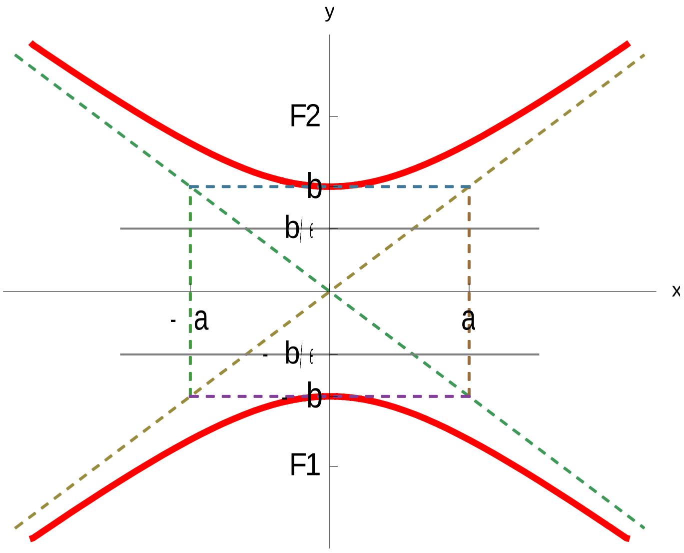


Рис.3 Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Пример 2. Написать уравнение гиперболы, эксцентриситет которой $\varepsilon = \sqrt{5}$, один из фокусов $F(2; 3)$ и соответствующая ему директриса: $3x + y + 3 = 0$.

Решение. $-\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{3}{\sqrt{10}} = 0$ - нормальное уравнение директрисы. Пусть M(x, y) – произвольная точка на гиперболе. Тогда по формуле (6):

$$\frac{r}{d} = \varepsilon = \sqrt{5}; \quad \frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}}{\left|-\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{3}{\sqrt{10}}\right|} = \sqrt{5}$$

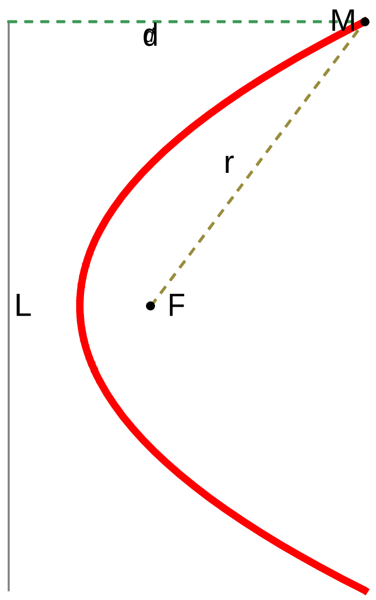
$$(x-2)^2+(y-3)^2=5\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}x-\frac{1}{\sqrt{10}}y-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{2}(3x+y+3)^2$$

$2(x^2-4x+4+y^2-6y+9)=9x^2+y^2+6xy+6y+18x+9$.И после приведения подобных получим: $7x^2-y^2+6xy+26x+18y-17=0$.

Замечание. Лучи, исходящие от источника света, помещенного в один из фокусов гиперболы, после зеркального отражения от нее кажутся исходящими из второго фокуса.

Определение 5. Параболой называется геометрическое место точек М плоскости равноудаленуой от фиксированной точки F, называемой фокусом параболы, и фиксированной прямой L, называемой директрисой параболы $(F\notin L)$.



$r=d; \frac{r}{d}=\varepsilon=1.$

Теорема 3. Пусть $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ - фокус параболы и $x=-\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы, $(p>0)$. Тогда парабола задается уравнением:

$$y^2=2px. \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть M(x. y) – произвольная точка на параболе. Тогда $r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$, $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$

$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$; $y^2=2px$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть парабола задана уравнением (8), тогда ось Ох – ось симметрии параболы, точка О(0, 0) – вершина параболы, при $p > 0$ ветви параболы направлены вправо, при $p < 0$ - влево.

