

**РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ**

Канд. физ.-мат. наук, доц. ГРИБКОВА В. П., канд. техн. наук, доц. КОЗЛОВ С. М.

Белорусский национальный технический университет

Методы точного и приближенного решений сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши, используемых в теории упругости, рассматривались в [1, 2]. В данной статье предлагается приближенное решение этой задачи, основанное на другом подходе. Подынтегральная функция может быть представлена в виде асимптотического полинома [3], либо бесконечного ряда с использованием полиномов Чебышева. Одновременно с приближенным решением будет получен остаточный член, вид которого позволяет определить степень полинома, дающего приближенное решение с заданной точностью.

Пусть необходимо найти решение интегрального уравнения с сингулярным ядром, вычисляемого вдоль отрезка действительной оси и приводимого к интегралу типа

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

и интегральных уравнений с регулярным ядром, приводимых к интегралу

$$E(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}}, \quad 1 \leq x < \infty. \quad (2)$$

Известно, что интеграл (1) существует в смысле главного значения по Коши, если $f(x)$ удовлетворяет в $[-1, 1]$ условию Гёльдера [2] (аналогично – $\text{Lip } \alpha, 0 < \alpha < 1$). Интеграл (2) является Римановым интегралом при $x > 1$, а в точке $x = 1$ может иметь особенность логарифмического типа. Существование решения

для него определяется условиями существования Риманова интеграла.

Известно, что $I(x)$ и $E(x)$ далеко не всегда можно выразить с помощью элементарных функций, поэтому возникает необходимость их замены приближенными решениями.

В дальнейшем понадобятся следующие известные соотношения:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}} = \hat{U}_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}} = \\ & = -x - \sqrt{x^2-1}^n, \quad 1 \leq x < \infty, \quad (4) \end{aligned}$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$ – полиномы Чебышева первого рода (1) и $\hat{U}_n(x) = \sin n \arccos x$ – функции, основанные на полиномах Чебышева второго рода [4]. В дальнейшем рассматривается равномерное приближение функций, поэтому за норму принято $\|f(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Приближенное решение уравнения (1). Функция $f(x)$ в промежутке $-1 \leq x \leq 1$ может быть приближенно представлена асимптотическим многочленом $Q_n^f(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) \approx Q_n^f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \|f_k\| \times \\ & \times \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n T_m \eta_k T_m(x) \right), \quad (5) \end{aligned}$$

при этом $f_k = f(\eta_k)$, $\eta_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{0, n+1}$,

символ « \parallel » означает, что f_0 и f_{n+1} делятся на 2.

Можно ввести линейный оператор $Q_n^l(f|x)$, который представляет собой приближенное решение для интеграла (1)

$$I(x) \approx Q_n^l(f|x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi(n+1)} \times \sum_{k=0}^{n+1} \parallel f_k \times \int_{-1}^{+1} \frac{\left(1 + 2 \sum_{m=1}^n T_m(\eta_k) T_m(t)\right)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (6)$$

С учетом соотношения (3) выражение (6) преобразуется к виду

$$Q_n^l(f|x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \parallel f_k \left(\hat{U}_0(x) + 2 \sum_{m=1}^n T_m(\eta_k) \hat{U}_m(x) \right) = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \parallel f_k \sum_{m=1}^n T_m(\eta_k) \hat{U}_m(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Оценка погрешности для (7) получается при использовании равенства

$$f(t) - Q_n^f(t) = \sum_{r=n}^{\infty} L_r^f \Psi_{r+1}^{(n)}(t), \quad (8)$$

где

$$L_r^f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \parallel (-1)^k f_k;$$

$$\Psi_{r+1}^{(n)}(t) = \sum_{m_j \geq n+1} \mu(2s_j + 1) B_{m_j}^{(n)}(t),$$

при этом μ – функция Мёбиуса;

$$m_j \geq n+1, \quad r+1 = (2s_j + 1)m_j;$$

$$B_m^{(n)}(t) = \begin{cases} T_m(t), & m = (2s+1)(n+1); \\ T_m(t) - T_{|l|}(t), & m = 2s(n+1) + l, \quad 0 \leq |l| \leq n. \end{cases} \quad (9)$$

Сходимость ряда (8) показана для всех $f(x)$ из класса $Lip \alpha$, $0 < \alpha < 1$ в [5].

