

Министерство образования Республики Беларусь  
Филиал БНТУ  
«Минский государственный политехнический колледж»

**ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ  
ПОСОБИЕ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**«ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ»**

для специальностей:

2-36 03 31 «Монтаж и эксплуатация электрооборудования» (по направлениям)

2-36 04 32 «Электроника механических транспортных средств»

2-37 01 05 «Городской электрический транспорт»

2-41 01 31 «Микроэлектроника»

2-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы»

Минск 2019

**Автор:**  
Маковеева А.М.

**Рецензенты:**

Мальцева И.В., преподаватель спецдисциплин филиала БНТУ «МГПК»,  
Дирвук Е.П., доцент кафедры «Профессиональное обучение и педагогика»  
инженерно-педагогического факультета БНТУ, к.п.н., доцент

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельного и дистанционного изучения учебной дисциплины «Основы технической механики» учащимися специальностей

2-36 03 31 «Монтаж и эксплуатация электрооборудования» (по направлениям)

2-36 04 32 «Электроника механических транспортных средств»

2-37 01 05 «Городской электрический транспорт»

2-41 01 31 «Микроэлектроника»

2-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы. В учебно-методическом пособии представлен теоретический материал, а также материал, обеспечивающий контроль знаний для проведения текущей и итоговой аттестации.

Белорусский национальный технический университет.  
Филиал БНТУ “Минский государственный политехнический колледж”.  
пр - т Независимости, 85, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: (017) 292-13-42 Факс: 292-13-42  
E-mail: mgpk@bntu.by  
<http://www.mgpk.bntu.by>  
Регистрационный № БНТУ/ МГПК- 30.2019

© БНТУ, 2019  
© Маковеева А.М., 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Учебная программа учебной дисциплины

Существенные и несущественные ошибки

Перечень разделов и тем учебной программы

Теоретический материал по темам учебной дисциплины

Введение

Раздел 1 Статика

1.1 Основные понятия и аксиомы статики

1.2 Плоская система сходящихся сил

1.3 Пара сил.

1.4 Плоская система произвольно расположенных сил

1.5 Центр тяжести.

Раздел 2 Основы сопротивление материалов

2.1 Основные положения

2.2 Растяжение и сжатие

2.3 Практические расчеты на срез и смятие

2.4 Геометрические характеристики плоских сечений

2.5 Кручение.

2.6 Изгиб

2.7 Изгиб и кручение

Раздел 3 Элементы кинематики и динамики

3.1 Основные понятия кинематики

3.2 Кинематика точки

3.3 Простейшие движения твердого тела

3.4 Основные понятия и аксиомы динамики

3.5 Силы инерции Метод кинетостатики

3.6 Работа и мощность

3.7 Общие теоремы динамики. Основное уравнение вращающегося тела

Раздел 4 Детали машин и механизмов

4.1 Основные понятия и определения

4.2 Соединения деталей

4.3 Механизмы поступательного, колебательного и прерывистого движения

4.4 Винтовые механизмы

4.5 Механизмы передачи вращательного движения

4.6 Валы и оси

4.7 Опоры осей и валов (подшипники)

4.8 Муфты

[Самоконтроль знаний](#)

[Примерный перечень вопросов к ОКР](#)

[Перечень учебных изданий, рекомендуемых для изучения учебной дисциплины](#)

[Обратная связь](#)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронное учебно-методическое пособие (ЭУМП) может использоваться преподавателями, учащимися дневной и заочной формы получения образования для самостоятельного и дистанционного изучения материала учебной дисциплины «Основы технической механики».

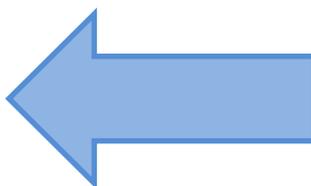
ЭУМП содержит оглавление с возможностью перехода к избранному разделу, систему гиперссылок, навигацию с помощью кнопок перехода «стрелка влево», «стрелка вправо», систему полнотекстового поиска. Теоретический раздел оснащен следующими кнопками:

- «Назад», позволяющей вернуться в папку с перечнем тем;
- «Далее», обеспечивающей переход к следующей теме программы в соответствии с тематическим планом;
- «Обратная связь», содержащей анкету рефлексии;
- «Самоконтроль», позволяющей перейти к вопросам по изучаемой теме;
- «Вопросы по разделу», обеспечивающей переход к перечню вопросов по темам конкретного раздела.

Программой по учебной дисциплины «Основы технической механики» предусматривается изучение будущими техниками основных законов механики, условий равновесия материальных тел, основ расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, сведений о принципах действия, устройстве и области применения распространенных деталей машин и механизмов.

Данная учебная дисциплина состоит из четырех разделов: «Статика», «Основы сопротивления материалов»; «Элементы кинематики и динамики»; «Детали машин и механизмов».

Изучение учебной дисциплины основывается на знаниях, полученных учащимися по математике, физике, материаловедению и черчению. В свою очередь, знание программного материала по технической механике послужит базой при изучении специальных дисциплин.



# УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><u>Введение</u></b>		
Сформировать представление о целях и задачах учебной дисциплины «Основы технической механики»	Общая характеристика учебной дисциплины «Основы технической механики». Цели ее изучения и задачи. Место и роль Учебной дисциплины в системе специальных дисциплин и подготовке высококвалифицированных специалистов.	Высказывает общее суждение о целях и задачах учебной дисциплины «Основы технической механики»
<b><u>Раздел 1 Статика</u></b>		
<b><u>Тема 1.1 Основные понятия и аксиомы.</u></b>		
Сформировать знания об основных понятиях. Дать понятие об аксиомах статики, о связях и реакциях связей.	Материальная точка, абсолютно твердое тело. Сила, система сил. Эквивалентные системы сил. Равнодействующая сила. Уравновешивающая сила. Первая аксиома статики (принцип инерции). Вторая аксиома статики (условие равновесия сил). Третья аксиома (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил). Перенос силы вдоль линии ее действия (сила-скользящий вектор). Четвертая аксиома (правило сложения двух сил). Пятая аксиома (закон равенства действия и противодействия). Свободное и несвободное тело. Связи и реакции связей.	Формулирует и объясняет основные понятия статики. Излагает аксиомы статики: первую аксиому (принцип инерции), вторую аксиому (условие равновесия двух сил), третью аксиому (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил), четвертую аксиому (правило сложения двух сил), пятую аксиому (закон равенства действия и противодействия). Объясняет связи и реакции связей.
<b><u>Тема 1.2 Плоская система сходящихся сил.</u></b>		
Дать понятия о плоской системе сходящихся сил. Сформировать знания о проекции силы, о геометрическом и аналитическом условиях рав-	Понятие о системе сходящихся сил. Графический метод определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил. Силовой многоугольник. Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.	Раскрывает сущность «силовой многоугольник», «проекция силы на ось», «проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси», «метод проекций». Излагает геометрическое и анали-

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
новесия плоской системы сходящихся сил, методике расчета типовых задач на равновесие аналитическим способом.	<p>Проекция силы на ось. Правило знаков. Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси. Аналитическое определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил (метод проекций).</p> <p>Аналитическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил. Уравнения равновесия. Методика расчета типовых задач с использованием уравнений равновесия.</p>	<p>итическое условия равновесия плоской системы сходящихся сил, уравнения равновесия.</p> <p>Объясняет методику расчета типовых задач с использованием уравнений равновесия.</p>
<b><u>Тема 1.3 Пара сил.</u></b>		
Сформировать знания о паре сил, плече ее моменте пары, о свойствах пар сил и условия равновесия пар сил.	<p>Понятие о паре сил. Действие пары сил на тело. Плечо пары сил, момент пары, знак момента. Свойства пары сил. Сложение пар сил. Условие равновесия пар сил.</p>	<p>Раскрывает сущность понятий «пар сил», «момент пары». Объясняет свойства пары сил и условия равновесия пар сил.</p>
<b><u>Тема 1.4 Плоская система произвольно расположенных сил.</u></b>		
<p>Сформировать понятия о плоской системе произвольно расположенных сил, об условиях и уравнениях ее равновесия, о балочных системах, классификации нагрузок.</p> <p>Дать знания о методике расчета типовых задач.</p>	<p>Момент силы относительно точки.</p> <p>Приведение силы к данной точке (центру). Приведение плоской системы сил к данной точке Главный вектор и главный момент плоской системы сил. Равнодействующая плоской системы сил. Теорема Вариньона, ее применение. Условия и уравнения равновесия плоской системы произвольно расположенных сил (три формы). Балочные системы: виды опор, опорные реакции.</p> <p>Классификация нагрузок: по способу приложения, по характеру действия, по времени действия.</p>	<p>Раскрывает сущность понятий главный вектор и главный момент. Формулирует условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.</p> <p>Объясняет уравнения равновесия, балочных систем, классификацию нагрузок.</p> <p>Излагает методику расчета балок с использованием уравнений равновесия.</p>

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><i>Практическая работа № 1</i></b>		
Сформировать умение рассчитывать опорные реакции балки.	Расчет опорных реакций балок.	Рассчитывает опорные реакции балок.
<b><u>Тема 1.5 Центр тяжести.</u></b>		
Сформировать знания о центре параллельных сил, силе тяжести, статическом моменте и его свойствах. Дать понятие о нахождении координат центра тяжести плоских фигур в соответствии с предложенным алгоритмом.	Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил. Сила тяжести тела. Статический момент площади и его свойства. Положение центра тяжести простых геометрических фигур. Центр тяжести составных плоских фигур. Алгоритм решения задач на определение центра тяжести.	Раскрыть сущность понятий «центр параллельных сил», «сила тяжести», «статический момент площади» Описывает свойства статического момента. Объясняет свойства центра параллельных сил, формулы для определения его положения.
<b><i>Лабораторная работа № 1</i></b>		
Углубить знания о силе тяжести в лабораторных условиях. Сформировать умения определять координаты центра тяжести плоских фигур и анализировать полученные результаты.	Определение центра тяжести плоских фигур методом подвешивания	Умеет определять координаты центра тяжести составных плоских фигур опытным путем и аналитически.
<b><u>Раздел 2. Основы сопротивление материалов.</u></b>		
<b><u>Тема 2.1 Основные положения.</u></b>		
Сформировать знания об основных задачах сопротивления материалов, о гипотезах и допущениях, о классификации нагрузок. Дать понятие о методе сечений, внутренних силовых	Основные задачи сопротивления материалов: расчет элементов конструкций на прочность, расчет элементов конструкций на жесткость, расчет элементов конструкций на устойчивость. Деформируемое тело. Деформация упругая и пластичная. Классификация нагрузок. Гипотезы и допущения о свойствах	Излагает основные задачи сопротивления материалов: расчет элементов конструкций на прочность, расчет элементов конструкций на жесткость, расчет элементов конструкций на устойчивость; описывает гипотезы и допуще-

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<p>факторах и напряжениях.</p>	<p>материалов и характере деформаций. Понятие о брус. Метод сечений. Применение метода сечений для определения внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении бруса. Определение вида нагружения в зависимости от ВСФ. Напряжение: полное, нормальное и касательное</p>	<p>ния о свойствах материалов и характере деформаций; объясняет классификацию нагрузок. Раскрывает сущность понятий «метода сечений» «ВСФ», «напряжения и его составляющие»</p>
<p><b><u>Тема 2.2 Растяжение и сжатие.</u></b></p>		
<p>Дать понятие о продольных силах и нормальных напряжениях, о построении эпюр продольных сил и нормальных напряжений Сформировать знания о деформациях (продольной и поперечной), о законе Гука, модуле Юнге, коэффициенте Пуассона. Сформировать понятие об испытаниях материалов на растяжение и сжатие. Изучить диаграмму растяжения низкоуглеродистой стали и основные характеристики материалов. Дать знания о методах расчета на прочность (проверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки)</p>	<p>Продольные силы и их эпюры. Гипотеза плоских сечений. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса и их эпюры. Продольная и поперечная деформации. Закон Гука. Модуль продольной упругости (модуль Юнга), коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Осевые перемещения поперечных сечений. Испытания материалов на растяжение и сжатие. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали. Основные механические характеристики. Диаграммы растяжения хрупких материалов. Диаграммы сжатия пластичных и хрупких материалов. Основные механические свойства пластичных и хрупких материалов при сжатии. Напряжения предельные, расчетные и допускаемые. Коэффициент запаса прочности. Расчет на прочность. Три вида расчета: проверочный, проектный (определение требуемы размеров поперечного сечения) и определение допускаемой нагрузки.</p>	<p>Определяет продольные силы и нормальные напряжения. Строит эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Описывает виды деформации (продольную и поперечную); закон Гука, диаграмму растяжения. Излагает методы расчета на прочность элементов конструкций(проверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки).</p>

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b>Лабораторная работа № 2</b>		
Научить использовать знания о видах деформации при растяжении. Сформировать умения производить испытания образца на растяжение.	Испытание на растяжение	Использует знания о деформации, возникающей при растяжении. Испытывает образец на растяжение.
<b>Лабораторная работа № 3</b>		
Научить использовать знания при оценивании пластичных материалов на сжатии экспериментальным путем. Сформировать умения производить испытание на сжатие пластичных и хрупких материалов.	Испытания на сжатие образцов из пластичных и хрупких материалов	Использует полученные знания при оценивании пластичности экспериментальным путем. Оценивает пластичность материала. Испытывает образцы хрупких, пластичных материалов на сжатие.
<b><u>Тема 2.3 Практические расчеты на срез и смятие</u></b>		
Дать понятие о расчетах на срез и смятие.	Понятие о срезе и смятии. Условия прочности на срез и смятие. Допускаемые напряжения. Расчетные формулы. Примеры расчета.	Раскрывает сущность расчетов на срез и смятие.
<b><u>Тема 2.4 Геометрические характеристики плоских сечений</u></b>		
Сформировать понятие об осевых, полярных и центробежных моментах инерции, о главных осях и главных центральных моментах инерции, о зависимости между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей.	Осевые, центробежные и полярные моменты инерции. Связь между осевыми и полярными моментами инерции. Связь между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей. Главные оси и главные центральные моменты инерции. Осевые моменты инерции простейших сечений: прямоугольника, круга, кольца. Определение главных центральных моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии.	Раскрывает понятие «осевые, полярные и центробежные моменты инерции» Объясняет зависимость между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей. Определяет главные центральные моменты инерции составных сечений, имеющих ось симметрии, по предлагаемой методике.

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><u>Тема 2.5 Кручение</u></b>		
<p>Сформировать понятие о чистом сдвиге, о законе Гука при сдвиге, о кручении бруса круглого поперечного сечения, о напряжениях и деформации при кручении.</p> <p>Дать знания о построении эпюр крутящих моментов, о методике расчета на прочность и жесткость.</p>	<p>Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига. Кручение прямого бруса круглого сечения: крутящие моменты и их эпюры; деформации при кручении (угол закручивания: абсолютный и относительный); напряжения в поперечных сечениях бруса.</p> <p>Формулы полярных моментов инерции и моментов сопротивления кручению для круглого и кольцевого сечения.</p> <p>Методика расчета валов на прочность и жесткость при кручении.</p>	<p>Объясняет сущность понятий «чистый сдвиг» «кручение бруса круглого поперечного сечения»</p> <p>Объясняет закон Гука при сдвиге, напряжения и деформации при кручении.</p> <p>Описывает построение эпюр крутящих моментов.</p> <p>Излагает методику расчета валов на прочность и жесткость.</p>
<b><i>Лабораторная работа №4</i></b>		
<p>Выработать умение производить испытание стержня круглого поперечного сечения на кручение и определять модуль сдвига при кручении.</p>	<p>Определение модуля сдвига при кручении стержня круглого поперечного сечения</p>	<p>Испытывает стержень круглого поперечного сечения на кручение. Определяет модуль сдвига.</p>
<b><u>Тема 2.6 Изгиб.</u></b>		
<p>Дать понятия об изгибе, его видах, о внутренних силовых факторах при прямом изгибе (поперечная сила и изгибающий момент)</p> <p>Сформировать знания о построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, о нормальных напряжениях, о линейных и угловых перемещениях, о прочности и</p>	<p>Основные понятия и определения. Изгиб прямой и косоу, чистый и поперечный. Внутренние силовые факторы: поперечная сила <math>Q</math> и изгибающий момент <math>M</math> и их эпюры.</p> <p>Правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (на примерах статически определимых двухопорных и консольных балок, нагруженных плоскими системами параллельных сил и моментами).</p> <p>Нормальные напряжения в поперечных сечениях при чистом</p>	<p>Раскрывает сущность понятий «изгиб», «чистый изгиб» и «поперечный изгиб»</p> <p>Объясняет формулу для нормальных напряжений при чистом изгибе, при построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.</p> <p>Объясняет расчет балок на прочность (проверочный, проектный и определение допустимой нагрузки)</p>

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
жесткости при изгибе, о расчетах на прочность (проверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки).	изгибе. Расчеты на прочность при изгибе. Осевые моменты сопротивления изгибу простых сечений (прямоугольного, круглого, кольцевого). Рациональные формы поперечных сечений.	
<b>Практическая работа № 3</b>		
Выработать навыки и умения построения эпюр $Q$ и $M$ .	Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.	Определяет поперечные силы и изгибающие моменты и строить их эпюры.
<b>Практическая работа № 4</b>		
Научить выполнять расчеты на прочность при изгибе и рационально подбирать поперечное сечение балок.	Расчет на прочность при изгибе	Выполняет проверочные и проектные расчеты на прочность при изгибе.
<b>Обязательная контрольная работа № 1</b>		
<b><u>Тема 2.7 Изгиб и кручение.</u></b>		
Дать понятие о совместном действии изгиба и кручения, о внутренних силовых факторах и напряжениях в поперечном сечении, о видах напряженного состояния, о назначении и сущности третьей и пятой теорий прочности.	Совместное действие изгиба и кручения. Внутренние силовые факторы и напряжения в поперечном сечении. Назначение и сущность третьей (наибольших касательных напряжений) и пятой (энергии формоизменения) теорий прочности. Эквивалентный момент по этим теориям. Расчет бруса круглого поперечного сечения на изгиб с кручением.	Объясняет сочетание деформаций: изгиб и кручение; излагает внутренние силовые факторы и напряжения в поперечном сечении. Объясняет формулы для эквивалентного напряжения по теориям, определяет эквивалентный момент. Излагает сущность третьей и пятой теорий прочности.
<b>Практическая работа № 4</b>		
Сформировать умение определять диаметр вала редуктора по третьей теории прочности.	Определение диаметра вала редуктора по третьей теории прочности	Определяет диаметр вала редуктора по третьей теории прочности

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><u>Раздел 3 Элементы кинематики и динамики.</u></b>		
<b><u>Тема 3.1 Основные понятия кинематики.</u></b>		
<p>Дать представления об основных понятиях кинематики, о покое траектории, пути, времени, скорости, движение.</p>	<p>Кинематика как наука о механическом движении. Покой и движение. Основные понятия: траектория, путь, время, скорость, движение.</p>	<p>Высказывает общее суждение об основных понятиях кинематики, о покое, траектории, пути, времени, скорости, движение.</p>
<b><u>Тема 3.2 Кинематика точки</u></b>		
<p>Сформировать знания о способах задания движения точке, о скорости, ускорении и его составляющих (нормальном и касательном), о средней скорости и скорости в данный момент времени, об ускорении полном, нормальном и касательном.</p>	<p>Способы задания движения точки. Средняя скорость и скорость в данный момент времени. Ускорение полное, нормальное и касательное. Виды движения точки в зависимости от ускорения. Равномерное и равнопеременное движение. Кинематические графики и связь между ними.</p>	<p>Объясняет способы задания движения точки. Раскрывает сущность понятий «скорость», «ускорение точки» излагает его составляющие. Описывает движение точки в зависимости от ускорения. Объясняет построение кинематических графиков.</p>
<b><u>Тема 3.3 Простейшие движения твердого тела.</u></b>		
<p>Сформировать знания о простейших движениях твердого тела, о способах передачи вращательного движения. Сформировать понятия на равномерное и равнопеременное вращение, определять линейные скорости и ускорения точек вращающегося тела, определять передаточное число простейших механизмов.</p>	<p>Поступательное движение твердого тела. Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси. Угловое перемещение, уравнение вращательного движения. Средняя угловая скорость и угловая скорость в данный момент. Частота вращения. Равномерное и равнопеременное вращение, уравнения и основные формулы. Линейные скорости и ускорения (нормальное, касательное и полное) точек вращающегося тела.</p>	<p>Имеет понятия на равномерное и равнопеременное вращение, определяет линейные скорости и ускорения точек вращающегося тела, передаточные отношения простейших механизмов.</p>

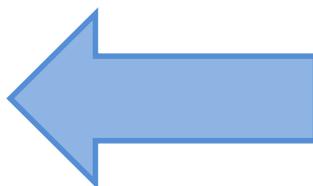
Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><u>Тема 3.4 Основные понятия и аксиомы динамики</u></b>		
Сформировать знания об основных понятиях и аксиомах динамики,	Предмет динамики. Аксиомы динамики: первая аксиома – принцип инерции; вторая аксиома – основной закон динамики; третья аксиома – закон равенства действия и противодействия, четвертая аксиома – закон независимости действия сил.	Формулирует основные понятия динамики. Излагает аксиомы динамики: первая аксиома – принцип инерции; вторая аксиома – основной закон динамики; третья аксиома – закон равенства действия и противодействия, четвертая аксиома – закон независимости действия сил.
<b><u>Тема 3.5 Силы инерции. Метод кинетостатики.</u></b>		
Дать понятие о силах инерции, при прямолинейном и криволинейном движении материальной точки, о методе кинетостатики. Научить применять принцип Д'Аламбера при решении задач динамики.	Силы инерции. Метод кинетостатики. Свободная и несвободная точка. Силы инерции при криволинейном движении материальной точки. Принцип Д'Аламбера.	Описывает силы инерции, при прямолинейном и криволинейном движении материальной точки, о методе кинетостатики, принцип Д'Аламбера.
<b><u>Тема 3.6 Работа и мощность.</u></b>		
Сформировать знания о работе постоянной силы при поступательном и вращательном движении. Дать понятия о КПД, о работе и мощности	Работа постоянной силы при поступательном и вращательном движении. Работа равнодействующей. Работа силы тяжести. Работа движущих сил и сил сопротивления. Мощность при поступательном и вращательном движении тела. Понятие о механическом коэффициенте полезного действия (КПД).	Описывает работу постоянной силы при поступательном и вращательном движении. Излагает понятия о КПД, мощности и работе.

