УДК 517

Приложение классического интегрального преобразования Меллина к вычислению интегралов

Гахович А. С.
Белорусский национальный технический университет

Из общей схемы построения интегральных преобразований получена интегральная пара известного классического преобразования Меллина

$$F(S)=\int_0^{+\infty} f(t)\,t^{S-1}dt\equiv M\left[f(t)\right],\ S=\sigma_0+i\tau;\ f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\omega}^{\sigma_0+i\omega}F(S)t^{-S}dS.$$

В данной работе коснёмся вопроса его приложений к вычислению несобственных интегралов.

Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau$.

Поскольку $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)f_2\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}$, то

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau=\int_0^{+\infty}\left(e^{-\tau}\tau^{\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{d\tau}{\tau}=t^{\frac{1}{2}}e^{-t}*e^{-t}.$$

Так как $e^{-t}\div\Gamma(S);\ t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\div\Gamma\left(S+\frac{1}{2}\right),$ где $\Gamma(S)$ - гамма-функция, то $t^{\frac{1}{2}}e^{-t}*e^{-t}\div\Gamma\left(S+\frac{1}{2}\right)\Gamma(S).$ Из известных соотношений $\Gamma(S)\cdot\Gamma\left(S+\frac{1}{2}\right)=2^{-2S+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2S)$ и $2^{-2S+1}F(2S)\div f\left(2t^{\frac{1}{2}}\right)$ и того факта, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, получаем $\Gamma(S)\cdot\Gamma\left(S+\frac{1}{2}\right)\div\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{t}}$.

Итак, окончательно имеем: $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau=\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{t}}$.