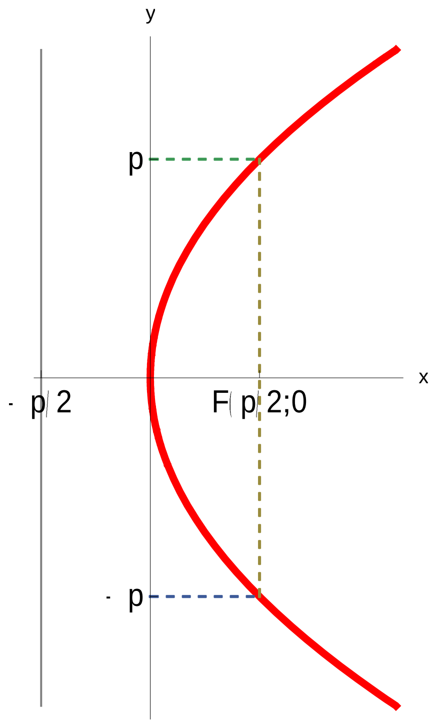


Рис.4 Парабола $y^2 = 2px; p > 0$

Пусть парабола задана уравнением:

$$x^2 = 2py, \tag{9}$$

тогда ось Оу– ось симметрии параболы, $F\left(0; \dfrac{p}{2}\right)$ - фокус, $y = -\dfrac{p}{2}$ - директриса.

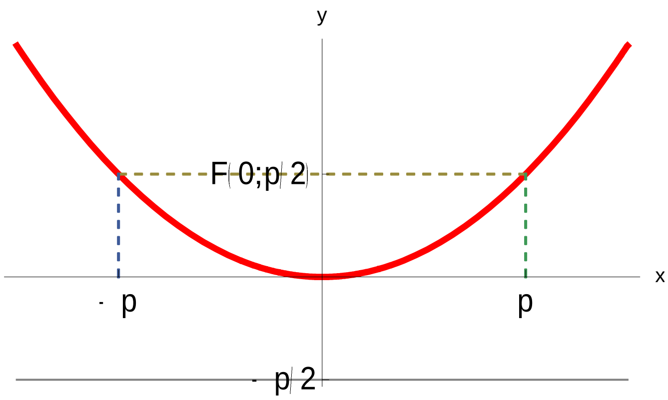


Рис.5 Парабола $x^2 = 2py; p > 0$

Пример 3. Для параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ найти ее фокус и директрису. Сделать чертеж.

Решение. Из уравнения (9):

$$x^2 = 2y = 2py \Rightarrow 2p = 2;\ p = 1$$

$F\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$ - фокус параболы; $y = -\dfrac{1}{2}$ - директриса.

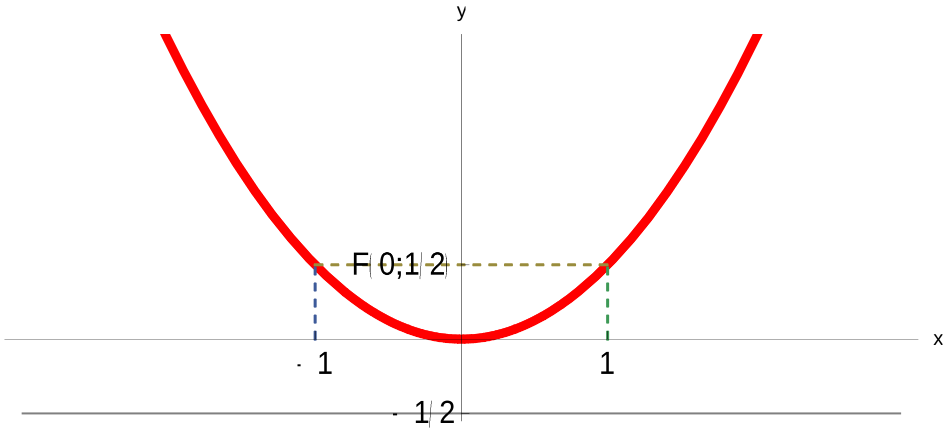


Рис.6 Парабола $y = \dfrac{1}{2}x^2$

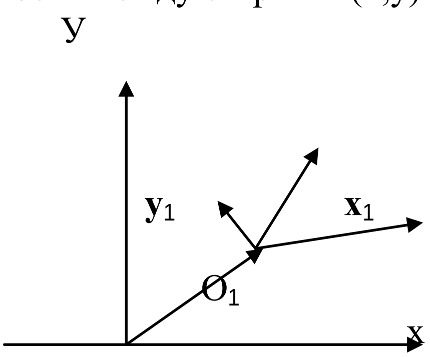
Замечание. Лучи, исходящие от источника света, помещенного в фокусе параболы, после зеркального отражения от нее образуют пучок параллельный ее оси.

Определение 6.Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j})$ - прямоугольная декартова система координат плоскости. Множество точек M(x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + K = 0, \qquad (10)$$

причем A, B, C не равны нулю одновременно, называется кривой 2-го порядка.

