УДК 60.001.11:531.8

Авсиевич А.М., Кудин В.В., Довнар С.С., Качанов И.В., Самойлов И.Р.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНОСОСТАВНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Представлены подходы определению жесткостных и диссипативных характеристик в механических системах, объединяющих в себе элементы, обладающие различными свойствами и характеристиками. Показано, что решение таких задач в сложных системах может базироваться на совокупности традиционных теоретических подходов, использовании современных экспериментальных методик, а также применении операторного метода с использованием динамических передаточных функций.

В механических системах с упругими элементами восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих элементов при колебаниях. Восстанавливающие упругие силы учитываются через потенциальную энергию, которая при малых колебаниях описывается выражением

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{n} c_{ij} q_j q_k, \tag{1}$$

где c_{ij} – постоянные коэффициенты, равные значениям вторых производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам при $q_1 = q_{21} = ... = q_n = 0$. Эти коэффициенты называются квазиупругими и образуют матрицу

$$c = \begin{Vmatrix} c_{11}c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\cdots c_{2n} \\ \cdots \\ c_{n1}c_{n2}\cdots c_{nn} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Именно восстанавливающие упругие силы обуславливают собственные колебательные свойства механических систем. Зависимости восстанавливающих сил от обобщенной координаты, как правило, нелинейные. В случае малых колебаний чаще всего допускается линеаризация этих зависимостей [1]. Определение упругих (жесткостных) характеристик различных конструктивных элементов и их соединений описывается в специальной литературе, в частности [2].

Параметры упругих элементов определяются из силовой или упругой характеристики, представляющей зависимость сил упругости от деформации (рис. 1).

Коэффициент жесткости *c* представляет собой производную от силы упругости по величине деформации

$$c_{\text{x}} = \frac{dF}{dX}, \ c_{\varphi} = \frac{dM}{d\varphi}; \tag{3}$$

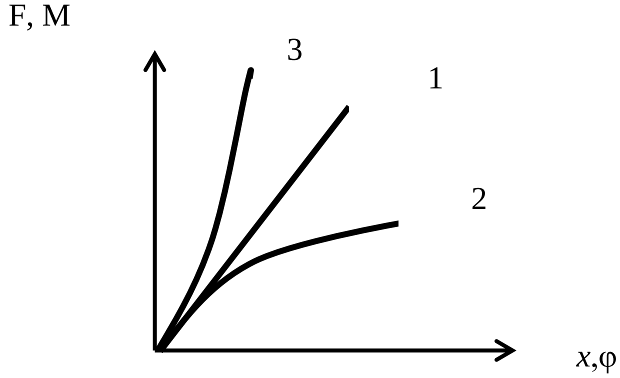

Рис. 1. Виды упругих характеристик: *1* – линейная; *2* – мягкая; *3* – жесткая

В сложных колебательных системах с несколькими упругими элементами числом N для упрощения динамической модели отдельные жесткости c_i заменяют одним условным упругим звеном с приведенной жесткостью $c_{п}$, определяемой из равенства потенциальных энергий. Так, например, при последовательном соединении упругих элементов приведенную жесткость определяют из условия, что приведенная податливость равна сумме податливостей элементов системы

$$\frac{1}{c_{\Pi}} = \sum \frac{1}{c_i}. \tag{4}$$

При последовательном соединении приведенный коэффициент жесткости равен сумме жесткостей всех элементов системы

$$c_{\Pi} = \sum c_i. \tag{5}$$

Материалы звеньев механической системы оказывают сопротивление внешнему силовому воздействию приложенных сил, и при этом происходит изменение формы и объема звеньев. Это является следствием того, элементы в объеме тела оказывают сопротивление их относительному перемещению.

Из механики деформируемого твердого тела известно, что в трехмерных телах деформации определяются тензором деформации l_{ij}, компоненты которого для малых деформаций выражаются через компоненты вектора перемещения $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Тензор напряжений σ_{ij} и тензор деформации l_{ij} связаны законом Гука

$$\sigma_{i,j} = \lambda l_{ij} \tag{6}$$

где λ – тензор модулей упругости, характеризующих свойства материала и имеющий в случае анизотропии 81 компоненту [3].

В случае динамического нагружения должно выполняться уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad i, j = 1,2,3 \tag{7}$$

где ρ – плотность материала, t – время.

При нагрузках энергия упругого формоизменения запасается, а при разгрузке полностью идет на совершение работы по восстановлению геометрических параметров. Если нагрузки, возникающие при деформировании, приводят к необратимым процессам, то часть энергии деформирования превращается в тепло или диссипирует.

Как следствие, материалы обладают тремя механическими свойствами: 1) упругостью, 2) пластичностью, 3) вязкостью.