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<p><b><u>Тема 3.7 Общие теоремы динамики.</u></b>  <b><u>Основное уравнение динамики вращательного тела.</u></b></p>		
<p>Дать понятие об импульсе силы, количестве движения, кинетической энергии точки, о внешних и внутренних силах системы, о моменте инерции тела.</p> <p>Сформировать знания о теоремах, об изменении количестве движении точки, о кинетической энергии точки и основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела.</p>	<p>Понятие импульса силы, количества движения. Теорема о количестве движения точки. Кинетическая энергия точки. Теорема о кинетической энергии точки. Система материальных точек. Внешние и внутренние силы системы. Момент инерции тела.</p>	<p>Раскрывает сущность понятий импульс силы, количество движения и кинетическая энергия. Излагает теоремы об изменении количестве движении точки, о кинетической энергии точки и основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела</p>
<p><b><u>Раздел 4 Детали машин и механизмов</u></b></p>		
<p><b><u>Тема 4.1 Основные понятия и определения.</u></b></p>		
<p>Дать представления о звене, о кинематической паре, о механизме, классификации механизмов.</p> <p>Сформировать знания о классификации машин, деталей и сборочных единиц, об основных требованиях, предъявляемых к машинам, сборочным единицам и деталям.</p>	<p>Машина, классификация машин. Звено, кинематическая пара, кинематическая цепь, механизм. Детали и сборочные единицы и их классификация. Основные требования к машинам, сборочным единицам и деталям. Контактные напряжения</p>	<p>Высказывает общие суждения о звене, о кинематической паре, о механизме, классификации механизмов.</p> <p>Раскрывает сущность о классификации машин, деталей, сборочных единиц, о контактных напряжениях.</p>

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><u>Тема 4.2 Соединение деталей.</u></b>		
<p>Сформировать знания о неразъемных и разъемных соединениях, их особенностях и области применения, о классификации</p>	<p>Неразъемные соединения: заклепочное, сварное соединения, соединение пайкой, склеиванием, запрессовкой, развальцовкой. Их особенности и область применения. Разъемные соединения: резьбовое, штифтовое, шпоночное, шлицевое. Их особенности и область применения</p>	<p>Описывает виды о неразъемных и разъемных соединениях, их особенностях и области применения, Излагает классификацию соединений.</p>
<b><u>Тема 4.3 Механизмы поступательного, колебательного и прерывистого движения.</u></b>		
<p>Сформировать знания о шарнирном четырехзвеннике, кривошипно-ползунном механизме, механизмах поступательного, колебательного и прерывистого действия, об их назначении и применении.</p>	<p>Рычажные механизмы: шарнирный четырехзвенник, кривошипно-ползунный механизм. Кулачковые, храповые и мальтийские механизмы. Виды плоских кулачковых механизмов. Их устройства, принцип действия и область применения</p>	<p>Объясняет устройство, принцип действия шарнирного четырехзвенника, кривошипно-ползунного механизма, кулачкового, храпового и мальтийского механизмов. Описывает виды плоских кулачковых механизмов.</p>
<b><u>Тема 4.4 Винтовые механизмы.</u></b>		
<p>Дать понятие о винтовых механизмах их сравнительной оценке и классификации. Дать представления о КПД, передаточном числе и о расчете передач с трением скольжения.</p>	<p>Винтовые механизмы для передачи движения. Передачи с трением качения и скольжения. КПД и передаточное число передачи. Материалы винтовой пары. Методика расчета передач с трением скольжения. Допускаемые напряжения.</p>	<p>Объясняет назначение, устройство, область применения винтовых механизмов, их классификацию. Называет КПД и передаточное число, материалы винтовой пары и допускаемые напряжения.</p>

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<b><u>Тема 4.5 Механизмы передачи вращательного движения.</u></b>		
<p>Сформировать понятие о механических передачах, их назначении, устройстве, области применения.</p> <p>Сформировать знания о фрикционных, ременных, зубчатых, червячных и цепных передачах.</p> <p>Дать понятия о методике расчета фрикционных, ременных, зубчатых, червячных и цепных передачах.</p>	<p>Классификация механических передач: фрикционные, ременные, зубчатые, червячные и цепные передачи. Их назначение, принцип действия и область применения.</p> <p>Основные кинематические и силовые характеристики для одно- и многоступенчатых передач.</p> <p>Зубчатые передачи. Классификация, сравнительная оценка. Виды зубчатых колес, их элементы. Материалы для изготовления. Способы изготовления. Краткие сведения о расчете на контактную прочность.</p>	<p>Описывает механические передачи их назначение, принцип действия, н область применения, излагает их классификацию.</p> <p>Объясняет назначение, область применения, устройство и принцип действия фрикционных, ременных, зубчатых, червячных и цепных передачах.</p> <p>Излагает классификацию фрикционных, ременных, зубчатых, червячных и цепных передачах.</p> <p>Объясняет методику расчета передач.</p>
<b><i>Обязательная контрольная работа №2</i></b>		
<b><i>Лабораторная работа № 5</i></b>		
<p>Сформировать умения составлять кинематические схемы простейших механизмов.</p>	<p>Составление кинематических схем механизмов</p>	<p>Составляет кинематические схемы простейших Механизмов</p>
<b><i>Практическая работа № 5</i></b>		
<p>Выполнять кинематический и силовой расчет механических передач</p>	<p>Кинематический и силовой расчет механических передач</p>	<p>Выполняет кинематический и силовой расчет механических передач</p>
<b><u>Тема 4.6 Валы и оси.</u></b>		
<p>Сформировать знания о назначении и классификации валов, об элементах их конструкции, о материалах изготовления.</p> <p>Сформировать знания о способах повышения сопротивления</p>	<p>Валы и оси, их назначение и классификация. Элементы конструкции. Материалы для изготовления. Проектровочные и проверочные расчеты осей и валов. Конструктивные и технологические способы повышения сопротивления усталости. Методика расчета валов и осей.</p>	<p>Объясняет назначение классификацию валов и осей.</p> <p>Описывает элементы конструкции и материалы, способы повышения сопротивления усталости.</p> <p>Излагает методику расчета валов и осей.</p>

Цели изучения темы	Содержание темы	Результат
<p>тивляемости усталости и методике расчета валов и осей.</p>		
<p><b><u>Тема 4.7 Опоры осей и валов (подшипники)</u></b></p>		
<p>Сформировать знания о классификации опорах скольжения и качения, их конструкциях, материалах, изготовления и классификации.            Дать понятия о методике расчета опор качения на динамическую грузоподъемность.</p>	<p>Опоры скольжения и качения. Конструкция опор, материалы для их изготовления, классификация. Сравнительная оценка опор.            Методика расчета опор качения по динамической грузоподъемности. Выбор опор в зависимости от условий работы.</p>	<p>Объясняет назначение, конструкции опор скольжения и качения, область применения, материалы, изготовление и классификацию.            Излагает методику расчета опор качения по динамической грузоподъемности.</p>
<p><b><u>Тема 4.8 Муфты</u></b></p>		
<p>Дать представления о муфтах, их назначении и классификации, о требованиях, предъявляемые к ним.            Сформировать знания об основных типах постоянных, сцепных, самоуправляемых и предохранительных муфт.            Дать представления о выборе методики расчета муфт.</p>	<p>Муфты, их назначение и классификация. Требования, предъявляемые к муфтам. Основные типы постоянных, сцепных, самоуправляемых и предохранительных муфт.            Краткие сведения о выборе методики расчета муфт.</p>	<p>Высказывает общие суждения о муфтах, их назначении и классификации, о требованиях, предъявляемые к ним.            Объясняет основные типы постоянных, сцепных, самоуправляемых и предохранительных муфт.            Высказывает общие суждения о выборе методики расчета муфт.</p>



# СУЩЕСТВЕННЫЕ И НЕСУЩЕСТВЕННЫЕ ОШИБКИ

## Существенные ошибки

### *В изложении теоретического материала:*

1. Затруднения в стандартном изложении терминов, определений, понятий, аксиом и теорем в области основных разделов технической механики.
2. Затруднения в определении условий равновесия стержневых и балочных систем, нагруженных плоскими и пространственными системами сил.
3. Ошибки в описании основных кинематических зависимостей при равномерном и равнопеременном движении точки, при вращательном движении твердого тела, основных кинематических и силовых характеристик для одно- и многоступенчатых передач.

### *При выполнении практических и расчетно-графических работ:*

1. Затруднения в выборе расчетной схемы (модели) конструкции для соответствующих расчетов по основным разделам технической механики.
2. Ошибки при составлении уравнений равновесия.
3. Ошибки при построении эпюр внутренних силовых факторов при различных видах деформации и затруднения в выборе опасных сечений.
4. Затруднения в выборе рациональных сечений в расчетах на прочность и жесткость при различных видах деформации.
5. Ошибки в определении размерностей величин.

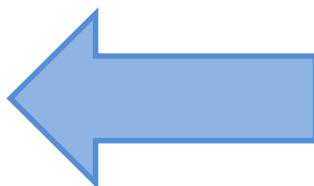
## Несущественные ошибки

### *В изложении теоретического материала:*

1. Неточности в стандартном изложении терминов, определений, понятий, аксиом и теорем в области основных разделов технической механики.
2. Неполное раскрытие тем.

### *При выполнении практических и расчетно-графических работ:*

1. Неточности в соблюдении нормативно-методических документов при оформлении практических и расчетно-графических работ.
2. Неаккуратное оформление практических и расчетно-графических работ.
3. Применение нерационального способа решения задач механики.



## ПЕРЕЧЕНЬ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Раздел, тема	Количество часов					
	Всего *	В том числе на		Всего **	В том числе на	
		лабо- ра- тор- ные	прак- тиче- ские		лабо- ра- тор- ные	прак- тиче- ские
1	2	3	4	5	6	7
<b>Введение</b>	1			1		
<b>Раздел 1 Статика</b>	<b>15</b>		<b>2</b>	<b>15</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
1.1 Основные понятия и аксиомы статики	1			1		
1.2 Плоская система сходящихся сил	4			4		
1.3 Пара сил.	2			2		
1.4 Плоская система произвольно расположенных сил	4			4		
<i>Практическая работа № 1</i> Расчет опорных реакций балок.			2			2
1.5 Центр тяжести.	4			4		
<i>Лабораторная работа № 1</i> Определение центра тяжести плоских фигур					2	
<b>Раздел 2 Основы сопротивление материалов</b>	<b>28</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>28</b>	<b>6</b>	<b>6</b>
2.1 Основные положения	2			2		
2.2 Растяжение и сжатие	8			8		
<i>Лабораторная работа № 2</i> Испытание материалов на растяжение		2			2	
<i>Лабораторная работа № 3</i> Испытание образцов из пластичных и хрупких материалов на сжатие		2			2	
2.3 Практические расчеты на срез и смятие	1			1		
2.4 Геометрические характеристики плоских сечений	1			1		
2.5 Кручение.	4			4		
<i>Лабораторная работа № 4</i> Определение модуля сдвига при кручении стержня круглого поперечного сечения					2	
2.6 Изгиб	7			7		
<i>Практическая работа № 2</i> Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов						2
<i>Практическая работа № 3</i> Расчет на прочность при изгибе						2
<b><i>Обязательная контрольная работа №1</i></b>	1			1		

1	2	3	4	5	6	7
2.7 Изгиб и кручение <i>Практическая работа № 4</i> Определение диаметра вала редуктора по третьей теории прочности	4		2	4		2
<b>Раздел 3 Элементы кинематики и динамики</b>	<b>8</b>			<b>8</b>		
3.1 Основные понятия кинематики	1			1		
3.2 Кинематика точки	1			1		
3.3 Простейшие движения твердого тела	2			2		
3.4 Основные понятия и аксиомы динамики	1			1		
3.5 Силы инерции Метод кинетостатики	1			1		
3.6 Работа и мощность	1			1		
3.7 Общие теоремы динамики. Основное уравнение вращающегося тела	1			1		
<b>Раздел 4 Детали машин и механизмов</b>	<b>16</b>	<b>2</b>		<b>16</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
4.1 Основные понятия и определения	1			1		
4.2 Соединения деталей	1			1		
4.3 Механизмы поступательного, колебательного и прерывистого движения	3			3		
4.4 Винтовые механизмы	1			1		
4.5 Механизмы передачи вращательного движения	6			6		
<b>Обязательная контрольная работа №2</b>	1					
<i>Лабораторная работа № 5</i> Изучение конструкции 2- ступенчатого цилиндрического редуктора и определение параметров зацепления		2			2	
<i>Практическая работа № 5</i> Кинематический и силовой расчет механических передач						2
4.6 Валы и оси	1			2		
4.7 Опоры осей и валов (подшипники)	1			1		
4.8 Муфты	1			1		
Итого	<b>68</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>68</b>	<b>10</b>	<b>10</b>

**Примечание:** \* для специальностей

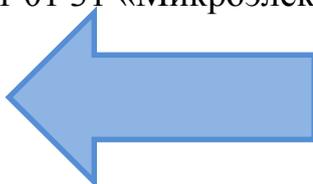
2-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы»

2-37 01 05 «Городской электрический транспорт»

2-36 03 31 «Монтаж и эксплуатация электрооборудования» (по направления)

2-36 04 32 «Электроника механических транспортных средств»

\*\* для специальности 2-41 01 31 «Микроэлектроника»



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

## Введение

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т. п.), с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как автомобили, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли и т. п. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется теоретической механикой. Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин.

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами. Теоретическая механика представляет собою часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел, т. е. те законы, которые, например, справедливы и для движения Земли вокруг Солнца и для полета ракеты или артиллерийского снаряда и т. п.

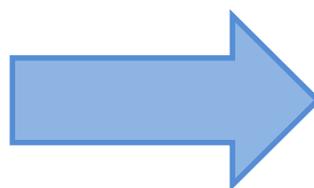
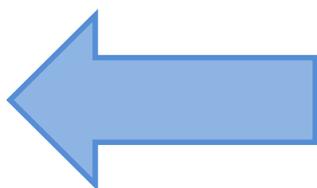
Под движением в механике мы понимаем механическое движение, т. е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Механическим взаимодействием между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, называется в механике силой.

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся философов древности Аристотеля (384—322 до н. э.) и происходит от греческого слова μηχανή, означающего по современным понятиям «оружие», «машина», «изобретение»

Стоящая в наши дни перед отечественной наукой и техникой задача непрерывного роста и внедрения в производство новой техники требует дальнейшего повышения качества подготовки инженерных кадров, расширения теоретической базы их знаний. Известную роль в решении этой задачи должно сыграть и изучение одной из научных основ современной техники – теоретической механики.



# РАЗДЕЛ 1 СТАТИКА

## 1.1 Основные понятия и аксиомы статики

Объектом изучения теоретической механики служат не реальные тела, которые имеют форму размеры, массу и другие свойства, а наделенные идеальными свойствами их абстрактные образы (модели):

1) **Материальная точка** – геометрическая точка, обладающая массой. Так при решении некоторых задач механики формой и размерами реальных тел пренебрегают, считая их материальными точками.

2) **Абсолютно твердое тело** – такое материальное тело, в котором расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным, т.е. недеформируемое тело.

Способность тел сопротивляться изменению их формы и размеров называют **жесткостью**. Поэтому тела с абсолютно неизменяемыми размерами и формой следует считать не только абсолютно твердыми, но абсолютно жесткими.

Любое абсолютно твердое тело рассматривают как систему материальных точек, неизменно связанных между собой, т.е. лишенных возможности перемещаться относительно друг друга. Для краткости абсолютно твердое тело называют просто **твердым телом**.

В статике изучают условия равновесия абсолютно твердого тела под действием различных систем сил. Под **равновесием** тел понимают покой или равномерное и прямолинейное движение относительно условно неподвижной системы отсчета. Такой системой отсчета при изучении механики является Земля.

Материальные тела находятся друг с другом во взаимодействии.

Мера механического действия одного материального тела на другое называется **силой**.

Сила величина **векторная**, она определяется:

- 1) **модулем** (числовым значением); модуль силы будем обозначать –  $F, Q, R, N$ ;
- 2) **направлением действия**; вектор силы будем обозначать –  $\vec{F}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{N}$ ;
- 3) **точкой приложения** – местом контакта взаимодействующих тел.

Графическое изображение силы в виде направленного отрезка см. на рисунке 1.1.

Обычно начало (т. А на рисунке 1.1) или конец вектора (т. В) совпадают с точкой приложения силы. Стрелка указывает направление действия силы.

**Линия действия силы (ЛДС)** – прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу.

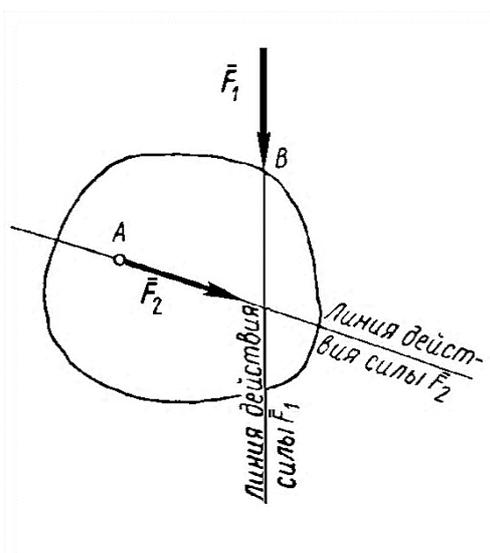
В международной системе единиц СИ сила выражается в Ньютонах (Н).

Согласно основному закону механики сила, приложенная к материальной точке, сообщает ей ускорение, имеющее направление силы и модуль пропорциональный модулю силы:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ следовательно: } 1\text{H} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

На все тела вблизи Земли действует сила тяжести  $\vec{G}$ . При падении на Землю тел любой массы, они имеют одинаковое ускорение – ускорение свободного падения  $g=9.81 \text{ м/с}^2$  (для средней широты). Для свободно падающего тела основной закон механики:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \text{ следовательно: } 1\text{кгс} = 1\text{кг} \cdot 9,81\text{м/с}^2 = 9,81\text{Н} \approx 10\text{Н}$$



Кратные единицы силы:

$$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н};$$

$$1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н};$$

$$1 \text{ кгс} = 10 \text{ Н}$$

$$1 \text{ тс} = 10^4 \text{ Н}$$

Рисунок 1.1 – Графическое изображение силы

**Система сил (СС)** – совокупность сил действующих на тело. Система сил обозначается как перечисление сил, входящих в систему, взятое в круглые скобки.

$(\vec{F}_1; \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n)$  – система сил, состоящая из  $n$  сил.

**Эквивалентные системы сил** – системы сил, оказывающие на тело одинаковое воздействие (см. рисунок 1.2).

$\text{Я}(\vec{F}_1; \vec{F}_2) \sim (\vec{N}_1; \vec{N}_2)$  – эквивалентные СС.

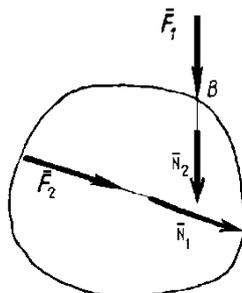


Рисунок 1.2 – Эквивалентные системы сил

Пусть нам дана система сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3)$  (рисунок 1.3, а), заменим ее другой эквивалентной ей системой, состоящей из одной силы  $\vec{F}_\Sigma$ , при этом механическое состояние тела не изменится (см. рисунок 1.3, б).  $\vec{F}_\Sigma \sim (\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3)$ .

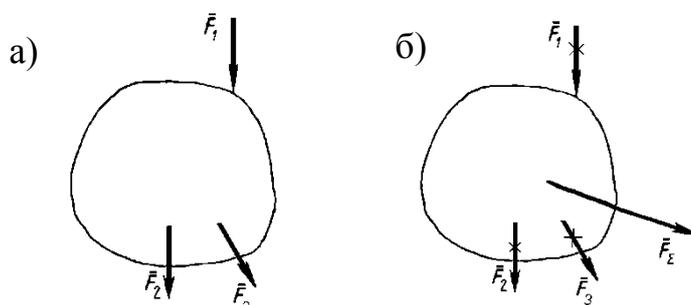


Рисунок 1.3 – Замена системы сил равнодействующей

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется **равнодействующая** данной системы.  $\vec{F}_\Sigma$  – равнодействующая  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3)$ ;  $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$  – составляющие равнодействующей  $\vec{F}_\Sigma$ .