Преобразование (3) действует на функции $B_m^{(n)}(t)$. Введем обозначения

$$\hat{\Psi}_{r+1}^{(n)}(x) = \sum_{m_j \geq n+1} \mu(2s_j + 1) A_{m_j}^{(n)}(x). \quad (10)$$

При условии, что

$$A_{m_j}^{(n)}(x) = \begin{cases} \hat{U}_m(x), & m = (2s+1)(n+1); \\ \hat{U}_m(x) - \hat{U}_{|l|}(x), & m = 2s(n+1) + l, \quad 0 \leq |l| \leq n, \end{cases} \quad (11)$$

получим

$$I(x) - Q_n^l(x) = \sum_{r=n}^{\infty} L_r^f \hat{\Psi}_{r+1}^{(n)}(x). \quad (12)$$

Будет справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть для оператора (1) получено приближенное решение в виде (7), тогда при $n \rightarrow \infty$ оно будет равномерно стремиться к точному решению, если функция $f(t)$ принадлежит классу Гёльдера ($f(t) \in Lip \alpha$, $0 < \alpha < 1$).

Доказательство. Так как функции $\hat{\Psi}_{r+1}^{(n)}(x)$ ограничены сверху таким же образом, как и $\Psi_{r+1}^{(n)}(x)$, то условия сходимости ряда (12) будут теми же, как и ряда (8), т. е., необходимо, чтобы выполнялось условие: $f(t)$ принадлежала бы классу Гёльдера ($f(t) \in Lip \alpha$, $0 < \alpha < 1$).

Скорость сходимости ряда (12) будет определяться дифференциальными свойствами функции плотности $f(t)$, от которой зависит быстрота убывания последовательности линейных функционалов L_r^f $\sum_{r=n}^{\infty}$.

Для членов этой последовательности справедливы все теоремы [5] о сходимости ряда (12) для функций, принадлежащих классу $f(t) \in Lip \alpha$, $0 < \alpha < 1$, аналитических функций и других. То есть ряд будет абсолютно сходиться для всех классов функций, указанных в вышеприведенной работе, в том числе и для функций, указанных в условиях рассматриваемой теоремы.

Теорема доказана.

Оценка погрешности приближенного решения будет

$$\begin{aligned} \|I(x) - Q_n^l(f|x)\| &\leq \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^f| \max_x |\hat{\Psi}_{r+1}^{(0)}(x)| = \\ &= \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^f| \|\hat{\Psi}_{r+1}^{(n)}\|. \end{aligned} \quad (13)$$

где $\|\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}\| = \max_{x \in [-1,1]} |\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}(x)|$. Для вычисления $\|\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}\|$ используем равенства (10), (11) и то, что $|\hat{U}_n(x)| \leq 1$.

В случае $n = 0$ получается разложение оператора $I(x)$ в ряд по функциям Чебышева (3) в виде

$$I(x) = Q_0^f(f|x) + \sum_{r=0}^{\infty} L_r^f \hat{\psi}_{r+1}^{(0)}(x). \quad (14)$$

Можно в качестве приближенного решения рассматривать конечную сумму

$$I(x) \approx I_n(x) = Q_0^f(f|x) + \sum_{r=1}^n L_{r-1}^f \hat{\psi}_r^{(0)}(x). \quad (15)$$

Ее остаточный член легко вычисляется.