Теоретическое описание этого многообразного поведения материалов звеньев производится посредством механико-математических моделей, идеализирующих реальное поведение материалов.

Одномерные эксперименты являются основой для создания одномерных механико-математических моделей. При помощи идеализации зависимости между напряжением и деформацией, полученной экспериментальным путем, находится определяющая связь между ними.

Эксперименты при одномерном растяжении, сжатии и кручении позволяют создать модель линейно-упругого, а также нелинейно-упругого тела. Использование таких моделей позволит определить жесткостные характеристики материалов [1].

Диссипативные параметры элементов механических систем определяются из скоростной (рис. 2) или гистерезисной (рис. 3) характеристики.

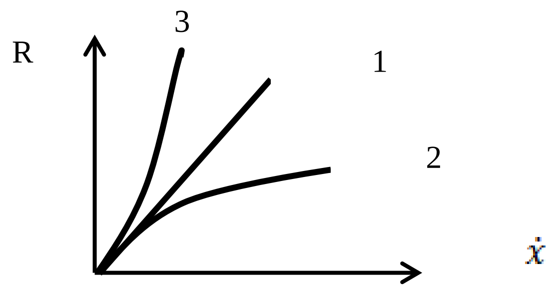

Рис. 2. Скоростная характеристика деформирования:
1 – линейная; *2* – мягкая; *3* – жесткая

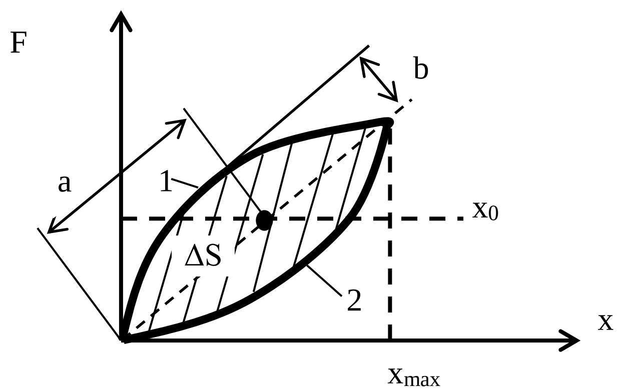

Рис. 3. Гистерезисная характеристика процесса деформирования

Скоростная характеристика представляет собой зависимость силы неупругого сопротивления от скорости деформации $R(\dot{x})$ при линейной деформации x или момента неупругого сопротивления от скорости угловой деформации $M_R(\dot{\varphi})$. Такие характеристики могут быть линейными (кривая 1 на рис. 2) или нелинейными (кривые 2 и 3).

Коэффициент сопротивления b, характеризующий диссипацию, представляет собой производную от силы сопротивления по скорости деформирования

$$b_x = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}\left[\frac{\text{Н}}{\text{м/с}}\right],\ b_\varphi = \frac{\partial M_R}{\partial \dot{\varphi}}\left[\frac{\text{Нм}}{\text{рад/с}}\right]. \tag{8}$$

В большинстве расчетов коэффициент сопротивления b считают постоянным и ограничиваются линейной зависимостью от скорости деформации, тогда

$$R = -b_x\dot{x},\ \text{либо}\ M_R = -b_\varphi\dot{\varphi}. \tag{9}$$

Гистерезисная характеристика (рис. 3) показывает зависимость силы сопротивления F элемента от деформации за цикл при нагружении (кривая 1) и разгружении (кривая 2). Тогда заштрихованная площадь ΔS на рис. 3 пропорциональна энергии $\Delta\Phi$, рассеиваемой в деформируемом элементе за цикл нагружения.

Коэффициент рассеивания ψ представляет собой отношение рассеянной энергии $\Delta\Phi$ за цикл деформирования к максимальной энергии $\Pi_{\max}$ при нагружении

$$\psi = \frac{\Delta\Phi}{\Pi_{\max}} \tag{10}$$

Как известно [2], гармонической нагрузке соответствует эллиптическая петля гистерезиса. Тогда коэффициент рассеяния определяется формулой

$$\psi = 2\pi ab / F_0 x_0 \tag{11}$$

где a и b – полуоси эллипса;

F_0 – амплитуда внешних гармонических сил;

x_0 – амплитуда упругой деформации.

Всякий элемент механической системы обладает одновременно упругими и диссипативными свойствами. Коэффициент сопротивления b зависит от жесткости элемента c, угловой частоты колебаний и связан с коэффициентом рассеяния зависимостью

$$b = \frac{c\psi}{2\pi\omega} \tag{12}$$

Таким образом, диссипативными характеристиками элементов системы являются коэффициент сопротивления b и коэффициент рассеивания ψ. Они характеризуют диссипацию энергии в колебательной системе, происходящую за счет контактного и внутреннего трения в элементах и сопряжениях, обладающих упруго-диссипативными свойствами.