К телу, находящемуся под действием (рисунок 1.4) системы сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3)$ , приложим силу  $\vec{F}'_\Sigma$ , равную по модулю равнодействующей  $\vec{F}_\Sigma$  и направленную противоположно, т.е.  $\vec{F}'_\Sigma = -\vec{F}_\Sigma$ . Что станет с телом? Оно уравновесится, т.е. будет находиться в состоянии покоя.

Система сил, под действием которой тело находится в равновесии, называется **уравновешенной системой сил**.  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}'_\Sigma)$  – уравновешенная СС;  $\vec{F}'_\Sigma$  – уравновешивающая  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3)$ .

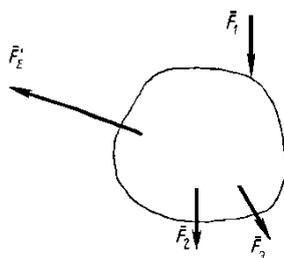


Рисунок 1.4 – Уравновешенная система сил

Сила, которая, будучи приложена к системе сил, действующей на тело, приводит эту систему сил в равновесие, называют **уравновешивающей** данной системы сил.

### Задачи и аксиомы статики

Статика рассматривает задачи на:

- 1) равновесие систем сил, приложенных к твердым телам;
- 2) преобразование одной системы сил в другую, ей эквивалентную (сложение и разложение сил).

Все методы, с помощью которых решаются эти задачи основываются на **аксиомах** (теоремах без доказательства), справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека.

**Аксиома 1 (принцип инерции):** всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Если  $V = 0$  имеем состояния статического равновесия, если  $V \neq 0$  - состояние динамического равновесия.

Эта аксиома, впервые сформулированная Галилеем, называется принципом инерции, потому что прямолинейное и равномерное движение материальной точки, происходящее без воздействия сил, называют движением по инерции (с латинского *inertia* – бездеятельность). В курсе физики она соответствует первому закону Ньютона.

Так как твердое тело есть неизменяемая система материальных точек, та данная аксиома справедлива и для него.

**Аксиома 2 (условие равновесия двух сил):** две силы, приложенные к твердому телу, образуют уравновешенную систему тогда и только тогда, когда они равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  (рисунок 1.5).

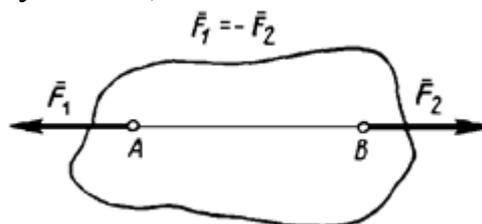


Рисунок 1.5 – Условие равновесия двух сил

**Условимся кратко записывать в конспекте:**

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  – силы равны по модулю, действуют вдоль одной прямой и направлены противоположно;

$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$  – силы равны по модулю, действуют вдоль одной прямой и направлены в одну сторону;

$F_1 = F_2$  – силы равны по модулю.

**Аксиома 3 (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил):** Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или от нее отнять уравновешенную систему сил (рисунок 1.6).

Иначе говоря, если к данной системе сил присоединить уравновешенные силы или из данной системы сил их исключить, то вновь образованная система сил эквивалентна данной (рисунок 1.6), т.е.  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4) \sim (\vec{F}_2; \vec{F}_4)$ .

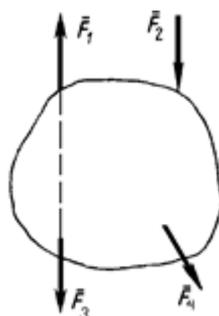


Рисунок 1.6 –Присоединение и исключение уравновешенных сил.

**Следствие 1:** Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия в любую другую точку, действие силы на тело при этом не нарушается.

**Дано:**  $\vec{F}$  в т.  $A$  (рисунок 1.7,  $a$ ).

**Доказать:**  $\vec{F}$  в т.  $B$  (см. рисунок 1.7,  $в$ ).

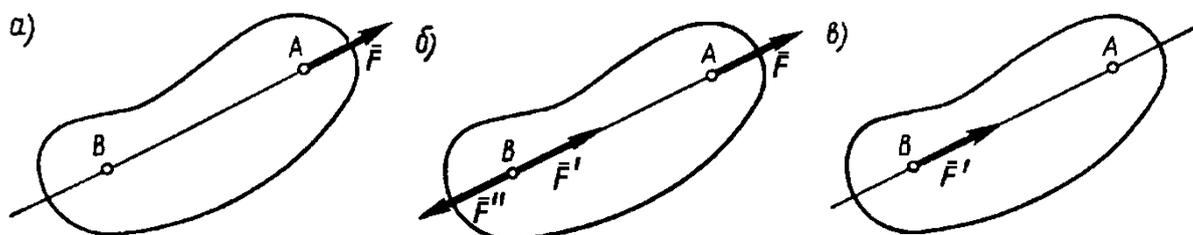


Рисунок 1.7 – Скользящий вектор

На основании аксиомы 3 статики приложим в т.  $B$  две силы, уравновешивающие друг друга  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  и равные по модулю силе  $\vec{F}$ , т.е.  $\vec{F}' = -\vec{F}''$  и  $F' = F'' = F$ . Получили систему сил  $(\vec{F}'; \vec{F}''; \vec{F})$ , в которой вектор силы  $\vec{F} = -\vec{F}''$  (рисунок 1.7,  $б$ ), т.е. согласно аксиоме 2 силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}''$  уравновешивают друг друга, а согласно аксиоме 3 их можно исключить, оставшаяся сила  $\vec{F}' = \vec{F}$ , что равносильно тому, что сила  $\vec{F}$  из т.  $A$ , вдоль линии ее действия перенесена в т.  $B$  (рисунок 1.7,  $в$ ).

**Следствие 1 кратко** можно сформулировать так: сила, приложенная к твердому телу, - скользящий вектор.

Необходимо заметить, что это свойство вектора силы справедливо только в теоретической механике (механике абсолютно твердого тела). При действии сил на реальные тела перенос сил может значительно изменить форму и размеры тела, а иногда невозможен и вообще, если тело  $AB$  – цепь (рисунок 1.8).



Рисунок 1.8 – Тело-цепь

**Аксиома 4 (правило параллелограмма):** Две приложенные к точке тела силы имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рисунок 1.9).



Рисунок 1.9 – Правило параллелограмма

Операция замены системы сил их равнодействующей называется **сложением сил**, она выражается векторным равенством:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_\Sigma$  и называется **геометрической суммой** этих сил.

Из правила параллелограмма может быть получено **правило треугольника**: равнодействующая двух сил, приложенных к точке тела равна замыкающей стороне треугольника, две другие стороны которого равны данным силам (рисунок 1.10).

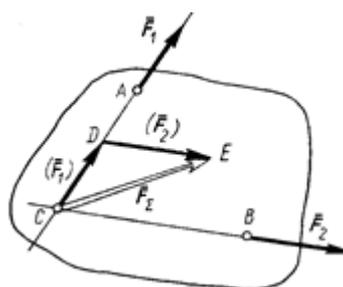


Рисунок 1.10 – Правило треугольника

Проведя линии действия заданных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  и определив т. С пересечения этих сил, строим треугольник CDE, в котором  $\overline{CD} = \vec{F}_1$ ;  $\overline{DE} = \vec{F}_2$  и  $\overline{CE} = \vec{F}_\Sigma$ .

Основываясь на правиле параллелограмма, можно поставить обратную задачу, задачу разложения данной силы на две составляющие, приложенные к той же точке. Для решения этой задачи достаточно построить параллелограмм на заданном векторе силы, как на диагонали, стороны параллелограмма и будут искомыми силами. Однако, чтобы задача имела определенное решение (т.к. на диагонали можно построить бесчисленное множество параллелограммов), кроме числового значения силы, необходимо задать дополнительные условия, например, направление силы.

**Следствие 2 (теорема о равновесии трех сил)** приведена без доказательства: если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости образуют

уравновешенную систему, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Пересечение линий действия трех сил в одной точке является необходимым условием равновесия трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, но не достаточным. Следствие 2 широко используется при решении задач статики.

**Аксиома 5 (закон действия и противодействия):** силы взаимодействия двух твердых тел друг на друга равны по модулю и направлены противоположные стороны.

В физике эта аксиома известна как третий закон Ньютона. Пятая аксиома имеет важное значение в механике: если тело 1 действует на тело 2 с силой  $\vec{F}_{12}$  (рисунок 1.11), то тело 2 действует на тело 1 с точно такой по модулю силой  $\vec{F}_{21}$ , но направленной в противоположном направлении. Однако, хотя силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны, они не уравновешивают друг друга, так как приложены к разным телам.

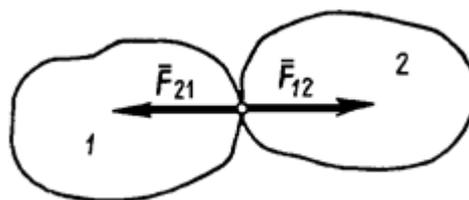


Рисунок 1.11 – Закон действия и противодействия

**Аксиома 6 (принцип отвердения):** если деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие этого тела не нарушится, если оно затвердеет, т.е. станет абсолютно твердым.

Из этого принципа следует, что условия необходимые и достаточные для равновесия данного абсолютно твердого тела, необходимы, но недостаточны для равновесия деформируемого тела, по форме и размерам тождественного с данным твердым телом. Например, если под действием сил резиновое тело находится в равновесии, то равновесие сохранится, когда это тело станет абсолютно твердым. Однако, если под действием сил абсолютно твердое тело находится в равновесии, то став резиновым, оно теряет равновесное состояние. Эта аксиома позволяет задачи сопротивления материалов решать с помощью простых уравнений статики.

### **Связи и их реакции.**

Твердое тело называют *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Свободное тело имеет шесть степеней свободы: три – перемещения вдоль координатных осей и три – вращения вокруг этих осей.

В качестве относительного примера можно привести летящий воздушный шарик. На практике обычно встречаются тела, которые соприкасаются или скреплены с другими телами.

Твердое тело называется **несвободным**, если его перемещение в пространстве ограничено другими телами.

Тела, ограничивающие движение данного тела, называют **связями**.

Примером связей могут служить рельсы, на которые опирается вагон; трос, на котором висит груз, пол на котором стоит стул, стул, на котором сидит человек и др.

В природе нет абсолютного покоя и тела, стремясь под действием внешних сил перемещаться в пространстве, сами действуют на препятствующие этому перемещению связи.

Так стул, находясь на полу, давит на пол, а шар, висящий на нити, растягивает нить.

Согласно аксиоме 5, одновременно с возникновением действия тела на связь возникает равная по модулю и направленная в противоположную сторону сила противодействия связи, приложенная к телу. т.е. с какой силой мы давим на стул, на котором сидим, с такой силой стул давит на нас.

Действие связи на тело называют **силой реакции связи** или **реакцией связи** (от латинского «re» - против и «actio» - действие, т.е. ответ на внешнее действие).

На все несвободные тела действуют две группы сил:

1) **активные (движущие)** их еще называют в статике заданными силами, так как они, как правило, известны; их обычно обозначают:  $\bar{F}, \bar{Q}, \bar{G}, \bar{P}$ ;

2) **реакции связи (пассивные силы)**, их обычно обозначают:  $\bar{R}, \bar{N}$ .

**Аксиомы связей:**

1) Всякое несвободное тело можно считать свободным, если мысленно отбросить связи и заменить их реакциями связей.

2) Наложение новых связей состояние тела, находящегося в равновесии, не изменяет.

При решении задач статики чаще всего требуется определить реакции связей, для этого следует знать, что:

1) они приложены к телу в точках соприкосновения со связью;

2) направлены в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу;

3) направление реакции связи зависит от ее вида, расположения относительно тела и характера соединения связи с телом.

Например, шар лежит на плоскости (рисунок 1.12). Под действием силы тяжести  $\bar{G}$  тело стремится двигаться вниз, плоскость препятствует этому движению, поэтому реакция связи  $R_A$  направлена вверх и приложена в точке  $A$ , которая является точкой соприкосновения тела со связью.

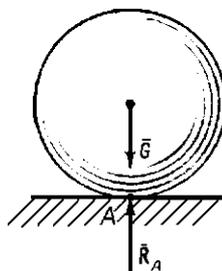


Рисунок 1.12 – Действие сил на шар

### Основные виды связей и правила определения их реакций:

**1 Гладкая опора (свободное опирание на связь).** Поверхности тела и связи условно считают абсолютно гладкими (идеальными). Во всех случаях связь препятствует движению тела в направлении перпендикулярном опорной поверхности или касательной в точке касания тела со связью. Различают три вида свободного опирания:

**1.1 При опирании тела о связь своим ребром** (см. рисунок 1.13) реакция связи направлена перпендикулярно плоской ( $\bar{R}_A$ ) или касательной криволинейной поверхности опоры ( $\bar{R}_B$ ). Связь заштрихована, тело в виде бруска.

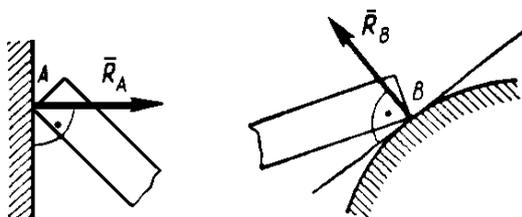


Рисунок 1.13 – Реакции связи при опирании тела о связь своим ребром

**1.2 При опирании тела о ребро связи своей поверхностью (плоской или криволинейной)** реакция связи (рисунок 1.14) перпендикулярна поверхности тела ( $\bar{R}_C$ ) или касательной к поверхности тела ( $\bar{R}_D$ ).

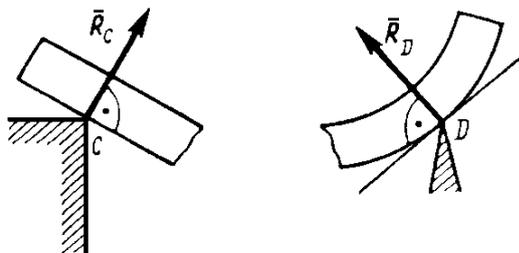


Рисунок 1.14 – Реакции связи при опирании тела о ребро связи

**1.3 При опирании поверхности тела о поверхность связи** (рисунок 1.15) реакция связи ( $\bar{R}_E, \bar{R}_K$ ) направлена перпендикулярно общей касательной обеих поверхностей.

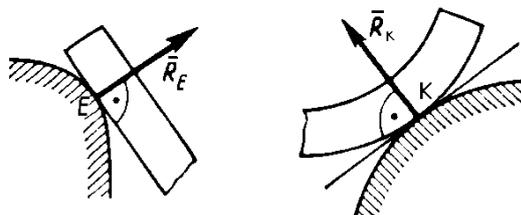


Рисунок 1.15 – Реакции связи при опирании поверхности о поверхность связи

**2 Гибкая связь** (нить, трос, цепь, канат, пружина) условно считается абсолютно нерастяжимой и невесомой (идеальной). Гибкая связь работает только на растяжение, поэтому ее реакция всегда направлена от тела к связи и приложена к телу в точке крепления (рисунок 1.16).

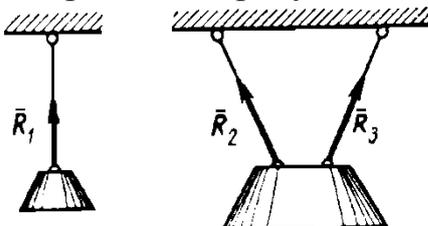


Рисунок 1.16 – Гибкая связь

**3 Шарнирно-стержневая связь (стержневая система)** – условно абсолютно жесткие (недеформируемые) и невесомые стержни с шарнирным креплением на концах.

**Цилиндрическим шарниром** называется соединение двух тел посредством пальца (болта), проходящего через отверстия в этих телах (рисунок 1.17). Такое соединение обеспечивает взаимное вращение тел относительно оси шарнира, перпендикулярной к плоскости рисунка. Если пренебречь трением в шарнире, то его реакция лежит в плоскости, перпендикулярной к его оси, и проходит через центр шарнира.

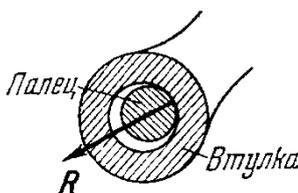


Рисунок 1.17 – Цилиндрический шарнир

Шарнирные крепления позволяют стержню занимать положение, при котором действие на него со стороны удерживаемого тела всегда направлено

по прямой, проходящей через оси шарниров. Согласно аксиоме 2 реакции стержневых связей направлены вдоль этой же прямой, но в противоположном направлении. Обычно стержни делают прямолинейными, в этих случаях реакции направлены вдоль стержня. При этом реакции приложены в точках крепления стержней с телом (рисунок 1.18) и, если:

- 1) *стержень растянут*, то его реакция направлена в сторону от тела к стержню ( $\bar{R}_A$ );
- 2) *стержень сжат* - в сторону от стержня к телу ( $\bar{R}_B$ ).

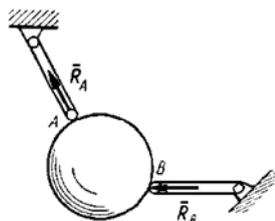


Рисунок 1.18 – Шарнирные крепления

Таким образом, в отличие от гибкой связи, прямолинейные стержни могут воспринимать не только растягивающие, но и сжимающие нагрузки. При решении задач заранее не всегда можно определить, какой стержень растянут, а какой сжат. Поэтому предполагают, что все стержни растянуты, а в результате решения получаем значения реакций сжатых стержней отрицательными, так как на самом деле эти реакции имеют направление, противоположное предполагаемому.

**4 Шарнирно-подвижная опора (ШПО)** представляет собой видоизменение свободного опирания. Тело (брус) опирается на опорную поверхность через шарнир, поставленный на катки (рисунок 1.19, а, б).

Опора препятствует перемещению тела только в направлении, перпендикулярном опорной поверхности катков (вдоль опорной поверхности шарнир может вместе с телом перемещаться). Реакция  $\bar{R}$  шарнирно-подвижной опоры направлена по пересекающей ось шарнира прямой, перпендикулярной его опорной поверхности (см. рисунок 1.19, а, б). Условное обозначение ШПО показано на рисунке 1.19, в, г.

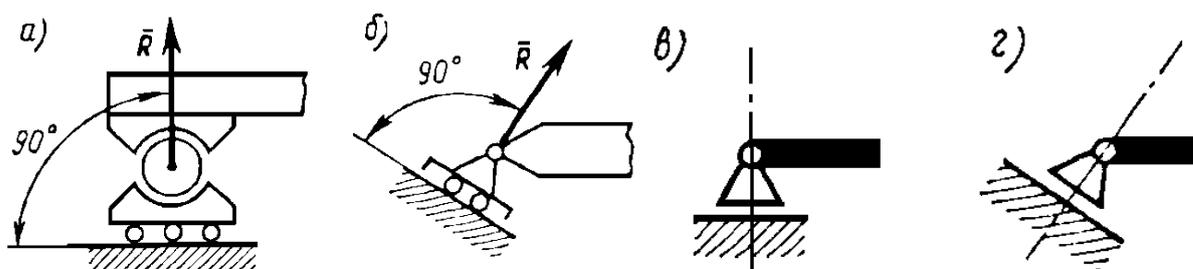


Рисунок 1.19 – Шарнирно-подвижная опора

**5 Шарнирно-неподвижная опора (ШНО)** дает возможность телу свободно поворачиваться около шарнира, но препятствует поступательному перемещению тела в любом направлении, перпендикулярном оси шарнира (рисунок 1.20).

Реакция шарнирно-неподвижной опоры  $\bar{R}$  может быть направлена в любую сторону в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (см. рисунок 1.20 а). Возникают две неизвестные – модуль силы  $R$  и ее направление, т.е. угол  $\alpha$ , образуемый линией действия силы с какой-либо заданной или выбранной осью координат. Согласно аксиоме 4 искомую реакцию связи  $\bar{R}$  заменяют составляющими  $\bar{R}_x$  и  $\bar{R}_y$  (см. рисунок 1.20, б). По найденным составляющим  $\bar{R}_x$  и  $\bar{R}_y$  можно легко определить искомую реакцию ШНО. На рисунке 1.20, в представлено условное обозначение ШНО.

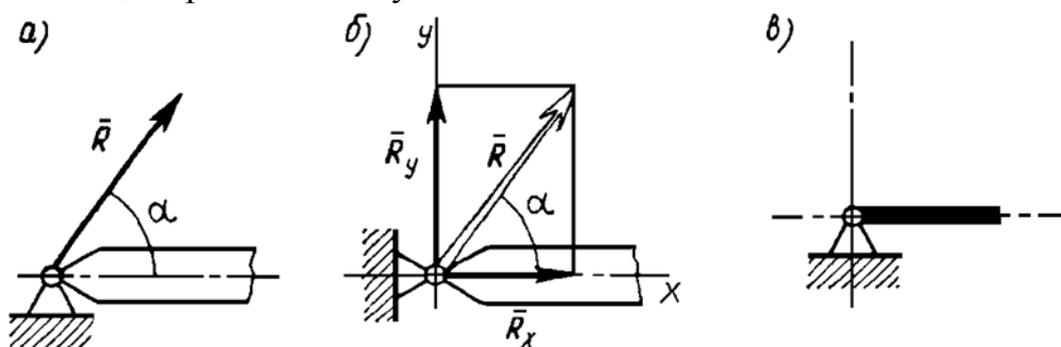


Рисунок 1.20 – Шарнирно-неподвижная опора

**6 Жесткая заделка (защемление)** не допускает ни линейных, ни угловых перемещений (рисунок 1.21). Эту опору заменяют двумя взаимно перпендикулярными составляющими реакции  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  и моментом реакции  $M_A$ . На рисунке 1.22 приведен пример определения реакций связей.