При аппроксимации функции $f(x)$ на замкнутом промежутке полиномами наилучшего приближения $P_n(x)$ для наибольшего отклонения E_n^f полинома от функции выполняется неравенство [4]

$$|L_n^f| \leq E_n^f \leq \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^f| \cdot \|\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}\|. \quad (16)$$

Пусть для интеграла (1) полиномом наилучшего равномерного приближения является $P_n^f(x)$. Величина E_n^f есть значение наибольшего отклонения полинома от функции $I(x)$. Тогда, используя свойство (16), можно получить для рассматриваемой задачи неравенство следующего вида:

$$|L_n^f| \leq E_n^f \leq \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^f| \cdot \|\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}\|. \quad (17)$$

Это неравенство важно использовать при оценке погрешности приближенного решения. Равенство (14) является способом восстановления оператора $I(x)$ по последовательности линейных функционалов функции $f(t)$.

Приближенное решение уравнения (2).

Приближенное решение для интеграла (2) получится при замене функции $f(t)$ приближенным выражением (5) в промежутке $-1 \leq t \leq 1$, то есть

$$Q_n^E(f|x) = -\frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} f_k \sum_{m=1}^n T_m(\eta_k) x - \sqrt{x^2 - 1}^m, \quad (18)$$

$$1 \leq x < \infty, \eta_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, k = \overline{0, n+1}.$$

Будет справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть для оператора (2) получено приближенное решение в виде (18), тогда оно при $n \rightarrow \infty$ будет равномерно стремиться к точному решению, если функция $f(t)$ принадлежит классу Гельдера.

Доказательство. Доказательство сходимости $Q_n^E(f|x)$ к $E(x)$ (2) при $n \rightarrow \infty$ можно провести способом, аналогичным доказательству для $Q_n^f(f|x)$. Разность $f(t) - Q_n^f(t)$ определяется выражением (8). Оно при интегрировании с учетом условия (4) приведет к вычислению остаточного члена в виде ряда:

$$\|E(x) - Q_n^E(f|x)\| \leq \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^f| \cdot \|\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}\|, \quad (19)$$

где функции $\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}(x)$ могут быть определены из соотношений (11) с заменой $\hat{U}_m(x)$ на функции

$$x - \sqrt{x^2 - 1}^m.$$

Так как абсолютная величина этих выражений в промежутке $[1, \infty)$ не превосходит единицы, то правая часть неравенства (19) представляет собой равномерно сходящийся ряд для всех функций $f(t)$ из класса Гельдера. В этом случае будет справедливо разложение $E(x)$ на асимптотический многочлен и остаточный член в виде абсолютно сходящегося ряда

$$E(x) = Q_n^E(f|x) + \sum_{r=0}^{\infty} L_r^f \hat{\psi}_{r+1}^{(0)}(x). \quad (20)$$

Последовательность L_r^f имеет все свойства, рассмотренные для решения уравнения (1), и ряд (20) будет равномерно и абсолютно сходиться для соответствующих классов функций.

Теорема доказана.

Если положить $n = 0$, то имеет место равенство

$$E(x) = Q_0^E(f|x) + \sum_{r=0}^{\infty} L_r^f \hat{\psi}_{r+1}^{(0)}(x). \quad (21)$$

Будет справедливо условие, аналогичное (17). Выражение (21) можно рассматривать, как восстановление оператора $E(x)$ по последовательности линейных функционалов L_r^f функции плотности $f(t)$

$$E(x) \approx E_n(x) = Q_0^E(f|x) + \sum_{r=0}^n L_r^f \hat{\psi}_{r+1}^{(0)}(x). \quad (22)$$

В качестве примеров можно рассмотреть следующие задачи.

Пример 1. Найти приближенное решение $Q_n^f(f|x)$ задачи

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln \frac{1+t \sin \alpha}{1-t \sin \alpha} \frac{1}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$-1 \leq x \leq 1,$$

при $n = 3$ и $n = 4$. Оценить погрешность.