Замечание. Пусть $\left(O_1, \vec{u}, \vec{v}\right)$ - новая система координат. Найдем зависимость между старыми (x,y) и новыми (x_1,y_1) координатами точки M:



$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} = (\vec{u}, \vec{v})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Выразим векторы $\vec{u}, \vec{v}$ через базис $\vec{i},\ \vec{j}$. $\vec{u} = \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{21}\vec{j}, \vec{v} = \alpha_{12}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} \Rightarrow$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i},\ \vec{j})\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Тогда $\overrightarrow{O_1M} = (\vec{u}, \vec{v})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Далее

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, аналогично $\overrightarrow{OO_1} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, где (b_1, b_2) - координаты точки O_1 в старой системе координат, поэтому:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$.

$$(\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + (\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$$(\vec{i}, \vec{j})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{i}, \vec{j})\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right).$$

Таким образом зависимость между старыми и новыми координатами точки задается формулой :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где зависимость между новым $(\vec{u}, \vec{v})$ и старым $(\vec{i}, \vec{j})$ базисом задается формулой (11).

Преобразуем уравнение (5) с помощью формулы (12).

Теорема 4. Существует система координат $\left(O_1, \vec{u}, \vec{v}\right)$, в которой после преобразований по формуле (12) кривая (10) запишется в виде:

1) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ - эллипс.

2) $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ - гипербола.

3) $y_1^2 = 2px_1$ - парабола.

4) $a^2x_1^2 - b^2y_1^2 = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$ - пара пересекающихся прямых.

5) $x_1^2 = a^2,\ a > 0$, - пара параллельных прямых..

6) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 0$ - точка.

7) $x_1^2 = 0$ - пара совпадающих прямых.

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение кривой. Назвать и построить кривую. Найти фокусы и асимптоты кривой.

Решение. $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 43 = 0$

$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 + 43 = 0$

$4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = -36$

$\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = -1.$

Пусть $\begin{cases} x-2=x_1 \\ y+1=y_1 \end{cases}$, тогда (13)

$\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{4}=-1$ - кривая является гиперболой, при этом из (13) следует, что координаты точки O$_1$(0,0) в старой системе координат: $\begin{cases} x-2=0 \\ y+1=0 \end{cases}$, $O_1(2,-1)$.

Полуоси гиперболы $a=3, b=4,\ y_1=\pm\frac{b}{a}x_1;\ y+1=\pm\frac{2}{3}(x-2)$ - асимптоты гиперболы, точки $(0;\pm 2)$ - вершины гиперболы в новой системе координат. Из формул (13): (2; 1) (2; - 3) – координаты вершин в старой системе координат.

$F_1(0;-\sqrt{13}),\ F_2(0;\sqrt{13})$ - фокусы гиперболы. Из формул (13): $F_1(2;-1-\sqrt{13}),\ F_2(2;-1+\sqrt{13})$ - координаты фокусов в старой системе координат.

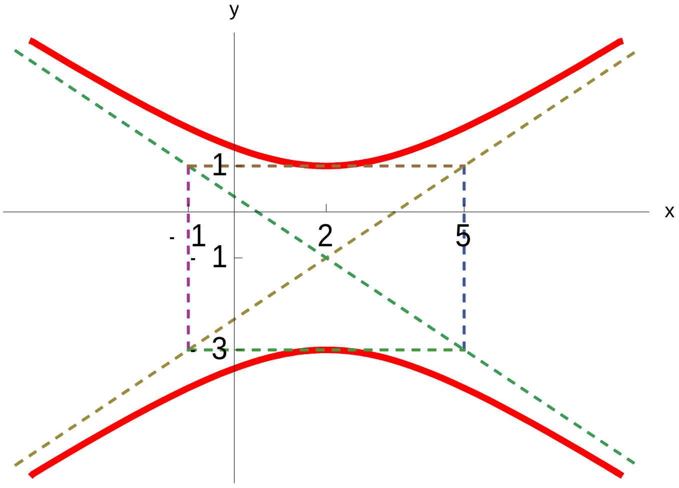


Рис.7 Гипербола $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=-1$.

Замечание. График кривой $f(x-x_0, y-y_0)=0$ получается сдвигом графика $f(x-x_0, y-y_0)=0$ на x_0 единиц вправо и y_0 единиц вверх. При таких построениях удобно сделать замену переменных

Упражнения к § 14.

Упражнение 14.1. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки M, N симметрично относительно осей координат. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет в каждом из следующих случаев:

1) $M(3,\sqrt{15}),\ N(-3\sqrt{3},\sqrt{5})$;

2) $M(\sqrt{6},1),\ N(\sqrt{2},\sqrt{3})$; 3) $M(2,\sqrt{3}),\ N(0,2)$.