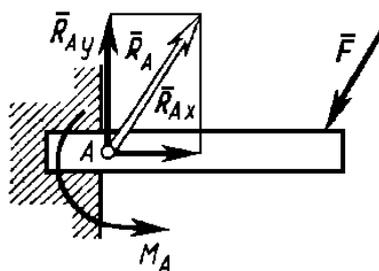


Рисунок 1.21 – Жесткая заделка

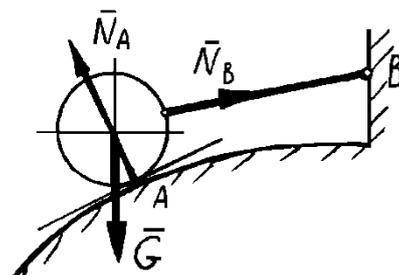
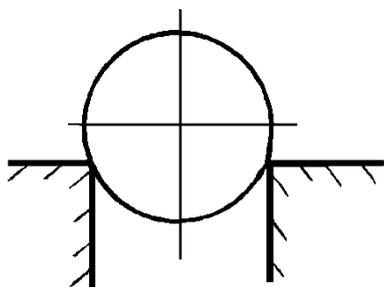


Рисунок 1.22 – Определение реакций связей

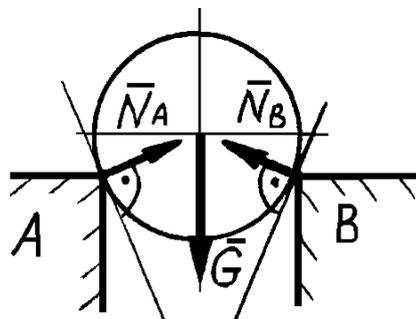
## Примеры определения реакций опор

Указать точки приложения и направление активных сил и реакций связей, действующих на тело.

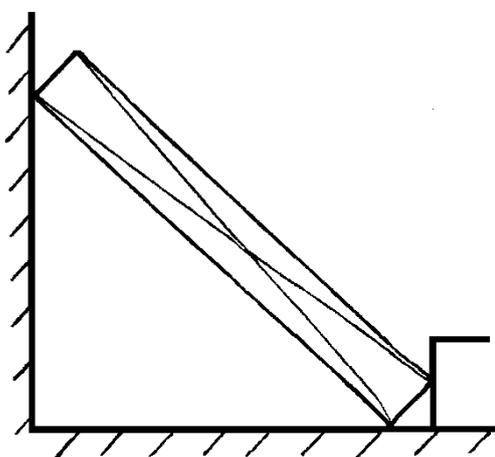
Дано:



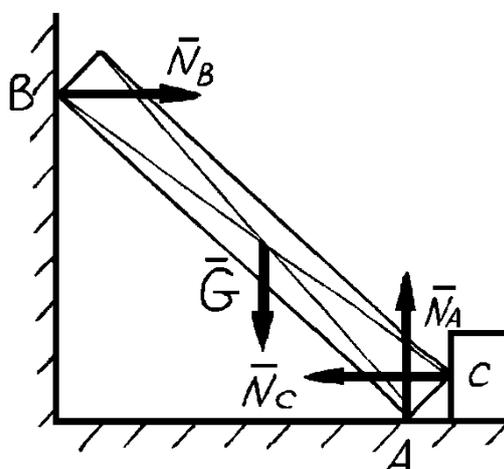
Решение:



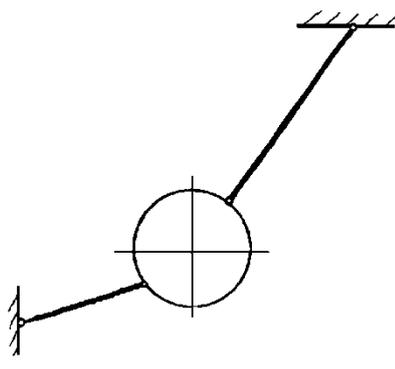
Дано:



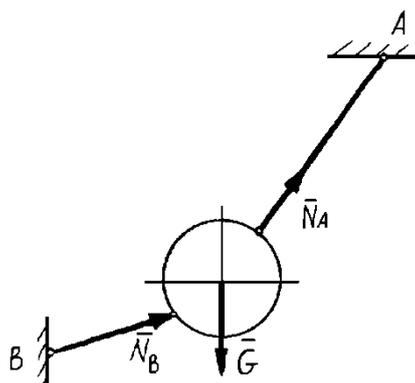
Решение:



Дано:



Решение:



$\bar{G}$  - активная сила;

$\bar{N}_A$ ;  $\bar{N}_B$ ;  $\bar{N}_C$  - реакции опор

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 1.2 Плоская система сходящихся сил (ПлССС)

ПлССС – совокупность сил, расположенных в одной плоскости, линии действия которых пересекаются в одной точке. Если силы сходящейся системы сил приложены к разным точкам (рисунок 1.23, а), то согласно следствию 1 из аксиом статики, каждую силу можно перенести в точку пересечения линий действия сил и получить эквивалентную систему сил, приложенных в одной точке (см. рисунок 1.23, б)

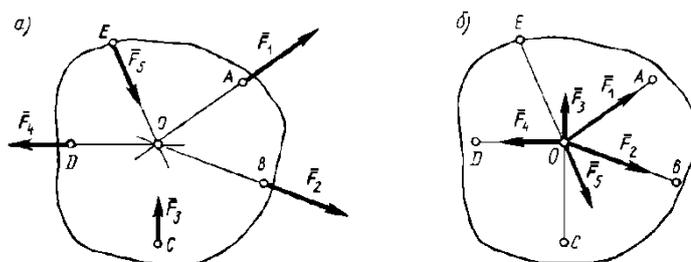


Рисунок 1.23– Плоская система сходящихся сил

### Методы определения равнодействующей двух сил:

1) **метод параллелограмма** (см. аксиому 4): две приложенные к точке тела силы имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (см. рисунок 1.24).



Рисунок 1.24 – Метод параллелограмма

2) **метод силового треугольника**: равнодействующая двух сил, приложенных к точке тела равна замыкающей стороне треугольника, две другие стороны которого равны данным силам (рисунок 1.25). По теореме косинусов имеем:  $F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi)$ ;  $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ , тогда модуль равнодействующей любой системы, состоящей из двух сил:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi} \quad (1)$$

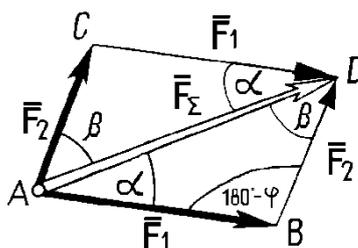


Рисунок 1.25 – Метод силового треугольника

Направление равнодействующей определяется по теореме синусов:

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{F_\Sigma}{\sin \varphi}, \quad \text{откуда} \quad \sin \alpha = \frac{F_2 \sin \varphi}{F_\Sigma} \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{F_1 \sin \varphi}{F_\Sigma}, \quad (2)$$

где  $\varphi = \alpha + \beta$  - угол между силами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ;  $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ .

**Частные случаи:**

1)  $\varphi = 0$ ;  $\cos 0 = 1$ , тогда модуль равнодействующей определим из формулы (1):  $F_\Sigma = F_1 + F_2$ . Так как  $\sin 0 = 0$ , то из (2) имеем:  $\alpha = \beta = 0$ . Следовательно, **равнодействующая двух сил, направленных вдоль одной прямой и в одну сторону, действует в ту же сторону и ее модуль равен сумме модулей составляющих сил** (см. рисунок 1.26, а).

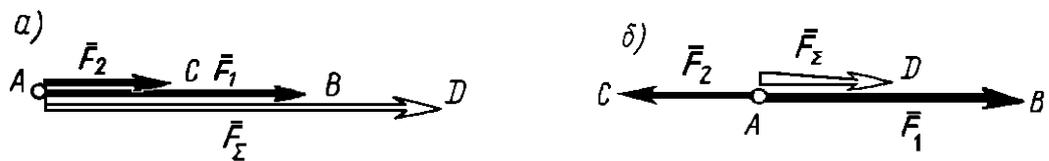


Рисунок 1.26 – Равнодействующая двух сил

2)  $\varphi = 180^\circ$ ;  $\cos 180^\circ = -1$ ;  $\sin 180^\circ = 0$ , из (1) имеем:  $F_\Sigma = F_1 - F_2$ , а из (2) имеем:  $\alpha = 0$ ;  $\beta = 180^\circ$ . Следовательно, **равнодействующая двух сил, направленных вдоль одной прямой, но в противоположные стороны, действует в сторону большей силы и ее модуль равен разности модулей составляющих сил** (см. рисунок 1.26, б).

3)  $\varphi = 90^\circ$ ;  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ , тогда из (1) имеем:  $F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ , а из (2) имеем:  $\sin \alpha = \frac{F_2}{F_\Sigma}$  и  $\sin \beta = \frac{F_1}{F_\Sigma}$ . Полученные формулы можно получить непосредственно из рисунка 1.27, а.

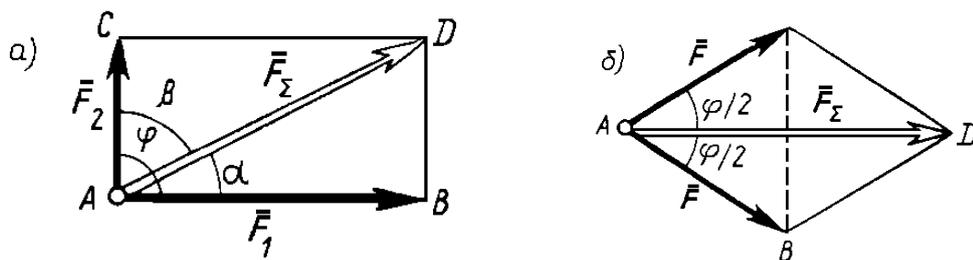


Рисунок 1.27 – Равнодействующая двух сил, направленные под углом

4) при сложении двух сил, равных по модулю:  $F_1 = F_2 = F$ , из (1) имеем:  $F_\Sigma = F\sqrt{2 + 2\cos \varphi}$ . Учитывая, что  $\cos(\varphi/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$  (известно из курса математики), получим:  $F_\Sigma = 2F \cos(\varphi/2)$ , тогда из (2) имеем:  $\sin \alpha = \sin \beta = \sin(\varphi/2)$ . **При сложении двух равных по модулю сил, приложенных к точке под углом  $\varphi$  друг к другу, образуется ромб (рисунок 1.27, б), равнодействующая этих сил равна диагонали ромба.**

При рассмотрении частных случаев мы пользовались *методом вычислений* для определения модуля и направления равнодействующей двух сил с помощью формул геометрии и тригонометрии.

### Определение равнодействующей ПлССС

1) *Графический метод* – метод последовательного сложения по правилу параллелограмма. На рисунке 1.28 задана система сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4)$ .

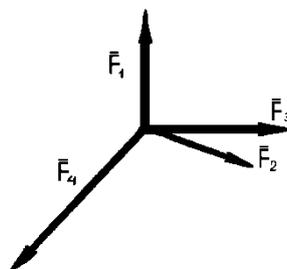


Рисунок 1.28 – Система сил

Используя правило параллелограмма, складываем сначала силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рисунок 1.29,а). Диагональ  $OA$  является равнодействующей этих сил, обозначим ее  $\vec{F}_{1,2}$ . Далее складываем силы  $\vec{F}_{1,2}$  и  $\vec{F}_3$  (рисунок 1.29,б), диагональ  $OB$  является равнодействующей трех сил  $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$ , обозначим ее  $\vec{F}_{1,3}$ . Теперь складываем силы  $\vec{F}_{1,3}$  и  $\vec{F}_4$  (рисунок 1.29,в), диагональ  $OC$  является искомой равнодействующей всех сил, входящих в систему и обозначается  $\vec{F}_\Sigma$ .

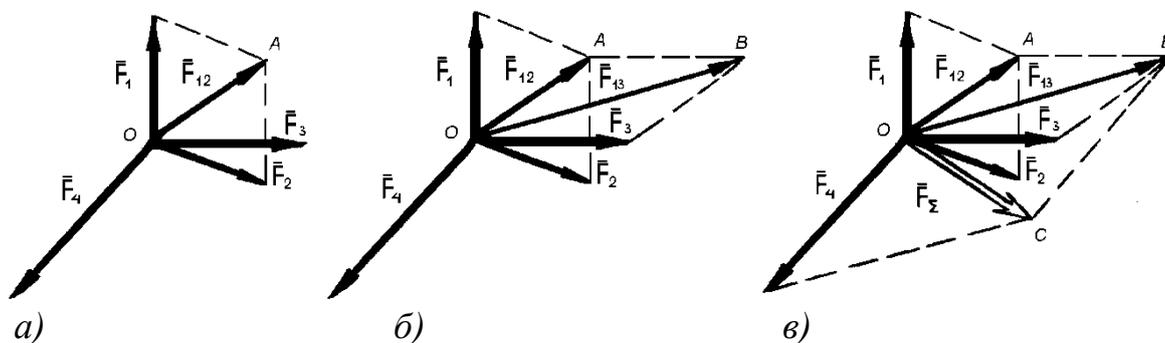


Рисунок 1.29 – Графический метод

2) *Графоаналитический метод* – метод силового многоугольника (рисунок 1.30). Из конца вектора  $\vec{F}_1$  отложим вектор  $\vec{F}_2$  (рисунок 1.30,а), из конца вектора  $\vec{F}_2$  отложим  $\vec{F}_3$  (рисунок 1.30,б), из конца вектора  $\vec{F}_3$  отложим  $\vec{F}_4$ , а затем «замкнем» получившийся силовой многоугольник вектором  $\vec{F}_\Sigma$ . При этом вектор равнодействующей  $\vec{F}_\Sigma$  имеет начало в начале первой силы и конец в конце последней силы (рисунок 1.30,в). Модуль и направление равнодействующей не изменится, если изменить порядок, в котором откладываются векторы сил при построении силового многоугольника (можно построить самостоятельно).

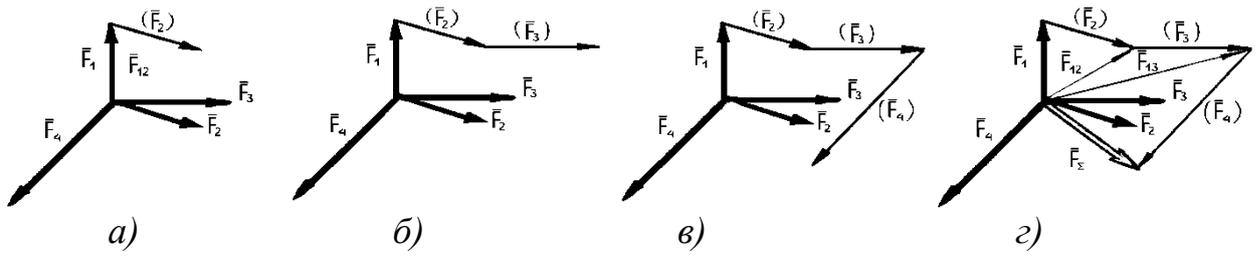


Рисунок 1.30 – Графоаналитический метод

Таким образом, *равнодействующая ПлССС равна геометрической сумме сил, входящих в систему:  $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ ; и является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на силах, как на сторонах и всегда направлена от начала первой силы к концу последней*(рисунок 1.31).

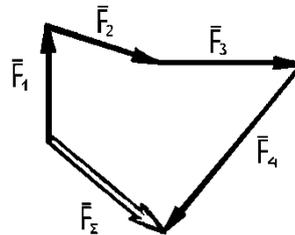


Рисунок 1.31 – равнодействующая ПлССС

Теперь, если мы к данной системе сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4)$  (см. рисунок 1.28) приложим силу  $\vec{F}_5$ , равную по модулю равнодействующей и направленную в противоположную сторону, т.е.  $\vec{F}_\Sigma = -\vec{F}_5$  (рисунок 1.32,а), то мы получим уравновешенную систему сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4; \vec{F}_5)$ . Приложив вектор силы  $\vec{F}_5$  к концу вектора силы  $\vec{F}_4$ , получаем замкнутый силовой многоугольник (см. рисунок 1.32,б).

Следовательно, *если система сил является уравновешенной, то равнодействующая системы равна нулю, а силовой многоугольник, образуемый силами системы, замкнут, т.е. конец последней силы попадает в начало первой* (см. рисунок 1.32, в).

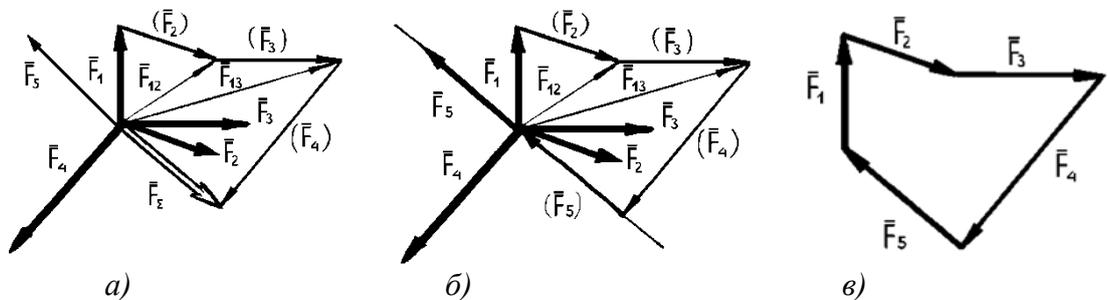


Рисунок 1.32 – Замкнутый силовой многоугольник

**3)аналитический метод определения равнодействующей (метод проекций)** более точный и менее трудоемкий (см. ниже).

### Проекция силы на ось.

**Проекцией силы** на ось называется длина направленного отрезка оси, заключенного между проекциями на эту ось начала и конца вектора силы (рисунок 1.33, а). Проекцию обычно обозначают той же буквой, что и силу, но с индексом, например,  $F_x$  - проекция силы  $\vec{F}$  на ось  $x$ .

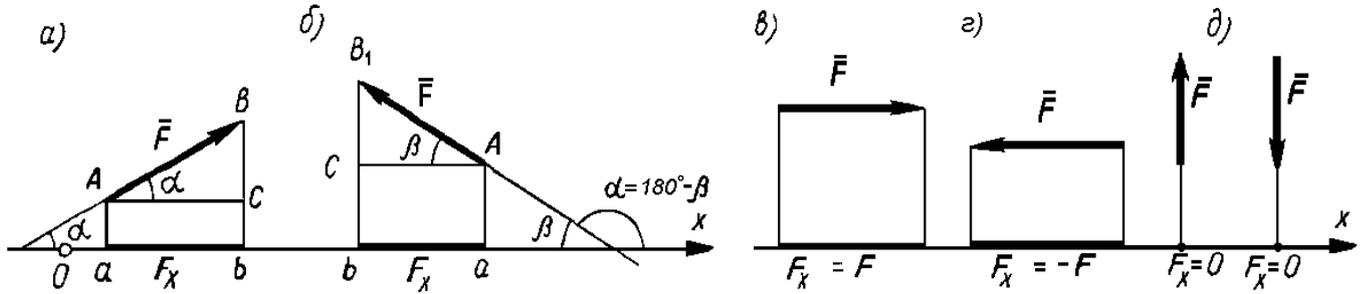


Рисунок 1.33 – Проекция сил на ось

Проекция силы на ось величина скалярная, равная произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. Обозначим угол между направлением силы и положительным направлением оси через  $\alpha$ , тогда  $F_x = F \cos \alpha$ .

Если угол  $\alpha$  острый, то проекция положительна, а если тупой – отрицательна (см. рисунок 1.33, б):

$$F_x = F \cos \alpha = F \cos(180^\circ - \beta) = -F \cos \beta, \text{ т.к. } \cos(180 - \beta) = -\cos \beta.$$

Следовательно, **если сила образует тупой угол с положительным направлением оси, то проекция силы на ось отрицательна и равна произведению модуля силы на косинус острого дополнительного до  $180^\circ$  угла.**

#### Частные случаи:

1) если  $\alpha = 0$  (рисунок 1.33, в), проекция силы на ось равна модулю силы:  $F_x = F$ ;

2) если  $\alpha = 180^\circ$  (рисунок 1.33, з), проекция силы на ось равна модулю силы, взятому с противоположным знаком:  $F_x = -F$ ;

3) если  $\alpha = 90^\circ$  или  $270^\circ$  (рисунок 1.33, д), проекция силы на ось равна нулю:  $F_x = 0$ .

### Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси.

При решении задач, как правило, необходимо определять проекции сил на две взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$ . Все сказанное о проекциях сил на ось  $x$  справедливо и для проекций сил на ось  $y$ .