Решение. Пусть $\alpha = 45^\circ$. Функция $I(x)$ является нечетной, поэтому все нечетные линейные функционалы будут равны нулю. Рассмотрим решения при $n = 3$ и $n = 4$. Они имеют вид:

$$Q_3^f(f|x) = 1,07180 \cdot \hat{U}_1(x) + 0,02681 \cdot \hat{U}_3(x);$$

$$Q_4^f(f|x) = 1,07175 \cdot \hat{U}_1(x) + 0,02580 \cdot \hat{U}_3(x).$$

Вычислим последовательность линейных функционалов L_r^f по формуле (9) и функции $\hat{\psi}_{r+1}^{(n)}(x)$ по формулам (10) и (11):

$$L_0^f = 1,762747, \quad L_2^f = 0,094921, \quad L_4^f = 0,009757,$$

$$L_6^f = 0,001195, \quad \dots$$

функции для $n = 3$:

$$\hat{\psi}_{r+1}^{(3)}(x): \hat{\psi}_4^{(3)} = \hat{U}_4(x), \quad \hat{\psi}_5^{(3)} = \hat{U}_5(x) - \hat{U}_3(x),$$

$$\hat{\psi}_6^{(3)} = \hat{U}_6(x) - \hat{U}_2(x), \quad \hat{\psi}_7^{(3)} = \hat{U}_7(x) - \hat{U}_1(x), \quad \dots;$$

для $n = 4$:

$$\hat{\psi}_{r+1}^{(4)}(x): \hat{\psi}_5^{(4)} = \hat{U}_5(x), \quad \hat{\psi}_6^{(4)} = \hat{U}_6(x) - \hat{U}_4(x),$$

$$\hat{\psi}_7^{(4)} = \hat{U}_7(x) - \hat{U}_3(x), \quad \hat{\psi}_8^{(4)} = \hat{U}_8(x) - \hat{U}_2(x), \quad \dots;$$

для $n = 0$:

$$\hat{\psi}_{r+1}^{(0)}(x): \hat{\psi}_1^{(0)} = \hat{U}_1(x), \quad \hat{\psi}_3^{(0)} = \hat{U}_3(x) - \hat{U}_1(x),$$

$$\hat{\psi}_5^{(0)} = \hat{U}_5(x) - \hat{U}_1(x), \quad \hat{\psi}_7^{(0)} = \hat{U}_7(x) - \hat{U}_1(x),$$

$$\hat{\psi}_9^{(0)} = \hat{U}_9(x) - \hat{U}_3(x), \quad \dots$$

Следовательно, при $n = 3$ погрешность приближенного решения может быть представлена

$$\Delta Q_3(x) = f(x) - Q_3^f(f|x) = L_4^f \psi_5^{(3)}(x) +$$

$$+ L_6^f \psi_7^{(3)}(x) + \dots = L_4^f (\hat{U}_5(x) - \hat{U}_3(x)) +$$

$$+ L_6^f (\hat{U}_7(x) - \hat{U}_1(x)) + \dots$$

и не превосходит

$$\|I(x) - Q_3^f(f|x)\| \leq 0,022.$$

При $n = 4$ соответственно

$$\Delta Q_4^f(x) = f(x) - Q_4^f(f|x) = L_4^f \psi_5^{(4)}(x) +$$

$$+ L_6^f \psi_7^{(4)}(x) + \dots = L_4^f \hat{U}_5(x) + L_6^f (\hat{U}_7(x) - \hat{U}_3(x)) + \dots$$

Имеет место двустороннее неравенство

$$0,0091 \leq \|I(x) - Q_4^f(f|x)\| \leq 0,012,$$

то есть $0,0091 \leq E_4^f \leq 0,012$.

Приближенное решение можно получить как конечную сумму ряда (14)

$$I(x) \approx I_3(f|x) = Q_0^f + L_0^f \psi_1^{(0)}(x) + L_2^f \psi_3^{(0)} =$$

$$= 1,762747 \hat{U}_1(x) + 0,009757 (\hat{U}_3(x) - \hat{U}_1(x))$$

при значительно меньшем количестве вычислений. Используя значения линейных функционалов, получим погрешность в виде

$$\Delta I_3(x) = I(x) - I_3(x) = L_4^f \psi_5^{(0)}(x) +$$

$$+ L_6^f \psi_7^{(0)}(x) + \dots = L_4^f (\hat{U}_5(x) - \hat{U}_1(x)) +$$

$$+ L_6^f (\hat{U}_7(x) - \hat{U}_1(x)) + \dots$$

и в итоге $|\Delta I_3| \leq 0,022$.