Упражнение 14.2. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

1) большая полуось равна 10, а эксцентриситет равен 0,6;

2) сумма полуосей равна 8, и расстояние между фокусами равно 8;

3) расстояние от одного из фокусов до концов его большой оси равно 7 и 1.

Упражнение 14.3. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ох симметрично относительно начала координат, если:

1) действительная ось равна 10, а мнимая ось равна 14;
2) расстояние между фокусами равно 28, эксцентриситет равен 2;
3) действительная ось равна 6, эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$;
4) расстояние между фокусами равно 10, мнимая ось равна 8;
5) мнимая ось равна 16, эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$.

Упражнение 14.4. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что:

1) фокус находится в точке $F(4, 0)$;
2) фокус находится в точке $F(0, 3)$;
3) директриса имеет уравнение $x-3=0$;
4) директриса имеет уравнение $y-2=0$;
5) парабола проходит через точку А(6, 2) и симметрична относительно оси Ох;
6) парабола проходит через точку В(1, - 2) и симметрична относительно оси Оу.

Упражнение 14.5. На эллипсе $9x^2+25y^2=225$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния от левого фокуса.

Упражнение 14.6. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку М(4; 6), фокусы которого совпадают с фокусами гиперболы $x^2-y^2=8$.

Упражнение 14.7. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $5x^2+8y^2=40$.

Упражнение 14.8. Написать уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $3x\pm 4y=0$, а расстояние между фокусами равно 20.

Упражнение 14.9. Через фокус параболы $y^2=10x$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

Упражнение 14.10. Найти точки пересечения эллипса $x^2+4y^2=4$ с окружностью, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в вершине эллипса с положительной ординатой.

Упражнение 14.11. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2-3y^2=12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

Упражнение 14.12. Установить вид кривой второго порядка, определяемой уравнением:

1) $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$;
2) $y^2-6x+8y-8=0$;
3) $x^2+8x+2y+20=0$;

4) $9x^2-16y^2-18x-64y+89=0$;

5) $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$;

6) $4x^2+8x-y+7=0$;

7) $5x^2+9y-30x+18=0$;

8) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Ответы на упражнения к § 14.

14.1. 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1,\ a=6, b=2\sqrt{5},\ F_1(4,0),\ F_2(-4,0),\ \varepsilon=\frac{2}{3}$.

2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\ a=2\sqrt{2}, b=2,\ F_1(2,0),\ F_2(-2,0),\ \varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ a=4, b=2,\ F_1(2\sqrt{2},0),\ F_2(-2\sqrt{2},0),\ \varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

14.2. 1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

14.3. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$, 2) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{147}=1$, 3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$,

4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

14.4. 1) $y^2=16x$, 2) $x^2=12y$; 3) $y^2=-12x$; 4) $x^2=-8y$;

5) $y^2=\frac{2}{3}x$, 6) $x^2=-\frac{1}{2}y$.

14.5. $M\left(\frac{15}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$.

14.6. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

14.7. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

14.8. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. 14.9. 10.

14.10. $M_1(0,-1),\ M_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right),\ M_3\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

14.11. $O(0,0),\ M_1(6,-2\sqrt{3}),\ M_2(6,\ 2\sqrt{3})$.

14.12. 1) $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=1$; гипербола с центром в точке (2,1);

2) $Y^2=6X$, $O_1(-4,-4)$; парабола с осью, параллельной оси OX;

3) $X^2 = 2Y$, $O_1(-4, -2)$; парабола с осью, параллельной оси ОУ;

4) $-\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} = 1$, $O_1(1, -2)$; гипербола, вершины которой лежат на оси ОУ;

5) $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1$, эллипс с центром в точке $O_1(1, -2)$;

6) $X^2 = \frac{1}{4}Y$, $O_1(-1, 3)$; парабола с осью, параллельной оси ОУ;

7) $X^2 = -\frac{9}{5}Y$, $O_1(3, 3)$; парабола с осью, параллельной оси ОУ;

8) $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{4} = 1$, эллипс с центром в точке $O_1(5, -2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов. Линейноя алгебра и основы математического анализа. / Под ред.А.В.Ефимова,Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981.- Т.1.

2. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова/. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

4. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике./ Т.А. Сухая, В.Ф.Бубнов/. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 1.

5. Индивидуальные задания по высшей математике./ под ред. А.П. Рябушко /. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.