Пусть сила  $\vec{F}$  образует с положительным направлением осей  $x$  и  $y$  соответственно углы  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рисунок 1.34), тогда  $F_x = F \cos \alpha = F \sin \beta$  и  $F_y = F \cos \beta = F \sin \alpha$ .

*Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси являются катетами прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является сама сила, т.е. модуль силы:  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ; направление силы:*

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}.$$

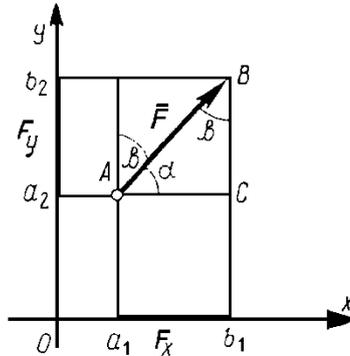


Рисунок 1.34 – Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси

### Метод проекций

*Теорема: проекции равнодействующей плоской системы сходящихся сил на каждую из осей координат равны алгебраической сумме проекций ее составляющих на те же оси.*

Доказательство приведено на рисунке 1.35. Аналогично можно доказать для оси  $y$ . Математически это можно записать:

$$F_{\Sigma x} = \Sigma F_{ix} = \Sigma X;$$

$$F_{\Sigma y} = \Sigma F_{iy} = \Sigma Y \text{ – эти два уравнения выражают метод проекций.}$$

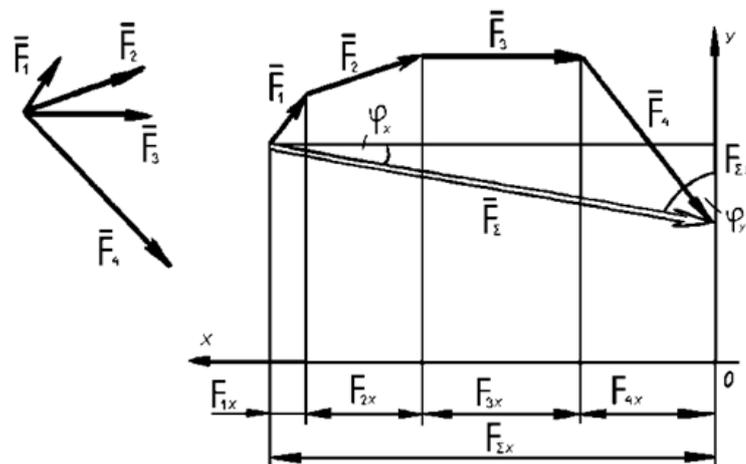


Рисунок 1.35 – Метод проекций

Зная силы, всегда можно найти их проекции и определить:

**1) модуль равнодействующей:**

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \text{ или } F_{\Sigma} = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2};$$

## 2) направление равнодействующей:

$$\cos \varphi_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}} = \frac{\Sigma F_{ix}}{\sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}}; \quad \cos \varphi_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}} = \frac{\Sigma F_{iy}}{\sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}}$$

где  $\varphi_x; \varphi_y$  - углы между направлением силы и положительным направлением осей  $x$  и  $y$  соответственно.

$F_{\Sigma x}; F_{\Sigma y}$  - проекции равнодействующей на оси  $x$  и  $y$  соответственно;

$F_{ix}; F_{iy}$  - проекции сил, входящих в систему, на оси  $x$  и  $y$  соответственно.

## Геометрическое и аналитическое условия равновесия ПлССС.

### Уравнения равновесия.

Если построить силовой многоугольник уравновешенной системы сил, то он получится замкнутым, т.е. замыкающий вектор  $\vec{F}_{\Sigma} = 0$ , так как конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого (см. рисунок 1.32, в).

Следовательно: замкнутый силовой многоугольник выражает в геометрической форме необходимое и достаточное условие равновесия ПлССС.

**Геометрическое условие равновесия: плоская система сходящихся сил уравновешена тогда и только тогда, когда силовой многоугольник, построенный на силах, входящих в систему, как на сторонах, замкнут.**

Если система сходящихся сил находится в равновесии, то ее равнодействующая равна нулю, т.е.  $F_{\Sigma} = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2} = 0$ . Очевидно, что данное выражение будет обращаться в нуль, если каждое из слагаемых под корнем будет равно нулю, т.е.:  $\Sigma F_{ix} = 0; \Sigma F_{iy} = 0$  данные уравнения называются **уравнениями равновесия ПлССС** и выражают **аналитические условия равновесия ПлССС: для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на каждую из двух осей координат были равны нулю.**

Любое из уравнений равновесия ПлССС, взятое отдельно от другого, является лишь необходимым условием, но не достаточным, так как равнодействующая может быть перпендикулярна одной из осей координат, и в этом случае проекция равнодействующей на эту ось будет равна нулю, зато на другую ось она не будет равна нулю. Поэтому только два уравнения равновесия вместе являются достаточным условием того, что  $\vec{F}_{\Sigma} = 0$  и система уравновешена.

В задачах обычно заранее известно, что данная система сходящихся сил уравновешена, так как тело под действием этой системы сохраняет состояние покоя, но среди сил есть неизвестные, это чаще всего реакции связей. Чтобы решить задачу с помощью уравнений равновесия ПлССС, число неизвестных не должно превышать двух, т.е. числа уравнений.

### Алгоритм решения задач на равновесие:

- 1) выделить тело (точку), равновесие которого рассматривается;
- 2) выявить все действующие на тело силы (активные) и изобразить их в виде векторов на расчетной схеме;
- 3) освободить тело от связей, заменив их реакциями и изобразить их в виде векторов на расчетной схеме;
- 4) выбрать оси координат (рационально: а) за начало координат принимают точку пересечения линий действия сил; б) одну из осей направляют вдоль неизвестной силы, тогда вторая ось будет перпендикулярна силе и ее проекция на эту ось будет равна нулю).
- 5) определить положение сил относительно осей координат (углы по правилам геометрии).
- 6) составить уравнения равновесия и решить их относительно неизвестных.
- 7) проверка (выбрать новое направление осей, например, одну из осей координат направляют вдоль другой неизвестной). При этом составляют одно уравнение и, решив его, сравнивают результаты с полученными при решении задачи значениями неизвестных сил, или подставив полученные при решении значения неизвестных сил, получают в проверке нуль.

### Пример решения задачи на равновесие

**Задача:** Шар, весом  $G = 160$  кН, лежит на наклонной поверхности и удерживается нитью  $AB$  в равновесии. Определить реакции связей, если  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ; остальное см. на рисунке 1.36,а.

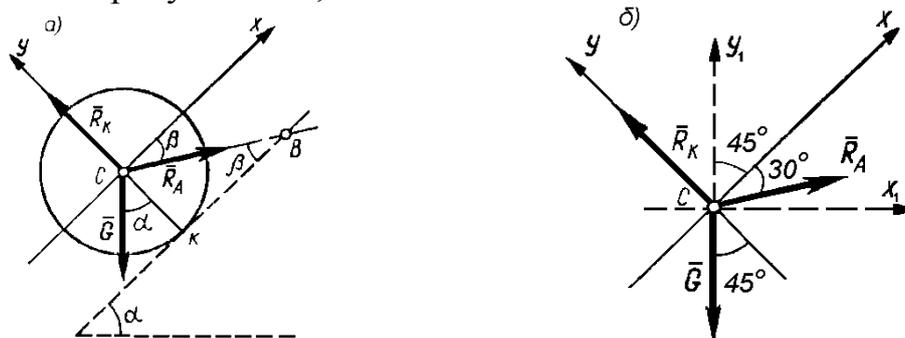


Рисунок 1.36 – Шар на наклонной поверхности

### Решение:

1. На шар действуют силы:
  - заданная сила тяжести  $\bar{G}$ , направленная вертикально вниз и приложенная в центре шара;
  - неизвестные реакции связей:  $\bar{R}_A$ , направленная вдоль нити от тела к связи, так как нить растянута, и приложенная в т.  $A$  – точке соединения шара

с нитью;  $\bar{R}_K$ , направленная перпендикулярно наклонной поверхности и приложенная в т.  $K$ .

Линии действия сил пересекаются в центре шара  $C$ , следовательно, эти силы, приложенные к различным точкам, можно заменить эквивалентной системой сил приложенных к точке  $C$ , равновесие которой и будем рассматривать (рисунок 1.36,  $a$ ).

2. Выбираем оси координат, ось  $y$  направляем вдоль неизвестной  $\bar{R}_K$ . Определяем положение сил относительно осей координат и составляем расчетную схему (рисунок 1.36,  $b$ ).

3 Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{ix} = 0; R_A \cos 30^\circ - G \cos 45^\circ = 0; (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; R_K - R_A \cos 60^\circ - G \cos 45^\circ = 0; (2)$$

$$\text{из (1) } R_A = \frac{G \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{160 \cdot 0,7071}{0,866} = 130,64 \text{ кН};$$

$$\text{из (2) } R_K = R_A \cos 60^\circ + G \cos 45^\circ = 130,64 \cdot 0,5 + 160 \cdot 0,7071 = 178,46 \text{ кН}.$$

**Проверка:**  $\Sigma F_{iy_1} = 0; R_K \cos 45^\circ + R_A \cos 75^\circ - G = 0;$   
 $178,46 \cdot 0,7071 + 130,64 \cdot 0,2588 = 126,19 + 33,81 - 160 = 0.$

**Ответ:**  $R_A = 130,64 \text{ кН}; R_K = 178,81 \text{ кН}.$

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 1.3 Плоская система пар сил

#### Момент силы относительно точки

Если к телу, закрепленному при помощи шарнира, (рисунок 1.37) приложить силу  $\vec{F}$ , то эта сила будет стремиться вращать тело относительно центра шарнира  $O$  (вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа).

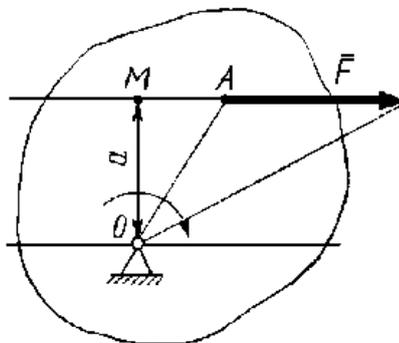


Рисунок 1.37 – Тело, закрепленное на шарнире

Вращательное действие силы измеряют величиной, называемой **моментом силы** относительно данной точки, который равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние (**плечо**, которое обозначим через  $a$ ) от данной точки  $O$  до линии действия силы.

Точку  $O$  называют **центром момента**. Чтобы найти плечо силы, нужно опустить перпендикуляр из центра момента на линию действия силы. Кратчайшее расстояние  $OM = a$ .

Будем считать момент силы **положительным**, если сила стремится вращать тело вокруг центра момента (в плоскости чертежа) **по часовой стрелке**, и **отрицательным** – **против часовой стрелки**. Это правило знаков условно и в другой литературе может быть обратным, но на результаты при решении задач оно не влияет.

В общем виде момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  равен:  $M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot a$ . Так как сила измеряется в Н, а расстояние в м, то момент силы имеет размерность: Н \* м.

Из определения момента следует:

- 1) модуль и знак момента не изменяется при переносе силы по линии действия или центра момента по прямой, параллельной линии действия силы;
- 2) модуль силы относительно точки равен нулю, если центр момента лежит на линии действия силы.

### Пример решения задачи.

**Задача 1.** Найти моменты силы  $\bar{F} = 1 \text{ кН}$  относительно точек  $A, B, C, D$ , если  $AO = 4 \text{ м}$  (см. рисунок 1.38).

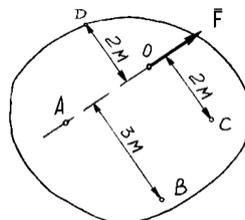


Рисунок 38 – Заданное тело

**Решение:**  $M_A(\bar{F}) = 0$  (т.к. плечо равно 0);  $M_B(\bar{F}) = F \cdot a = 1 \cdot 3 = 3 \text{ кН.м}$ ;

$$M_C(\bar{F}) = F \cdot a = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.м}; M_D(\bar{F}) = -F \cdot a = -1 \cdot 2 = -2 \text{ кН.м}.$$

**Ответ:**  $M_A(\bar{F}) = 0$ ;  $M_B(\bar{F}) = 3 \text{ кН.м}$ ;  $M_C(\bar{F}) = 2 \text{ кН.м}$ ;  $M_D(\bar{F}) = -2 \text{ кН.м}$ .

### Пара сил. Момент пары сил

Система из двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны, называется **парой сил** (рисунок 1.39). Условимся обозначать пару сил символом  $(\bar{F}; \bar{F}')$ .

Плоскость, в которой действует пара сил, называется **плоскостью действия пары сил**. Силы, из которых состоит пара не лежат на одной прямой, следовательно, они не уравнивают друг друга.

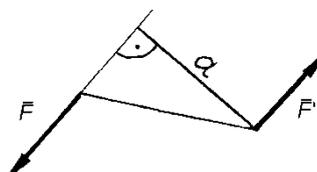


Рисунок 1.39 – Пара сил

Опыт показывает, что тело под действием пары стремится вращаться в плоскости ее действия. Это значит, что пару нельзя заменить одной силой (равнодействующей), потому, что под действием только одной силы тело должно было бы двигаться поступательно.

Пара сил, в отличие от любой другой неуравновешенной системы сил, не поддается дальнейшему упрощению и является простейшим элементом статики.

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется **плечом пары**.

Мерой вращательного движения пары на тело является **момент пары, равный взятому со знаком плюс или минус произведению модуля одной из сил пары на плечо**:  $M(\bar{F}; \bar{F}') = \pm F \cdot a$ .

Знак «+» ставится перед числовым значением момента, если пара стремится повернуть тело по часовой стрелке и знак «-» - если пар стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Вращательное действие пары сил на тело зависит от числового значения ее момента и от положения плоскости действия пары. Поэтому момент есть величина векторная.

Вектор момента пары перпендикулярен плоскости пары и если пара стремится повернуть плоскость:

- 1) по часовой стрелке, то вектор направлен к нам или вверх (рисунок 1.40, а);
- 2) против часовой стрелки – от нас или вниз (рисунок 1.40, б).

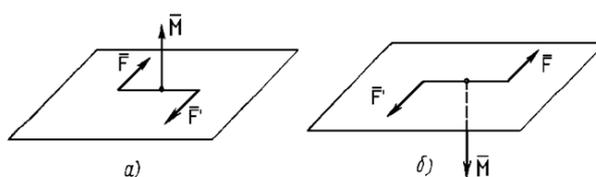


Рисунок 1.40 – Вектор момента пары

### Свойства пар сил:

1) Так как пару сил нельзя заменить одной силой, то ее нельзя уравновесить одной силой. Пару можно уравновесить только парой, имеющей равный по модулю и противоположный по знаку момент.

2) Сумма моментов сил пары относительно любой точки, взятой на ее плоскости действия, есть величина постоянная, равная моменту данной пары.

Действительно, если сложить моменты обеих сил пар относительно произвольной точки  $A$  (см. рисунок 1.41), то принимая во внимание, что  $F = F'$ , имеем:

$$F' \cdot c - F \cdot b = F(c - b) = F \cdot a,$$

где  $a$  – плечо заданной пары.

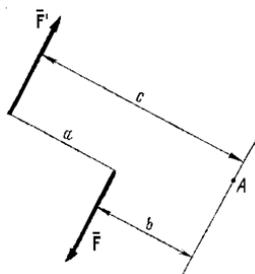


Рисунок 1.41 – Сложение моментов сил пары

3) Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю (рисунок 1.42).

Так как  $F = F'$ , то проекция силы  $\vec{F}$  на ось  $y$ :  $F_y = F \cos \alpha$ , а силы  $\vec{F}'$  на ту же ось:  $F'_y = -F' \cos \alpha = -F \cos \alpha$ , тогда алгебраическая сумма проекций:  $F \cos \alpha - F \cos \alpha = 0$ .

4) пару сил в плоскости ее действия можно переносить в любое новое положение, действие пары на твердое тело при этом не изменится.

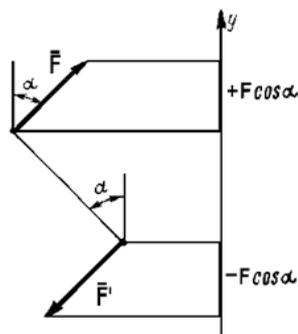


Рисунок 1.42 – Проекция сил пары

5) Две пары, расположенные в одной плоскости, производят на твердое тело одинаковое вращательное действие в том случае, если их моменты равны по модулю и совпадают по направлению. Такие пары сил называют **эквивалентными**.

Из свойств пары следует, что вращательное действие расположенной в данной плоскости пары, зависит только от ее момента, поэтому для задания пары сил достаточно указать числовое значение ее момента, а затем по заданному плечу можно определить силы пары, или по силам подобрать необходимое плечо. Исходя из этого, на рисунках и схемах пары сил изображают иногда круговой стрелкой, характеризующей направление вращения (рисунок 1.43).

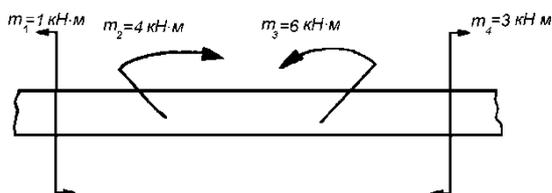
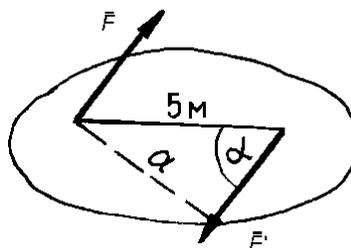


Рисунок 1.43 – Обозначение пары сил

**Пример решения задачи.**

**Задача 2** Найти момент пары сил, если  $\alpha = 30^\circ$ ;  $F = 1 \text{ кН}$ .



**Решение:** Момент пары сил:  $M(\vec{F}; \vec{F}') = F \cdot a = F \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ кН м}$ .

**Ответ:**  $M(\vec{F}; \vec{F}') = 2,5 \text{ кН м}$ .

### Сложение пар сил. Условие равновесия пар

Пары сил как и силы можно складывать, т.е. заменять действие двух или нескольких пар одной равнодействующей парой, обозначим ее  $M_{\Sigma}$ .

**Теорема: Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар** (приводится без доказательства)

Например, для рисунка 1.43 найдем момент равнодействующей пары:  $M_{\Sigma} = \Sigma m_i = -m_1 + m_2 - m_3 + m_4 = -1 + 4 - 6 + 3 = 0$ . Если в результате сложения пар  $M_{\Sigma} = 0$ , то действующие на тело пары сил образуют уравновешенную систему пар сил. Следовательно, необходимое и достаточное условие **равновесия плоской системы пар сил выражается одним уравнением:  $\Sigma m_i = 0$** . т.е. **для равновесия плоской системы пар сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар сил была равна нулю.**

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 1.4 Плоская система произвольно расположенных сил (ПлСПРС)

### Приведение силы к данной точке (центру)

**Теорема:** Всякую силу  $\vec{F}$ , приложенную к твердому телу в данной точке, можно перенести параллельно в любую другую точку тела, присоединяя при этом пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения, называемой центром приведения.

**Доказательство:** Пусть дана сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке  $A$  твердого тела, и ее требуется перенести в точку  $O$  (рисунок 1.44).

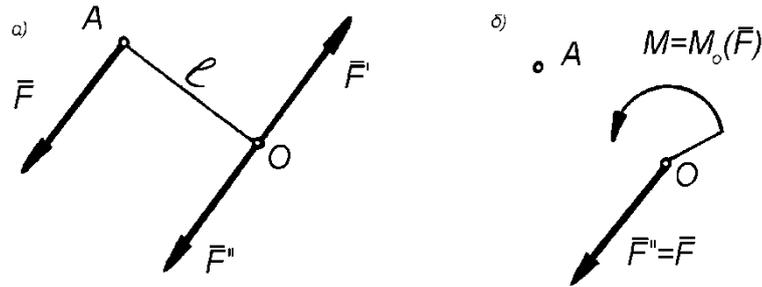


Рисунок 1.44 – Приведение силы к центру

Приложим к телу в точке  $O$  уравновешенную систему сил  $(\vec{F}'; \vec{F}'')$ , параллельных силе  $\vec{F}$  и равных ей по модулю:  $F = F' = F''$  (рисунок 1.44, а). Теперь на тело кроме силы  $\vec{F}''$ , приложенной в точке  $O$ , действует пара сил  $(\vec{F}; \vec{F}')$  с моментом  $M = F \cdot l$ , но и момент данной силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  равен:  $M_O(\vec{F}) = F \cdot l$ , т.е.  $M = M_O(\vec{F})$ . Таким образом, сила  $\vec{F}$  перенесена в точку  $O$  (рисунок 1.44, б) с присоединением пары сил с моментом  $M = M_O(\vec{F})$ .

Операция такого переноса силы называется **приведением силы к центру**, а появляющаяся при этом пара  $(\vec{F}; \vec{F}')$  с моментом  $M = M_O(\vec{F})$  называется **присоединенной парой**.

Данную теорему доказал в начале 19 века Леонард Пуансо, поэтому она называется **лемма Пуансо**. В частном случае, если центр приведения выбрать на линии действия силы  $\vec{F}$ , то момент присоединенной пары будет равен нулю. Значит, присоединять пару необходимо только при параллельном переносе силы.