Приближенные решения $Q_3^f(f|x)$ и $Q_4^f(f|x)$ на графике рис. 1 практически сливаются. Поэтому удобнее рассмотреть их погрешности на всем промежутке $x \in [-1, 1]$ (рис. 2). Как видно из графика, наибольшую погрешность дает решение $I_3(x)$. Оценки погрешности достаточно точно дают наибольшую погрешность соответствующих решений и не являются сильно завышенными.

Отсутствие гладкости на рис. 2 объясняется большим шагом при вычислении погрешности.

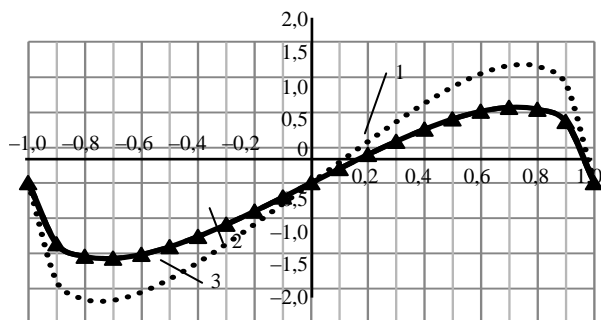


Рис. 1. Приближенные решения $Q_3^E(f|x)$, $Q_4^I(f|x)$ и $I_3(f|x)$: 1 – Q_3 ; 2 – Q_4 ; 3 – I_3

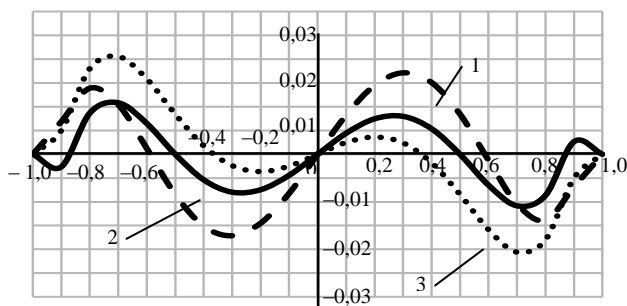


Рис. 2. Погрешности приближенных решений $Q_3^E(f|x)$, $Q_4^I(f|x)$ и $I_3(f|x)$: 1 – дел. Q_3 ; 2 – дел. Q_4 ; 3 – дел. I_3

Пример 2. Найти приближенное решение $Q_n^I(f|x)$ задачи

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int \frac{\operatorname{arctg}(t \cdot \operatorname{tg} \alpha)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

при $n = 3$ и $n = 4$. Оценить погрешность.

Решение. Пусть $\alpha = 45^\circ$. При $n = 3$ и 4 приближенные решения имеют вид:

$$Q_3^I(f|x) = 0,82832 \cdot \hat{U}_1(x) - 0,04228 \cdot \hat{U}_3(x);$$

$$Q_4^I(f|x) = 0,82878 \cdot \hat{U}_1(x) - 0,04778 \cdot \hat{U}_3(x).$$

Оценки погрешности

$$\|I(x) - Q_3^I(f|x)\| \leq 0,0112;$$

$$0,0050 \leq \|I(x) - Q_4^I(f|x)\| \leq 0,0062;$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$0,0050 \leq E_4^I \leq 0,0062.$$

Пример 3. Найти приближенное решение $Q_n^E(f|x)$ задачи

$$E(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\operatorname{arctg}(t \cdot \operatorname{tg} \alpha)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$1 \leq x < \infty,$$

при $n = 3$ и $n = 4$. Оценить погрешность.