В сложных пространственных системах со многими степенями свободы параметры диссипации записываются матрицей диссипации B размером 6×6 с элементами $b_x, b_y, b_z, b_{\varphi x}, b_{\varphi y}, b_{\varphi z}$.

Рассеивание энергии в диссипативных и упругих элементах обусловливает затухание свободных колебаний, график которых можно получить экспериментальным путем с использованием виброанализаторов, в частности виброанализатора СД-21 со встроенной программой обработки вибросигнала «Удар» [4]. Программа «Удар» обеспечивает определение частот собственных колебаний, а также характеристик затухания колебаний на любой из обнаруженных собственных частот (добротность резонанса, логарифмический декремент, постоянная затухания). Известно, что натуральный логарифм отношения двух соседних амплитуд называется логарифмическим декрементом затухания колебаний

$$\delta = \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) = \ln\left(\frac{A_{i+1}}{A_{i+2}}\right) \tag{13}$$

Коэффициент рассеивания ψ выражается через декремент Δ колебаний и логарифмический декремент

$$\psi = 1 - \Delta^2 = 1 - e^{-2\delta} \cong 2\delta. \tag{14}$$

Практическое определение инерционных жесткостных и диссипативных параметров колебательной системы осуществляется для типовых звеньев (усилительное, интегрирующее, апериодическое, колебательное, дифференцирующее и запаздывающее) через динамические передаточные функции.

Известно, что динамические свойства колебательной системы при линейных уравнениях движения определяются динамической передаточной функцией, которая является собственной характеристикой системы, не зависящей от начальных условий и сил, действующих на эту систему.

Так, например, для колебательного звена уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(t), \tag{15}$$

а в безразмерном виде

$$T_2^2\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = kx \tag{16}$$

где a – инерционный коэффициент;

b – коэффициент сопротивления;

c – жесткостной коэффициент;

$y = q / q_{\text{Н}}$ – выходная координата колебательной системы.

Входная координата колебательной системы, от которой зависит входное силовое воздействие, определяется как

$$x = \frac{F(t)}{F_{\text{Н}}(t)}. \tag{17}$$

Коэффициенты уравнения в безразмерном виде вычисляются через коэффициенты дифференциального уравнения

$$T_2^2 = \frac{a}{c},\ T_1 = \frac{b}{c},\ k = \frac{F_{\text{Н}}}{cq_{\text{Н}}}. \tag{18}$$

Решая уравнение (16) по Лапласу, получим динамическую передаточную функцию колебательного звена (системы)

$$W(S) = \frac{k}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1} = \frac{F_{\text{Н}} / q_{\text{Н}}}{aS^2 + bS + c} \qquad (19)$$

где S – некоторое комплексное число.

Из полученного выражения видно, что динамическая передаточная функция $W(S)$ является собственной характеристикой колебательного звена, определяющей его динамические свойства. Зная динамическую передаточную функцию звена, можно при любом заданном законе изменения внешней силы $F(t)$ найти изображение безразмерной внешней силы $X(S)$, и затем изображение безразмерного перемещения $Y(S)$ при нулевых начальных условиях

$$Y(S) = W(S)X(S). \qquad (20)$$

Искомая функция $Y(t)$ колебательного звена находится непосредственно по справочным таблицам оригиналов и изображений.

Следовательно, если уравнение движения типового звена колебательной системы представлено линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами a, b, c, то динамическая передаточная функция полностью определяет динамические свойства типового звена колебательной системы.

В дальнейшем, применяя последовательное, параллельное и встречно-параллельное соединение типовых звеньев и используя теорию автоматического управления, можно определять передаточные функции сложных колебательных систем, и, следовательно, получить зависимость между входными и выходными функциями колебательных систем.

Определение инерционных, жесткостных и диссипативных характеристик в сложных колебательных системах базируется на совокупности традиционных подходов (определение приведенных инерционных характеристик на основе равенства кинетических энергий и приведенной жесткости – на основе равенства потенциальных энергий), а также применения операторного метода с использованием динамических передаточных функций. Операторный метод позволяет записать динамическую зависимость между входными и выходными функциями в сложных соединениях звеньев колебательных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский, А.А. Курс Теории колебаний. Учебное пособие для студентов втузов. А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.

2. Светлицкий, В.А. Упругие элементы машин. В.А. Светлицкий, О.С. Нарайкин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с.

3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем/ Под ред. В.В. Болотина, – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

4. Руководство пользователя. Программа Vibro12 для виброанализатора серии СД. – СПб.: Ассоциация ВАСТ, 2010. – 54 с.