### Приведение плоской системы сил к данной точке

Рассмотрим (рисунок 1.45, а) систему сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \dots; \vec{F}_n)$ . Перенесем все силы системы в произвольную точку  $O$ , используя лемму Пуансо. В результате приведения получим (рисунок 1.45, б): **пучок приложенных в точке  $O$  сил**  $(\vec{F}'_1; \vec{F}'_2; \vec{F}'_3; \dots; \vec{F}'_n)$  и **систему присоединенных пар сил**:  $(\vec{F}_1; \vec{F}_1'')$ ;  $(\vec{F}_2; \vec{F}_2'')$ ;  $(\vec{F}_3; \vec{F}_3'')$ ; ...  $(\vec{F}_n; \vec{F}_n'')$ ; моменты этих пар сил равны:  $M_1 = M_O(\vec{F}_1)$ ;  $M_2 = M_O(\vec{F}_2)$ ;  $M_3 = M_O(\vec{F}_3)$ ; ...  $M_n = M_O(\vec{F}_n)$ , т.е. моменты присоединенных пар равны моментам данных сил относительно центра приведения  $O$  (см. рисунок 1.45, в).

С помощью силового многоугольника находим равнодействующую пучка сил (на рисунке 1.44, б пучок сил выделен жирными линиями):

$\bar{F}_\Sigma = \bar{F}_{\Gamma\Gamma} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n$  или  $\bar{F}_{\Gamma\Gamma} = \Sigma \bar{F}_i$ , где сила  $\bar{F}_{\Gamma\Gamma}$ , равная геометрической сумме заданных сил, называется **главным вектором плоской системы сил**.

Сложив алгебраически моменты присоединенных пар, найдем момент одной эквивалентной им пары:

$$M_{\Gamma\Gamma} = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = M_O(\bar{F}_1) + M_O(\bar{F}_2) + M_O(\bar{F}_3) + \dots + M_O(\bar{F}_n)$$

или  $M_{\Gamma\Gamma} = \Sigma M_O(\bar{F}_i)$ ,

где момент  $M_{\Gamma\Gamma}$ , равный алгебраической сумме моментов присоединенных пар или алгебраической сумме моментов заданных сил относительно центра приведения, называется **главным моментом плоской системы сил**.

**ПлСПРС – эквивалентна одной силе, которая равна главному вектору и одной паре сил с моментом, равным главному моменту.**

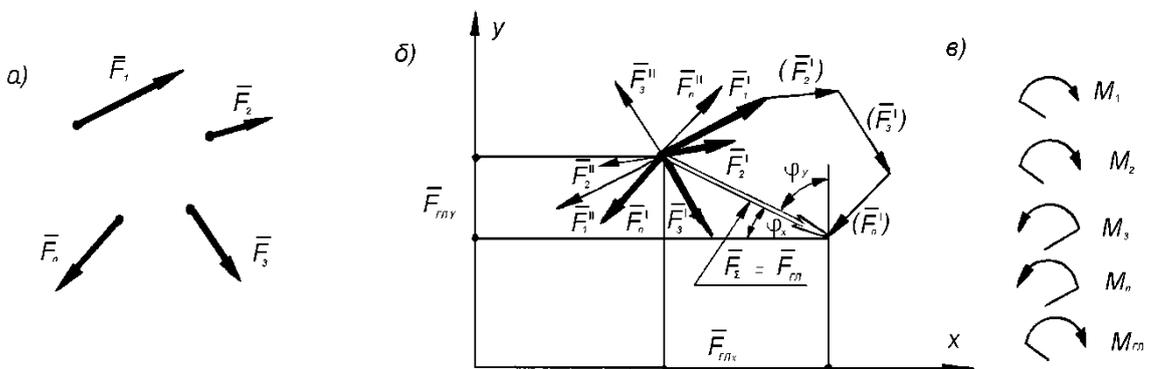


Рисунок 1.45 – Плоская система произвольно расположенных сил

**Модуль главного вектора** можно определить по его проекциям  $\bar{F}_{\Gamma\Gamma X}$ ,  $\bar{F}_{\Gamma\Gamma Y}$  на оси координат (рисунок 1.45, б):  $F_{\Gamma\Gamma} = \sqrt{F_{\Gamma\Gamma X}^2 + F_{\Gamma\Gamma Y}^2} = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}$ .

**Направление главного вектора:**

$$\cos \varphi_x = \frac{F_{\Gamma\Gamma X}}{F_{\Gamma\Gamma}} = \frac{\Sigma F_{ix}}{\sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}}; \quad \cos \varphi_y = \frac{F_{\Gamma\Gamma Y}}{F_{\Gamma\Gamma}} = \frac{\Sigma F_{iy}}{\sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}},$$

где  $F_{\Gamma\Gamma X}$ ,  $F_{\Gamma\Gamma Y}$  - проекции главного вектора на оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $F_{\Gamma\Gamma}$  - модуль главного вектора;

$F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  – проекции сил, входящих в систему, на оси  $x$  и  $y$  соответственно;

$\varphi_x; \varphi_y$  - углы между направлением главного вектора и положительным направлением осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Модуль и направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения. Где бы не была точка  $O$  и в каком бы порядке мы не строили силовой многоугольник, его замыкающая сторона не изменится.

Значение главного момента зависит от выбора центра приведения, так как меняется длина плеч при изменении положения точки  $O$ .

**Обратите внимание, что главный вектор не является равнодействующей плоской системы сил, хотя по модулю они совпадают.**

Рассмотренное нами приведение плоской системы сил к силе и паре сил – необходимый этап определения равнодействующей этой системы. Рассмотрим общий случай, когда  $F_{\Sigma} \neq 0$ ;  $M_{\Sigma} \neq 0$ . Главный вектор и определяемую главным моментом пару сил заменим одной эквивалентной им силой, т.е. равнодействующей.

Приведя плоскую систему сил к центру мы получили плоскую систему сходящихся сил с главным вектором  $\bar{F}_{\Sigma}$  и плоскую систему пар сил с главным моментом  $M_{\Sigma}$  (см. рисунок 1.46, а).

Представим главный момент (см. рисунок 1.46, б) в виде пары сил  $(\bar{F}'; \bar{F}_z)$ , равных по модулю главному вектору:  $F_z = F' = F_{\Sigma}$ , а плечо  $l = \frac{M_{\Sigma}}{F_{\Sigma}}$ .

Расположим эту пару так, чтобы одна сила оказалась направленной вдоль линии действия главного вектора, но в противоположную сторону, тогда силы  $\bar{F}_{\Sigma}$  и  $\bar{F}'$  можно исключить, как взаимно уравновешенные, оставшаяся сила  $\bar{F}_z$  и есть равнодействующая заданной системы сил (рисунок 1.46, в). Расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей:

$$OC = l = \frac{M_{\Sigma}}{F_{\Sigma}}.$$

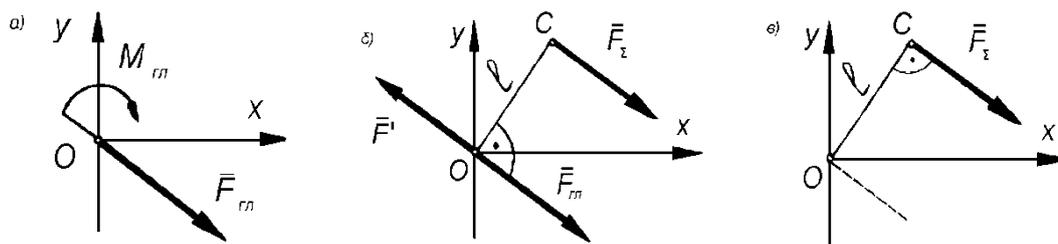


Рисунок 1.46 – Равнодействующая ПлСПРС

**Равнодействующая ПлСПРС равна по модулю главного вектора, а расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей равно частному от деления главного момента на модуль главного вектора или равнодействующей данной системы сил.**

**Частные случаи** приведения системы сил к центру:

1) главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю ( $F_{\Sigma} = 0; M_{\Sigma} \neq 0$ ), т.е. система сил эквивалентна паре сил, тело вращается под действием данной системы сил;

2) главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю ( $F_{\Sigma} \neq 0; M_{\Sigma} = 0$ ), т.е. система сил сводится к одной силе, и главный вектор есть равнодействующая этой системы; тело перемещается поступательно под действием данной системы сил;

3) главный вектор и главный момент равны нулю ( $F_{\Sigma} = 0; M_{\Sigma} = 0$ ) – тело под действием данной системы сил находится в равновесии.

## Условия и уравнения равновесия ПлСПРС.

**Необходимое и достаточное условие равновесия ПлСПРС состоит в том, чтобы главный вектор и главный момент системы сил были равны нулю, т.е.  $F_{ГЛ} = 0; M_{ГЛ} = 0$ .**

Модуль главного вектора  $F_{ГЛ} = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}$ ; модуль главного момента:  $M_{ГЛ} = \Sigma M_o(\bar{F}_i)$ , тогда **условия равновесия ПлСПРС** можно записать в следующем виде:

$F_{ГЛ} = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2} = 0; M_{ГЛ} = \Sigma M_o(\bar{F}_i) = 0$ , т.е. **для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на оси  $x$  и  $y$ , и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки плоскости были равны нулю:**

$$\begin{aligned}\Sigma F_{ix} &= 0; \\ \Sigma F_{iy} &= 0; \\ \Sigma M_o(\bar{F}_i) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Это основная (первая) форма равновесия ПлСПРС

**Вторая форма** уравнений равновесия получается, если составить два уравнения моментов:  $\Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0$  и  $\Sigma M_B(\bar{F}_i) = 0$ , и к ним добавить уравнение проекций на одну ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей центры моментов  $A$  и  $B$ . Если через центры моментов провести ось  $x$  (рисунок 1.47) то третье уравнение имеет вид:  $\Sigma F_{ix} = 0$ , тогда вторая форма уравнений:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A(\bar{F}_i) &= 0; \\ \Sigma M_B(\bar{F}_i) &= 0; \\ \Sigma F_{ix} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

т.е. **для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух точек плоскости и алгебраическая сумма проекций всех сил на одну ось, но не перпендикулярную к прямой, соединяющей центры моментов  $A$  и  $B$ .**

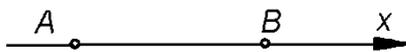


Рисунок 1.47 – Ось, проходящая через центры моментов

**Третья форма** уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A(\bar{F}_i) &= 0; \\ \Sigma M_B(\bar{F}_i) &= 0; \\ \Sigma M_C(\bar{F}_i) &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

т.е. **для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов**

*всех сил относительно трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.*

Условия и уравнения равновесия плоской системы параллельных сил.

В частном случае к телу может быть приложена уравновешенная система параллельных сил, и тогда, рационально расположив оси координат (например, ось  $x$  перпендикулярно силам, а ось  $y$  – параллельно силам), получим из первой формы уравнений (1) два уравнения:

$$\Sigma F_{iy} = 0;$$

$$\Sigma M_o(\bar{F}_i) = 0,$$

*т.е. для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки плоскости были равны нулю.*

Расположив центры моментов  $A$  и  $B$  на прямой, перпендикулярной направлениям сил, (см. рисунок 1.48) из второй формы уравнений (2), получим вторую форму уравнений плоской системы параллельных сил:

$$\Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0;$$

$$\Sigma M_B(\bar{F}_i) = 0,$$

*т.е. для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно любых двух точек, лежащих на прямой, непараллельной линиям действия сил, были равны нулю.*

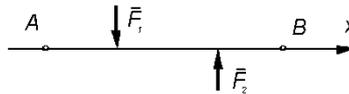


Рисунок 1.48 – Плоская система параллельных сил

Задачи на равновесие произвольной плоской системы сил должны содержать не более трех неизвестных (по числу уравнений), а для плоской системы параллельных сил – не более двух неизвестных.

### **Балки и их нагрузки**

Объектом решения многих задач статики служат балки и балочные системы.

**Балкой** называется брус, концы которого расположены на опорах.

**Брус** – твердое тело, у которого длина значительно больше поперечного сечения.

Условия равновесия плоской произвольной системы сил выражаются тремя уравнениями, следовательно, с их помощью можно определить реакции опор в том случае, если число реакций связей не превышает трех. В этом случае задача будет статически определима.

### **Виды статически определимых балок (рисунок 1.49):**

а) опирается на три непараллельных шарнирно-прикрепленных стержня;

б) имеет две опоры, из которых одна шарнирно-неподвижная, другая шарнирно-подвижная;

в) опирается на две гладкие поверхности, из которых одна с упором;

г) опирается в трех точках о гладкие опоры;

д) жестко заделана в стену и защемлена специальным приспособлением.

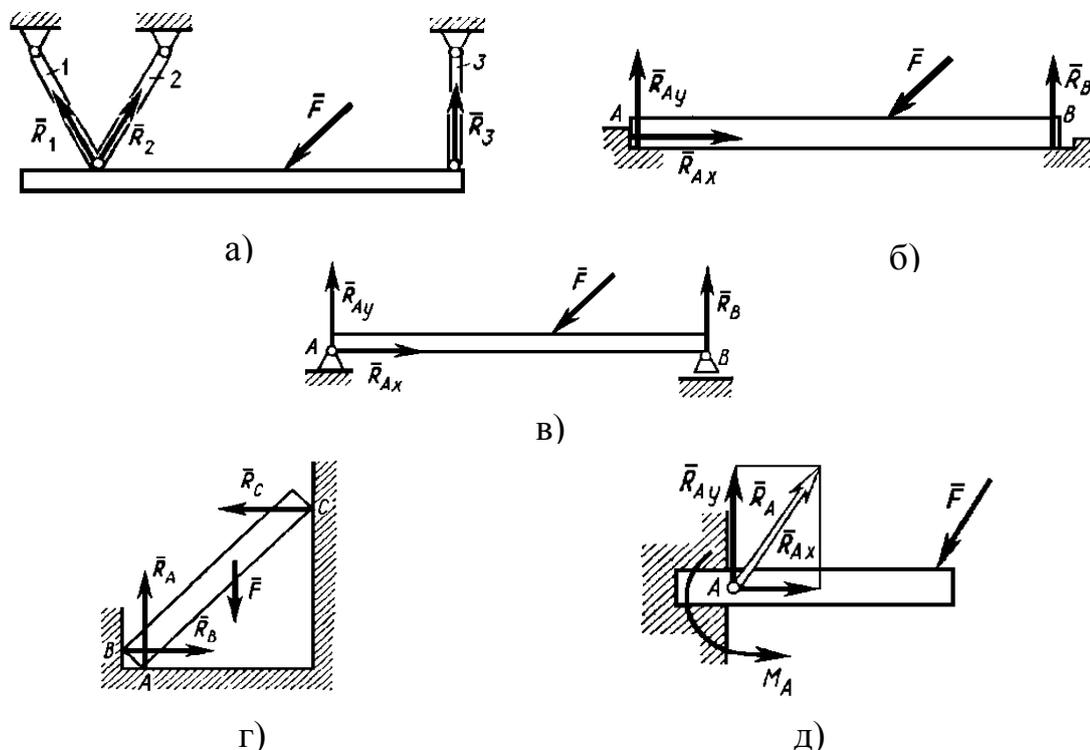


Рисунок 1.49 – Виды статически определимых балок

До сих пор мы рассматривали сосредоточенные силы, предполагая, что нагрузка сосредоточена в одной точке, что на практике сделать невозможно, но во многих случаях это можно допустить.

**Сосредоточенная сила** – сила, приложенная к площадке размерами которой можно пренебречь.

Например, если на балке лежит цилиндрическое тело 1 или опирается стенная панель 2 (рисунок 1.50, а), то при определении опорных реакций целесообразно считать, что балка нагружена сосредоточенными силами  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , равными силам тяжести тел 1 и 2 (см рисунок 50, б).

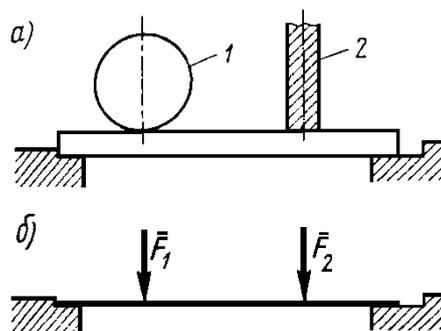


Рисунок 1.50 – Сосредоточенные силы

Часто невозможно пренебречь тем, что к телу приложена **сплошная (распределенная)** нагрузка. При этом различают нагрузку, **распределенную по линии, поверхности и объему**. Примерами могут служить: сила давления воды, сила давления песка на ленту транспортера и т.п.

Нагрузки могут быть распределены равномерно и неравномерно. Мы будем рассматривать **равномерно распределенные нагрузки по линии**. Такие нагрузки условно изображают в виде прямоугольника, в котором параллельные стрелки указывают, в какую сторону действует нагрузка (рисунок 1.51, а).

**Равномерно распределенная нагрузка** задается параметрами:

- 1) **интенсивностью**,  $q$  - величиной силы (Н; кН), приходящейся на единицу длины (м); размерность  $q$ , Н/м; кН/ м;
- 2) **длиной**, на которой она действует,  $l$ , м;
- 3) **направлением**.

В задачах статики, где рассматривается абсолютно твердые (недеформируемые) балки, равномерно распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей силой:  $F_q = q \cdot l$ , равной произведению интенсивности  $q$  на длину  $l$  ее действия, приложенную посередине длины  $l$  и направленную в сторону действия  $q$  (см. рисунок 1.51, б).

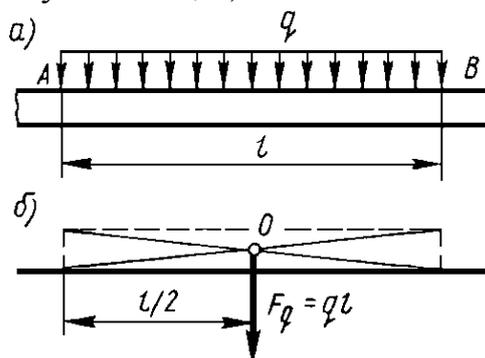


Рисунок 1.51 –Равномерно распределенная нагрузка

### **Классификация сил, действующих на балочные системы**

- 1) сосредоточенные силы  $\bar{F}$ , Н; кН;
- 2) распределенные силы по линии  $q$ , н/м; кН/ м;
- 3) пары сил с моментом  $m = \pm Fa$ , Н м; кН м (рисунок 1.52)

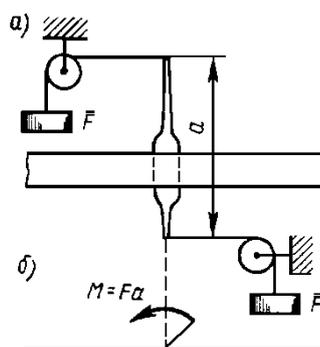
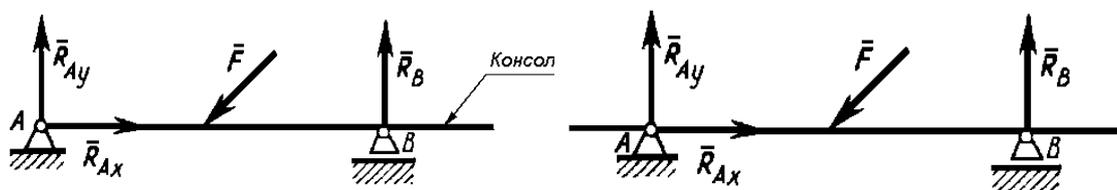


Рисунок 1.52 –Пара сил с моментом

При конструировании деталей машин и механизмов в расчетах на прочность, жесткость и устойчивость конструктивные элементы конструкций и сооружений представляют в виде расчетных схем – балок. Так, например, вал, вращающийся в подшипниках, можно рассматривать в виде:

- 1) *двухопорной балки*, одна опора которой должна быть шарнирно-подвижной, а вторая шарнирно-неподвижной (см. рисунок 1.49,б);
- 2) *двухопорной балки с консолью* (рисунок 1.53,а);
- 3) *двухопорной балки с двумя консолями* (рисунок 1.53,б).



а) б)

Рисунок 1.53 – Двухопорные балки

### Алгоритм решения задач на определения реакций опор:

- 1) выполняем расчетную схему балки с указанием величин нагрузок и длин участков;
- 2) распределенную нагрузку заменяем равнодействующей силой  $Q = q \cdot l$ ;
- 3) мысленно выбираем координатные оси: ось  $x$  вдоль оси балки, ось  $y$  перпендикулярно к ней (на схеме не указываем);

4) опоры заменяем их реакциями;

5) составляем и решаем уравнения равновесия для балки:

а) консольной первая форма уравнений:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{ix} &= 0, \\ \Sigma F_{iy} &= 0, \\ \Sigma M_A &= 0.\end{aligned}$$

Проверка:  $\Sigma M_B = 0$ .

б) двухопорной вторая форма уравнений:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0, \\ \Sigma M_B &= 0, \\ \Sigma F_{ix} &= 0.\end{aligned}$$

Проверка:  $\Sigma F_{iy} = 0$  .;

б) проверка: составляем уравнение из числа неиспользованных в ходе решения задачи.