Решение. Пусть $\alpha = 45^\circ$. Подынтегральная функция нечетная, следовательно, все нечетные линейные функционалы равны нулю. Для $n = 3$ и 4 получаются соответственно приближенные решения

$$Q_3^E(f|x) = 0,82832 \cdot x - \sqrt{x^2-1} -$$

$$-0,04228 \cdot x - \sqrt{x^2-1}^3;$$

$$Q_4^E(f|x) = 0,82878 \cdot x - \sqrt{x^2-1} -$$

$$-0,04778 \cdot x - \sqrt{x^2-1}^3.$$

Погрешность для $Q_3^E(f|x)$ на промежутке $1 \leq x < \infty$ можно представить

$$E(x) - Q_3^E(f|x) = \Delta Q_3^E(x) = L_4^f \Psi_5^{(3)}(x) + L_6^f \Psi_7^{(3)}(x) + \dots,$$

где линейные функционалы принимают значения:

$$L_0^f = 0,785398, \quad L_2^f = -0,047297,$$

$$L_4^f = 0,004877, \quad L_6^f = -0,000598 \text{ и т. д.},$$

функции:

$$\Psi_5^{(3)}(x) = x - \sqrt{x^2-1}^5 - x - \sqrt{x^2-1}^3,$$

$$\Psi_7^{(3)}(x) = x - \sqrt{x^2-1}^7 - x - \sqrt{x^2-1} \text{ и т. д.}$$

Будет справедлива оценка

$$|I(x) - Q_3^E(f|x)| \leq 0,011.$$

Погрешность для $Q_4^E(f|x)$

$$E(x) - Q_4^E(f|x) = \Delta Q_4^E(x) = L_4^f \Psi_5^{(4)}(x) + L_6^f \Psi_7^{(4)}(x) + \dots,$$

функции:

$$\Psi_5^{(4)}(x) = x - \sqrt{x^2-1}^5,$$

$$\Psi_7^{(4)}(x) = x - \sqrt{x^2-1}^7 - x - \sqrt{x^2-1} \text{ и т. д.}$$

и имеет место двусторонняя оценка погрешности

$$0,0049 \leq \|I(x) - Q_4^E(f|x)\| \leq 0,0069.$$

Можно получить приближенное решение в виде частичной суммы (22)

$E(x) \approx E_3(x) = Q_0^E(f|x) + L_0^f \Psi_1^{(0)}(x) + L_2^f \Psi_3^{(0)}(x)$
и погрешность в виде бесконечного ряда

$$E(x) - E_3(x) = \Delta E_3(x) = L_4^f \Psi_5^{(0)}(x) + L_6^f \Psi_7^{(0)}(x) + \dots,$$

где $Q_0^f = 0$, $L_0^f = 0,785398$, $L_2^f = -0,047297$,
функции:

$$\Psi_1^{(0)}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\Psi_3^{(0)}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}^3 - x - \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\Psi_5^{(0)}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}^5 - x - \sqrt{x^2 - 1}$$

и $\Psi_7^{(0)}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}^7 - x - \sqrt{x^2 - 1}, \dots$

В итоге погрешность примет вид

$$\Delta E_3(x) = L_4^f \left(x - \sqrt{x^2 - 1}^5 - x - \sqrt{x^2 - 1} \right) +$$

$$+ L_6^f \left(x - \sqrt{x^2 - 1}^7 - x - \sqrt{x^2 - 1} \right) + \dots$$

Ее оценка $|\Delta E_3(x)| \leq 0,011$.

Все приближенные решения на рис. 3 практически сливаются, поэтому о погрешности лучше судить по рис. 4.