### Пример решения задач

**Задача 1.** Для балки, изображенной на рисунке 54, а, определить реакции опор.

**Решение:**

1. Заменяем равномерно распределенную нагрузку равнодействующей:  $Q = q \cdot l = 0,5 \cdot 4 = 2$  кН.

2. Освобождаем балку от связей, заменив их реакциями  $\bar{R}_{AX}$ ;  $\bar{R}_{AY}$  и  $\bar{R}_B$ , и получаем действующую на балку уравновешенную систему сил (см. рисунок 1.54,б).

3. Направляем ось  $x$  вдоль оси балки и составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad -R_B \cdot 5 + Q \cdot 4 + F \cdot \cos 30^\circ \cdot 1,5 + m = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad R_{AY} \cdot 5 - Q \cdot 1 - F \cdot \cos 30^\circ \cdot 3,5 + m = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad R_{AX} - F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\text{из (1)} \quad R_B = \frac{Q \cdot 4 + F \cdot \cos 30^\circ \cdot 1,5 + m}{5} = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 0,866 \cdot 1,5 + 1,5}{5} = 2,42 \text{ кН};$$

$$\text{из (2)} \quad R_{AY} = \frac{Q \cdot 1 + F \cdot \cos 30^\circ \cdot 3,5 - m}{5} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 0,866 \cdot 3,5 - 1,5}{5} = 1,31 \text{ кН};$$

$$\text{из (3)} \quad R_{AX} = F \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ кН}.$$

**Проверка:**  $\Sigma F_{iy} = 0$ ;  $R_{AY} - F \cdot \cos 30^\circ - Q + R_B = 0$  или

$$1,31 - 2 \cdot 0,866 - 2 + 2,42 = 1,31 - 1,73 - 2 + 2,42 = 0.$$

Определяем модуль  $R_A$ :

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{1^2 + 1,31^2} = 1,65 \text{ кН}$$

**Ответ:**  $R_A = 1,65 \text{ кН}$ ;  $R_B = 2,42 \text{ кН}$ .

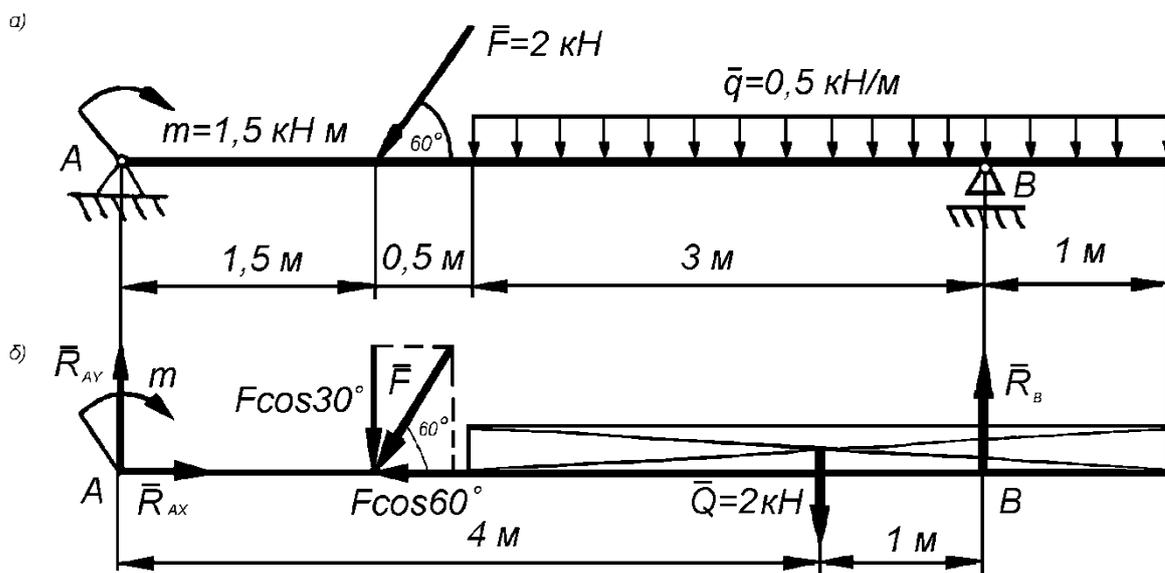


Рисунок 1.54 – Двухпорная балка

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 1.5 Центр тяжести. Геометрические характеристики плоских сечений

**Центром параллельных сил** называется такая точка на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, через которую проходит равнодействующая и в том случае, если все силы системы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, сохраняя параллельность сил.

Покажем существование центра параллельных сил на системе двух сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , так как при повороте их на один и тот же угол  $\alpha$  отношение плеч  $BC$  и  $CA$  не изменится и равнодействующая пройдет через точку  $C$  (рисунок 1.56).

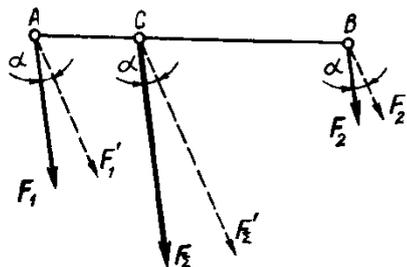


Рисунок 1.56 – Центр параллельных сил

Если дана система  $n$  параллельных сил, то равнодействующую этой системы можно найти, последовательно попарно складывая все силы. На линии действия равнодействующей системы параллельных сил также будет существовать точка, обладающая свойством параллельных сил. Формулы для определения координат центра параллельных сил имеют следующий вид:

$$x_c = \frac{\sum(F_i x_i)}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum(F_i y_i)}{\sum F_i}; \quad z_c = \frac{\sum(F_i z_i)}{\sum F_i}. \quad (1)$$

### Определение положения центра тяжести тела, плоской фигуры

**Силой тяжести** называется сила, с которой тело притягивается к Земле.

Элементарной частицей тела называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки. Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел размеры, которых малы по сравнению с размерами Земли, с достаточной степенью точности можно считать эти силы системой параллельных сил.

**Центром тяжести тела** называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц тела.

Центр тяжести есть **геометрическая точка**, которая может лежать вне тела (например, кольцо, цилиндр с отверстием).

Координаты центра тяжести тела находят по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\Sigma(G_i x_i)}{\Sigma G_i}; \quad y_c = \frac{\Sigma(G_i y_i)}{\Sigma G_i}; \quad z_c = \frac{\Sigma(G_i z_i)}{\Sigma G_i}, \quad (2)$$

где  $G_i$  – сила тяжести каждой элементарной частицы тела;  $x_i, y_i, z_i$  – координаты частицы;  $\Sigma G_i$  - сила тяжести всего тела.

Если тело представляет собой однородную пластину толщиной  $h$ , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через площадь  $A_i$  равна:  $G_i = \gamma h A_i$ , где  $\gamma$  - удельная сила тяжести (для однородного тела величина постоянная), тогда координаты центра тяжести плоской фигуры определяют по формулам:

$$x_c = \frac{\Sigma(A_i x_i)}{\Sigma A_i}; \quad y_c = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{\Sigma A_i}, \quad (3)$$

где  $A_i$  - площадь частей, на которые разбита плоская фигура,  $x_i, y_i$  - координаты центра тяжести этих частей.

### Методы нахождения центра тяжести.

**1. Метод симметрии.** Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси  $x$  и  $z$  лежали в плоскости симметрии (рисунок 1.57), в этом случае каждой элементарной частице силой тяжести  $G_i$  с абсциссой  $y_i = +a$  соответствует такая же частица с абсциссой  $y_i = -a$ , тогда  $y_c = \frac{\Sigma(G_i y_i)}{\Sigma G_i} = 0$ .

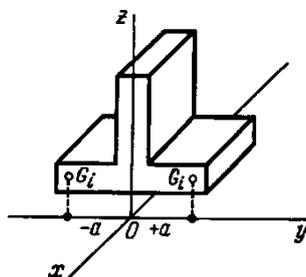


Рисунок 1.57 – Метод симметрии

Следовательно, если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости. Кроме того, аналогично можно доказать:

- 1) Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси.
- 2) Если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке их пересечения.
- 3) Центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

**2. Метод разбиения.** Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести и положение центров тяжести которых известны, после чего применяют формулы (2), в которые можно подставить не силы тяжести элементарных частиц  $G_i$ , а силы тяжести составных ча-

стей; под координатами понимают  $x_i, y_i, z_i$  - координаты центров тяжести частей, на которые тело разбито. Для плоской фигуры применяют формулы (3).

3. **Метод отрицательных масс (площадей).** Этот метод заключается в том, что тело (плоскую фигуру), имеющее свободные полости, полагают сплошным, а массу (площади) свободных полостей считают отрицательными. Вид формул при этом не меняется. Для плоских фигур используют формулы (3), в которых площади свободных полостей подставляются со знаком минус. То есть при определении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять метод разбиения, но считать массу (площади) свободных полостей отрицательными.

4. **Метод подвешивания** основан на второй аксиоме статике (рисунок 1.58,а). Если тело в виде пластинки любой формы подвесить на нити, например в точке  $A$ , то при равновесии центр тяжести тела обязательно займет положение на вертикали, проходящей через точку подвеса  $A$ , так как только в этом положении центра тяжести сила тяжести и реакция нити  $AO$  уравновесят друг друга. С помощью отвеса  $OD$  отметим на теле линию  $AA_1$ , на которой расположен искомый центр тяжести. Подвесив затем тело на нити в другой точке, например  $B$  (рисунок 1.63,б), получим линию  $BB_1$ , которая пересечением с линией  $AA_1$  фиксирует положение центра тяжести  $C$ .

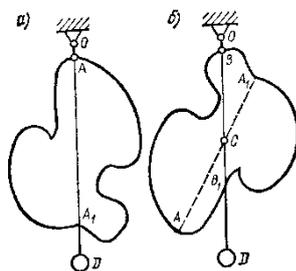


Рисунок 1.58 – Метод подвешивания

### Положение центра тяжести некоторых плоских фигур.

1) **Прямоугольник.** Так как прямоугольник имеет две оси симметрии, то центр тяжести его площади находится в точке пересечения этих осей или в точке пересечения диагоналей (рисунок 1.59, а).

2) **Треугольник.** Центр тяжести площади треугольника лежит на расстоянии одной трети высоты от каждого основания (рисунок 1.59, б).

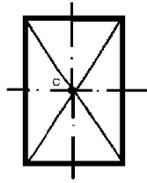
Для прямоугольного треугольника центр тяжести лежит на расстоянии одной трети от вершины прямого угла (рисунок 1.59, в).

3) **Круг.** Центр тяжести площади круга лежит в точке пересечения осей симметрии (рисунок 1.59, г).

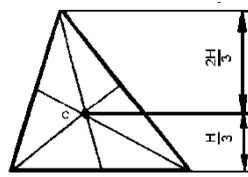
4) **Дуга окружности**  $x_c = \frac{2R}{\pi}, \quad y_c = 0$  (рисунок 1.59, д).

5) **Круговой сектор**  $x_c = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi, \text{рад}}$ ,  $y_c = 0$  (рисунок 1.59, е).

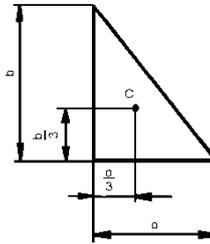
б) **Полукруг.** Для полукруга  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , тогда  $\sin \varphi = 1$ ,  $x_c = \frac{4R}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ ,  $y_c = 0$ .



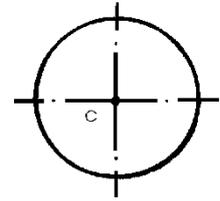
а)



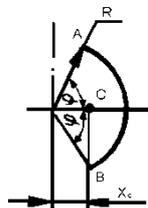
б)



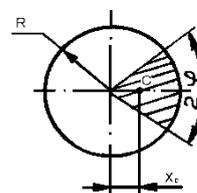
в)



г)



д)



е)

Рисунок 1.59 – Положение центра тяжести некоторых плоских фигур

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль по теме](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## РАЗДЕЛ 2 ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

### 2.1 Основные положения.

В отличие от теоретической механики, где рассматривались равновесие и виды движения абстрактных абсолютно твердых тел, предметом изучения раздела «Основы сопротивления материалов» являются реальные тела, которые под действием приложенных сил деформируются.

Изменение формы и размеров тел под действием внешних сил называется **деформацией тела**.

При деформации тела под действием внешних сил внутри него возникают **силы упругости**, которые препятствуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в первоначальное положение. Силы упругости возникают в результате существования в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия.

Таким образом, в разделе «Основы сопротивление материалов» изучают **деформации тел** и возникающие при этих деформациях **внутренние силы**.

Деформация, исчезающая после прекращения действия внешних сил, называются **упругой**.

Деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется **остаточной или пластичной**.

Способность материала иметь значительные остаточные деформации, не разрушаясь, называется **пластичностью**, а сами материалы называются пластичными (низкоуглеродистая сталь, алюминий, медь, латунь). **Пластичность – способность материала изменять свои формы и размеры без разрушения и сохранять новую форму после прекращения действия сил**.

Материалы, обладающие весьма малой пластичностью, называются **хрупкими**. В отличие от пластичных хрупкие материалы разрушаются без заметных остаточных деформаций (чугун, твердые сплавы, стекло, камень).

При проектировании и изготовлении механических конструкций необходимо рассчитать конструкцию отдельных деталей так, чтобы деформации не превосходили **определенных предельных величин**, при которых возможно нарушение нормальных условий работы конструкции (машины или прибора).

Способность конструкции (или отдельного ее элемента) сопротивляться нагрузкам без возникновения поломок и пластических деформаций называется **прочностью**.

#### **Задачи сопротивления материалов:**

**Первая** задача сопротивления материалов – расчет элементов конструкции на прочность.

Расчет на прочность дает возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку, при наименьшей затрате материала.

**Вторая** задача сопротивления – расчет элементов на жесткость.

**Жесткостью** называется способность конструкции (или отдельного элемента) сопротивляться упругим деформациям.

Величину упругой деформации определяют **стрелой прогиба**  $f$ .

Расчет на жесткость гарантирует, что изменение формы и размеров конструкций и их элементов не превзойдут допустимых норм. Так при расчетах принимают (см. рисунок 2.1):  $f = \frac{1}{1000}l = 1 \text{ мм}$ .

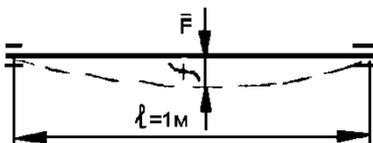


Рисунок 2.1 – Стрела прогиба

**Третья** задача сопромата – расчет элементов на конструкции на устойчивость.

Представим себе достаточно длинную линейку, которая должна под действием сжимающей силы  $\bar{F}$ , действующей вдоль ее оси, сохранять прямолинейную форму, т.е. только сжиматься, а не изгибаться (рисунок 2.2).

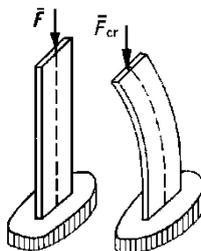


Рисунок 2.2 –Линейка под действием сжимающей силы

Если при действии некоторой критической нагрузки  $\bar{F}_{cr}$  линейка изогнулась, то это означает, что она потеряла устойчивость прямолинейной формы.

Суть расчета на устойчивость и состоит в том, чтобы определить условия, гарантирующие сохранение прямолинейной формы сжатых элементов конструкции.

Сопротивление материалов опирается на законы теоретической механики. Так, пользуясь принципом отвердения (6 аксиома статики), в сопротивлении материалов мы будем применять к деформируемым телам условия равновесия статики для определения реакций связей и действующих в сечении детали внутренних сил.

Однако, при расчетах на прочность и жесткость оказываются не применимы следующие положения теоретической механики:

- 1) действующие на тело внешние силы нельзя заменять их равнодей-

ствующей;

- 2) силу нельзя переносить вдоль линии ее действия;
- 3) пару сил нельзя перемещать в плоскости ее действия.

В сопромате вводится ряд допущений относительно свойств материалов, позволяющих построить достаточно простую и удобную для инженерной практики теорию расчетов. Эти допущения достаточно точно совпадают с результатами экспериментальных исследований.

### **Основные допущения и гипотезы:**

#### **а) допущения о свойствах материалов:**

##### **1) гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий.**

Предполагается, что если нет причин, вызывающих деформацию тела (напряжение, изменение температуры), то во всех его точках внутренние усилия равны нулю, т.е. не принимаются во внимание силы взаимодействия между частицами ненагруженного тела.

2) **допущение об однородности материала.** Физико-механические свойства тела могут быть неодинаковыми в разных точках. В сопромате этими различиями пренебрегают, полагая, что материал во всех точках тела обладает одинаковыми свойствами.

3) **допущение о непрерывности материала,** т.е. материал любого тела имеет непрерывное строение и представляет собой сплошную среду.

4) **допущение об изотропности материала,** т.е. материал тела обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами. Допущение об изотропности хорошо подтверждается практикой для многих материалов и лишь приближенно для таких материалов, как камень, пластмассы и железобетон.

Материалы, имеющие неодинаковые свойства в разных направлениях, называют **анизотропными**, например, древесина.

5) **допущение об идеальной упругости,** т.е. В известных пределах нагружения материал обладает идеальной упругостью (после снятия нагрузки деформации полностью исчезают).

#### **б) допущения о характере деформаций элементов конструкции:**

1) **допущения о малости перемещений** или **принцип начальных размеров**, т.е. деформации тела и связанные с ними перемещения точек сечений весьма малы по сравнению с размерами тела (рисунок 2.3). На основании этого мы будем пренебрегать изменениями в расположении внешних сил, вызванными деформацией. Так, например, не будем принимать во внимание смещение  $\Delta Z$  линии действия силы  $\bar{F}$ ;

2) **допущение о линейной деформируемости** тел, т.е. перемещения точек и сечений упругого тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения (рисунок 2.4);

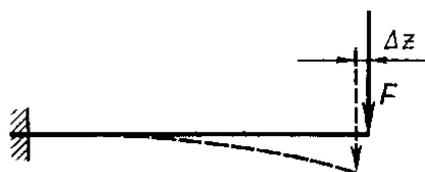


Рисунок 2.3 – Принцип начальных размеров

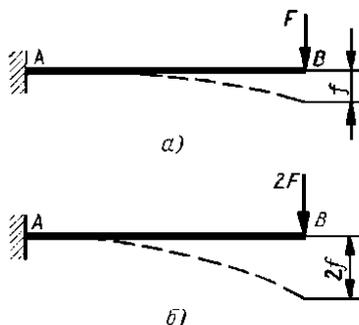


Рисунок 2.4 – Перемещения точек и сечений упругого тела

3) *гипотеза плоских сечений*, или *гипотеза Бернулли*, согласно которой плоские сечения, проведенные в теле до деформации, остаются и после деформации плоскими и нормальными;

4) *принцип независимости действия*. При действии на тело нескольких нагрузок внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации в любом месте могут быть определены как суммы этих величин, найденных от каждой нагрузки в отдельности.

### Метод сечений. ВСФ.

Чтобы правильно произвести расчет на прочность, необходимо уметь определять величину внутренних сил по заданным нагрузкам и найденным реакциям связи. Для решения этой задачи применяют *метод сечений*.

Метод сечений сокращенно можно назвать методом РОЗУ по начальным буквам выполняемых действий

**Р** 1) *рассекаем* брус мысленно на две части (рисунок 2.5,а);

**О** 2) *отбрасываем* (см. рисунок 2.5,б) одну из частей (целесообразно отбросить ту часть, на которой действует большее число внешних сил);

**З** 3) *заменяем* действие отброшенной части на оставленную системой внутренних сил (рисунок 2.5.в);

**У** 4) *уравновешиваем* внешние силы оставленной части *внутренними силовыми факторами (ВСФ)*, составляем уравнения равновесия и определяем ВСФ.

Таким образом, оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил и приложенных к сечению ВСФ.

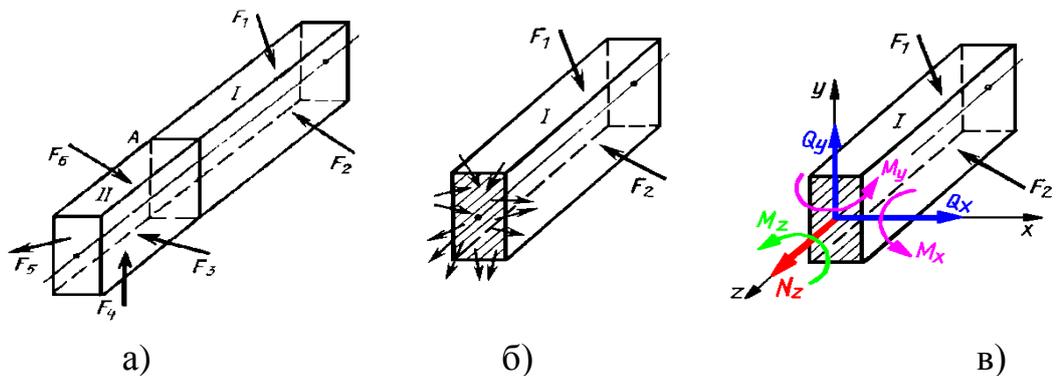


Рисунок 2.5 – Метод сечений

Рассмотрим брус (см. рисунок 2.5), нагруженный уравновешенной системой сил. Определим внутренние силы в сечении А, которое делит брус на две части I и II, пользуясь методом сечений.