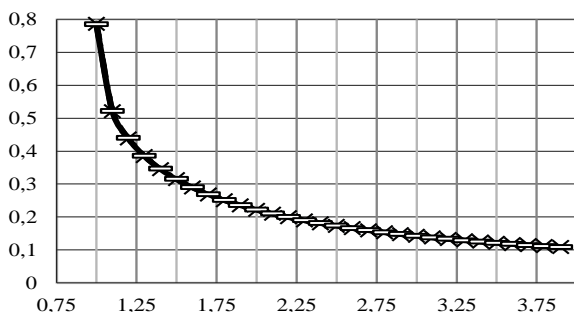


Рис. 3. Приближенные решения $Q_3^E(f|x)$, $Q_4^E(f|x)$
и $E_3(f|x)$: -x- - $Q_3(E)$; — — — $Q_4(E)$; — E_3

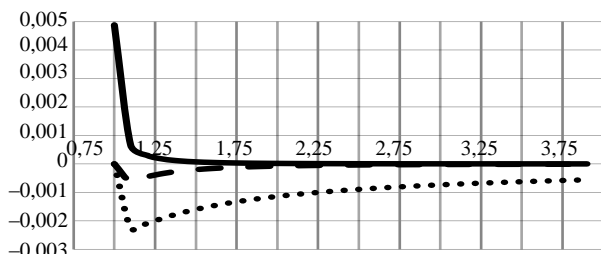


Рис. 4. Погрешности $Q_3^E(f|x)$, $Q_4^E(f|x)$
и $\Delta E_3(x)$: -x- - дел. $Q_3(E)$; — — — дел. $Q_4(E)$;
..... дел. E_3

Наибольшую погрешность в начале бесконечного промежутка дает многочлен $Q_4^E(f|x)$, и, рассматривая структуру погрешности, можно отметить, что это правило будет иметь место для всех асимптотических многочленов четных степеней. Численные оценки погрешности для $Q_3^E(f|x)$ и $E_3(x)$ получились сильно завышенными. Все погрешности $\Delta Q_3^E(x)$, $\Delta Q_4^E(x)$ и $\Delta E_3(x)$ на всем промежутке укладываются в рамки тех значений, которые вычислены как оценки сверху, хотя оценки сверху оказываются довольно сильно завышенными.

ВЫВОДЫ

Применение метода асимптотических полиномов к решению интегральных уравнений (1) и (2) дает возможность:

1) достаточно просто получать приближенные решения в виде асимптотических полиномов (13) для $I(x)$ и (18) для $E(x)$;

2) вычислить оценки погрешности вида (15) для $Q_n^I(f|x)$ и (19) для $Q_n^E(f|x)$, используя соответствующие последовательности линейных функционалов для подынтегральных функций, которые вычисляются простым суммированием ординат, т. е. нет необходимости прибегать к использованию производных высокого порядка, как во всех других методах;

3) разложить подынтегральную функцию $f(x)$ в ряд Фурье – Чебышева и получить соответствующие ряды для интегралов (1) – $I(x)$ (15) и (2) – $E(x)$ (20), которые отличаются от традиционных рядов Фурье тем, что для получения коэффициентов не требуется интегрирование функций, так как ими являются линейные функционалы;

4) вычисляя последовательно члены ряда Фурье – Чебышева (15) и (21), найти необходимый номер N , начиная с которого будет выполняться заданная точность;

5) затем можно построить полиномы $Q_N^I(f|x)$ и $Q_N^E(f|x)$ по формулам (7) и (18), для которых заданная точность будет выполняться;

6) построить графики как самих многочленов, так и погрешностей на всем изучаемом промежутке.

Все вычисления очень просто реализуются с помощью вычислительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.

2. **Пыхтеев, Г. Н.** О некоторых сингулярных интегралах с ядром типа Коши / Г. Н. Пыхтеев // ПММ. – Т. XXIII. – Вып. 6. – 1959. – С. 1074–1082.

3. **Грибкова, В. П.** Равномерные приближения, основанные на полиномах Чебышева / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Сб. тр. XXIII Междунар. науч. конф. ММТТ-24. – Т. 1. – 2011. – С. 31–36.

4. **Функции** математической физики / Ж. Кампе де Ферье [и др.]. – М.: ФМЛ, 1963.

5. **Этерман, И. И.** К вопросу восстановления функции по некоторой характеристической последовательности / И. И. Этерман // Известия вузов. – 1966. – № 2. – С. 148–157.

Поступила 27.03.2013