Рассекаем мысленно брус по поперечному сечению и отбрасываем одну часть, например II. Чтобы сохранить равновесие оставшейся части бруса, заменяем действие на нее отброшенной части системой внутренних сил. Из курса «Статики» известно, что произвольная пространственная система сил может быть приведена к главному вектору и главному моменту.

Главный вектор можно заменить тремя составляющими:  $N_z, Q_x, Q_y$ , направленными вдоль выбранных осей координат, а главный момент – соответственно тремя моментами:  $M_z, M_x, M_y$ , возникающими в плоскостях, перпендикулярных этим осям.

Системы трех сил  $N_z, Q_x, Q_y$  и трех моментов  $M_z, M_x, M_y$ , эквивалентные внутренним силам, возникшим в рассматриваемом сечении называются **внутренними силовыми факторами (ВСФ)**.

Шесть ВСФ вместе с известными внешними силами оставшейся части I образуют уравновешенную систему сил, для которой можно составить:

**шесть уравнений равновесия:**

$$\Sigma Z = 0; N_z + \Sigma F_{ez} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma X = 0; Q_x + \Sigma F_{ex} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma Y = 0; Q_y + \Sigma F_{ey} = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_z = 0; M_z + \Sigma M_z(F_{ei}) = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_x = 0; M_x + \Sigma M_x(F_{ei}) = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_y = 0; M_y + \Sigma M_y(F_{ei}) = 0 \quad (6),$$

где  $\Sigma F_{ez}, \Sigma F_{ex}, \Sigma F_{ey}$  - алгебраические суммы проекций всех внешних сил на координатные оси;  $\Sigma M_z(F_{ei}), \Sigma M_x(F_{ei}), \Sigma M_y(F_{ei})$  - алгебраические суммы моментов всех внешних сил относительно координатных осей. **ВСФ:**

**и найти ВСФ:**

$N_z$  - **продольная сила**

$Q_x, Q_y$  - **поперечные силы**

$M_z(T)$  - **крутящий момент**

$M_x, M_y$  - **изгибающие**

**моменты**

1) **Продольная сила** – составляющая  $N_z$  главного вектора внутренних сил, направленную перпендикулярно плоскости поперечного сечения бруса. Если в поперечных сечениях бруса возникает только продольная сила, то брус **растянут**, если  $N_z$  направлена от сечения, или **сжат**, если – к сечению (рисунок 2.6).

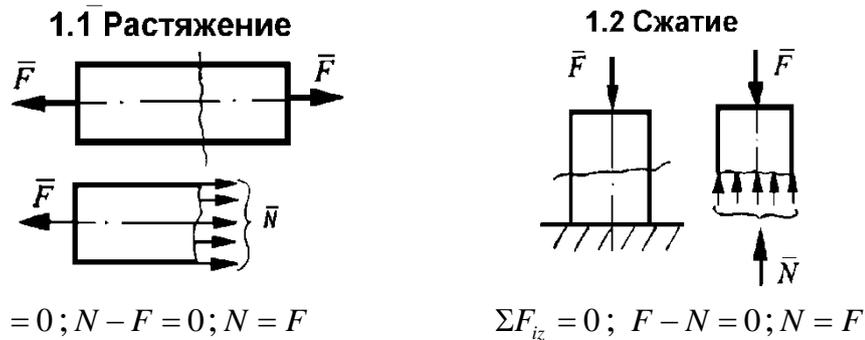


Рисунок 2.6 – Виды деформаций: растяжение и сжатие

2) **Поперечные силы** – составляющие  $Q_x, Q_y$  главного вектора внутренних сил, лежащие в плоскости поперечного сечения бруса. Если в поперечном сечении возникают только поперечные силы, в этом случае имеет **деформации сдвига (или среза)** (рисунок 2.7).

$$Q = \frac{F}{n}; n - \text{число площадок среза.}$$

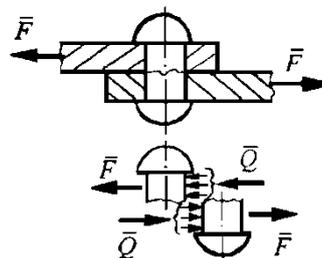
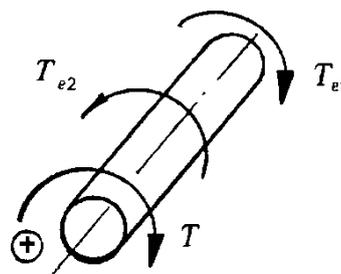


Рисунок 2.7 – Деформация сдвига (среза)

3) **Крутящий момент**  $M_z(T)$  - составляющая главного момента внутренних сил, действующего в поперечном сечении бруса. Если в поперечном сечении возникает только крутящий момент, в этом случае имеет **деформации кручения** (рисунок 2.8).

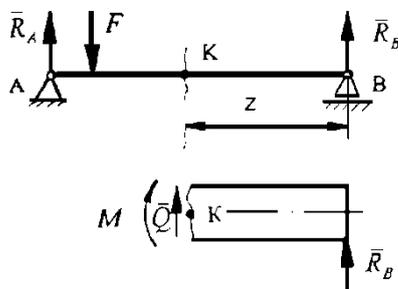


$$\Sigma T_{ei} = 0; T + T_{e1} - T_{e2} = 0; T = T_{e2} - T_{e1}$$

Рисунок 2.8 – Деформация кручения

4) **Изгибающие моменты** – составляющие главного момента внутренних сил, действующие в плоскостях, перпендикулярных поперечному сечению.

Если в сечении бруса возникает только изгибающий момент, в это **деформация чистого изгиба**. Если в сечении бруса возникает изгибающий момент и поперечная сила, то изгиб называется **поперечным**.



$$\Sigma F_{iy} = 0; R_B + Q = 0; \quad Q = -R_B \quad \Sigma M_K = 0: M - R_B z = 0; \quad M = R_B z$$

Рисунок 2.9 – Плоский изгиб

5) Если в сечении одновременно возникает несколько ВСФ (например, изгибающий и крутящий момент; растяжение и крутящий момент и др.), то в этом случае имеет место **сочетание основных деформаций (сложное сопротивление)**.

### Напряжение полное, нормальное и касательное.

Определив в поперечном сечении бруса ВСФ, мы еще не знаем, как внутренние силы распределены по сечению. Чтобы определить закон их распределения, необходимо уметь находить **напряжение в любой точке сечения**.

**Напряжение** характеризует интенсивность внутренних сил в данной точке.

Рассмотрим напряжение внутренних сил в некоторой точке сечения (рисунок 2.10). Выделим около интересующей точки малую площадку \$dA\$ и допустим, что там действует внутренняя сила \$dF\$. Разделив \$dF\$ на площадь элементарной площадки, определим интенсивность внутренних сил, т.е. напряжение \$\bar{p}\$, в точках элементарной площадки:  $\bar{p} = \frac{d\bar{F}}{dA}$ .

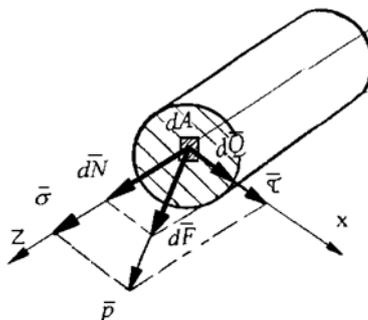


Рисунок 2.10 – Напряжения внутренних сил

Таким образом, **напряжение** есть внутренняя сила, отнесенная к единице площади. Напряжение – величина векторная, направление вектора напряжения совпадает с направлением вектора силы, вызвавшей это напряжение.

Единица измерения напряжения:  $1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$  (Паскаль). Так как 1 Па очень малая единица, будем применять:  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$

Вектор полного напряжения в точке сечения можно разложить на две составляющие:

1) вектор  $\sigma$ , перпендикулярный плоскости сечения называется **нормальным напряжением**. Характеризует величину внутренней продольной силы на единицу площади сечения:  $\sigma = \frac{dN}{dA}$ ;

2) вектор  $\tau$ , лежащий в плоскости поперечного сечения, называется **касательным напряжением**. Характеризует интенсивность поперечных внутренних сил:  $\tau = \frac{dQ}{dA}$ .

Модуль полного напряжения:  $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ . Мы рассмотрели случай, когда касательное напряжение совпало с ось координат. Если оно расположено произвольно в плоскости поперечного сечения, то:  $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}$ .

**Между ВСФ и напряжением существуют определенные зависимости:**

1) **нормальное напряжение** в любой точке поперечного сечения есть результат возникающей в этом сечении **продольной силы**  $N_z$ , направленной перпендикулярно сечению, или **изгибающих моментов**  $M_x$  и  $M_y$ , возникающих в плоскостях, перпендикулярных к сечению;

2) **касательное напряжение**  $\tau$  - результат внутренних силовых факторов, возникающих в плоскости поперечного сечения, т.е. **поперечных сил**  $Q_x$  и  $Q_y$ , а также **крутящего момента**  $M_z(T)$ .

Таким образом, в поперечном сечении бруса при растяжении или сжатии ( $N_z$ ) и чистом изгибе ( $M_x$  и  $M_y$ ) действует только нормальное напряжение, а при сдвиге ( $Q_x$  и  $Q_y$ ) и кручении ( $T$ ) – только касательное напряжение.

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 2.2 Растяжение-сжатие

### Продольные силы и их эпюры. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса и их эпюры

*Растяжением-сжатием* называют такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила.

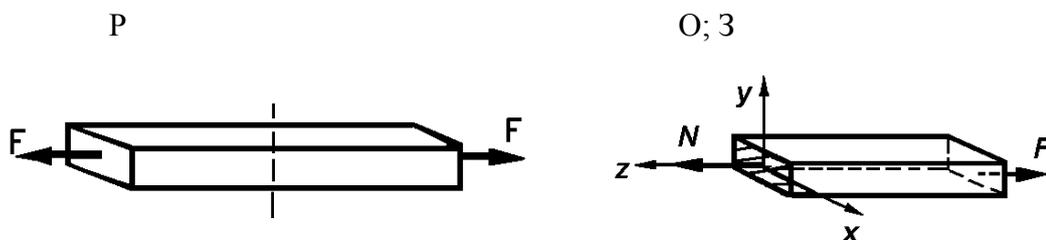


Растянут – от сечения

Сжат – к сечению

Рисунок 2.11 – Растяжение-сжатие

Воспользуемся методом сечений и определим продольную силу в произвольном поперечном сечении.



$$Y: \Sigma Z = 0; \quad N - F = 0; \quad N = F.$$

Рисунок 2.12 – Определение продольной силы

Аналогично для сжатия только  $N$  направлена к сечению:  $N = -F$ .

Если брус нагружен не двумя, а большим числом осевых сил, то продольная сила в поперечном сечении  $N$  равна алгебраической сумме проекций внешних сил на ось  $Z$ , расположенных по одну сторону (любую) от сечения:

$$N = \Sigma F_{ez}.$$

Ось  $Z$  всегда направлена от сечения, тогда проекции внешних сил, направленные:

- 1) от сечения – положительны;
- 2) к сечению – отрицательны.

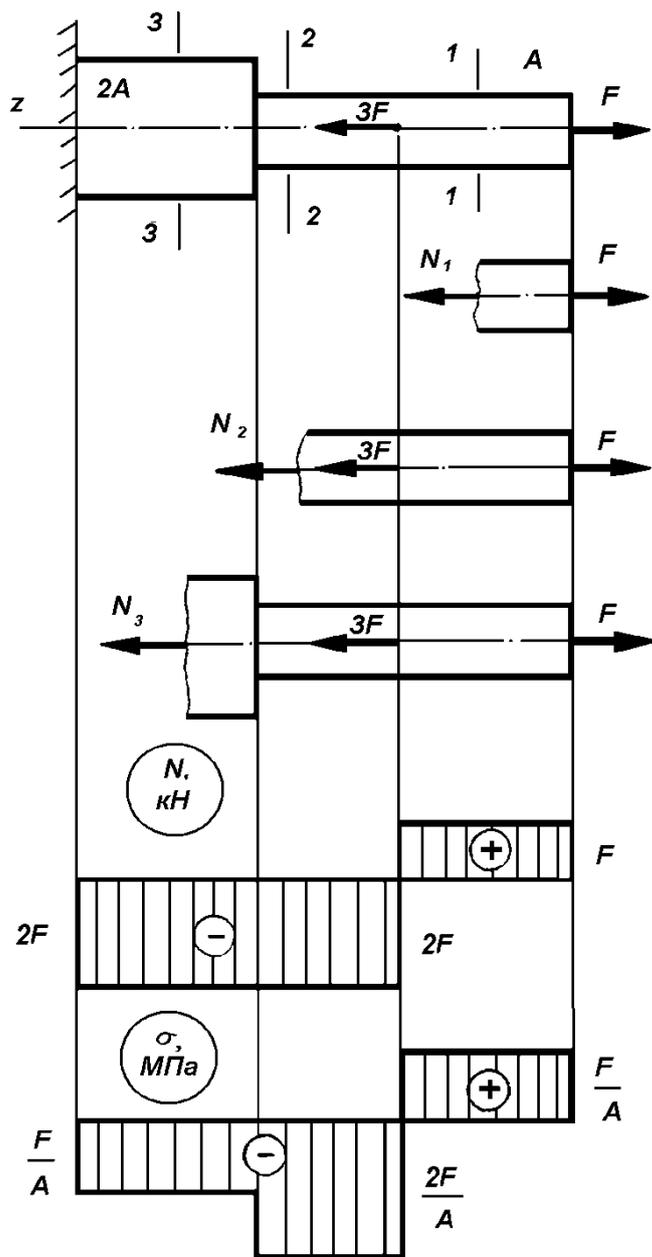
Согласно гипотезе Бернулли (плоских сечений) внутренние силы распределены по сечению равномерно, а продольная сила является равнодействующей внутренних сил, тогда нормальное напряжение в любой точке:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения.

Если  $N > 0$ , то  $\sigma > 0$ ; если  $N < 0$ , то  $\sigma < 0$ .

## Пример построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений



1. Разобьем брус на участки, границами которых являются точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения.

Строить эпюру рационально со свободного конца, в противном случае надо сначала определить реакцию заделки.

2. Построение эпюры  $N$ . Используем метод сечений:

$$1-1: \sum Z = 0; N_1 - F = 0; N_1 = F.$$

$$2-2: \sum Z = 0; N_2 + 3F - F = 0;$$

$$N_2 = -3F + F = -2F$$

$$3-3: \sum Z = 0; N_3 + 3F - F = 0;$$

$$N_3 = -3F + F = -2F.$$

3 Построение эпюры  $\sigma$ :

$$1-1: \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{A}.$$

$$2-2: \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{2F}{A}.$$

$$3-3: \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{2F}{2A} - \frac{F}{A}.$$

Для построения эпюры проводят ось абсцисс графика, параллельно оси бруса. В пределах каждого участка продольная сила или нормальное напряжение постоянны, т.е. параллельны оси абсцисс. Значения  $N$  или  $\sigma$  откладывают в выбранном масштабе от оси эпюры: положительные вверх (вправо), отрицательные вниз (влево). Ось – тонкая линия, эпюра – основная (толстая). Эпюру штрихуют тонкими линиями, перпендикулярными к оси. Линия штриховки в выбранном масштабе (ордината графика) дает значение  $N$  или  $\sigma$  в данном сечении. В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получают скачкообразные изменения ординат; величина «скачка» равна модулю приложенной силы в данном сечении бруса.

Для расчетов на прочность особый интерес представляют те сечения, где нормальные напряжения максимальны, эти сечения являются опасными, а напряжения в них называют расчетными.

**Продольная и поперечная деформация. Закон Гука.**

При растяжении бруса его первоначальная длина  $l_0$  увеличивается на величину:  $\Delta l$  – абсолютное продольное удлинение бруса (абсолютное удлинение); а первоначальный диаметр  $d_0$  уменьшается на величину:  $\Delta d$  – абсолютное поперечное укорочение. При сжатии, наоборот, длина укорачивается на  $\Delta l$ , а поперечный размер увеличивается на  $\Delta d$ , т.е при:

- 1) растяжении  $\Delta l > 0, \Delta d < 0$ ;                      2) сжатии  $\Delta l < 0, \Delta d > 0$ .

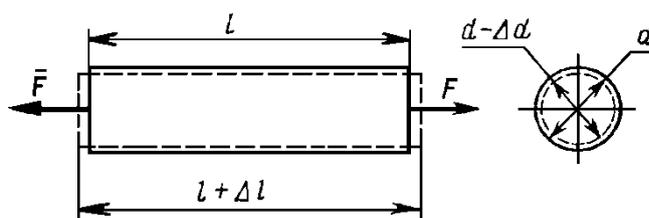


Рисунок 2.13 – Продольная и поперечная деформация

**Относительное удлинение (продольная деформация):**  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} (100\%);$

**Относительная поперечная деформация для:**

- 1) круглого сечения:  $\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d_0} (100\%);$   
 2) прямоугольного сечения  $a \times b$ :  $\varepsilon_t = \frac{\Delta a}{a_0} (100\%); \varepsilon_t = \frac{\Delta b}{b_0} (100\%).$

Экспериментально установлено, что тел для с однородной структурой отношение:

$$\nu(\mu) = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} -$$

величина постоянная и называется коэффициентом поперечной деформации, или коэффициентом Пуассона; величина безразмерная и в зависимости от материала меняется от 0 (пробковое дерево) до 0,5 (резина), для стали  $\nu = 0,3$ .

В пределах упругих деформаций между нормальным напряжением и продольной деформацией существует прямо пропорциональная зависимость, которая выражает закон Гука:  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E$  – модуль продольной упругости или модуль Юнга или модуль упругости первого рода; так как  $\varepsilon$  величина безразмерная, то  $E$  имеет размерность:

$$1 \frac{H}{м^2} = 1 \text{ Па}; 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; 1 \text{ МПа} = 1 \frac{H}{мм^2}$$

Для стали  $E = (1,9...2,16) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; чугуна  $E = (1,5...1,6) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; меди  $E = (1,0...1,3) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Учитывая, что  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ , закон Гука для участка бруса длиной  $l_0$  можно записать:  $\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0}$ , тогда абсолютное удлинение бруса:  $\Delta l = \sigma \frac{l_0}{E}$ , учитывая, что  $\sigma = \frac{N}{A}$ , имеем:  $\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A}$  – **формула Гука:**

абсолютная продольная деформация прямо пропорциональна продольной силе и длине бруса и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения ( $E \cdot A$ ).

$E \cdot A$  – жесткость материала при растяжении;

$\frac{E \cdot A}{l_0}$  – жесткость бруса длиной  $l_0$ .

Брусья с прямолинейной осью, работающие на растяжение-сжатие, называют стержнем.

Для ступенчатых стержней общее удлинение равно алгебраической сумме удлинений отдельных участков:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i}.$$

Знак деформации определяется знаком продольной силы. Следствием деформации растяжения-сжатия являются **перемещения поперечных сечений**  $\lambda$ , т.е. изменения их положений в направлении оси.

Перемещение произвольного сечения бруса равно изменению длины той части бруса, которая находится между сечением и закреплением. Поэтому строить эпюру перемещений  $\lambda$  следует со стороны заделки.

### Пример построения эпюры перемещений



**Условие жесткости при растяжении-сжатии:**  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \leq \Delta l_{adm}$ .

### Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали.

При выборе материала для какого-либо элемента конструкции и в последующих расчетах учитывают механические свойства материала, определяющие его прочность, упругость, пластичность, твердость и ударную вязкость.

Необходимые сведения о различных механических свойствах получают экспериментально в процессе механических испытаний

Наиболее широко применяют статические испытания материалов на растяжение и сжатие, так как механические характеристики, получаемые при этих испытаниях, позволяют достаточно точно определить поведение материала при других видах нагружения: сдвиге, изгибе и кручении.

Для проведения испытаний на растяжение из испытуемого материала изготавливаются стандартные образцы (рисунок 2.14). Они могут быть круглого или прямоугольного поперечного сечения. На концах образца имеются головки для закрепления его в захватах разрывной машины. Особенностью стандартных образцов является наличие усиленных мест для захвата и плавного перехода к рабочей части образца (на рисунке переход не показан). Образцы бывают следующих размеров: длинные  $l_0 = 10d_0$  и короткие  $l_0 = 5d_0$ .

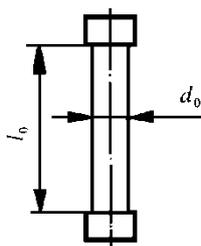


Рисунок 2.14 – Образец

Образцы при испытании помещают в разрывные машины, при этом создают необходимые осевые нагрузки, с помощью которых, растягивая образец, доводят его до разрыва. Поведение образца по мере роста нагрузки фиксируют с помощью записывающего устройства.

По оси абсцисс в определенном масштабе фиксируется рост удлинения образца  $\Delta l$ , а по оси ординат – возникающая в его поперечном сечении нормальная сила  $N$ , численно равная осевой нагрузке  $F$ , прилагаемой к образцу.

Чтобы получить механические характеристики материала, диаграмму, снятую при испытании образца, нужно перестроить в условную диаграмму растяжения, в координатах, независимых от размеров образца (рисунок 2.15).

Итак, диаграмма растяжения (сжатия) в координатах  $\varepsilon, \sigma$  лучше отражает механические свойства материалов, так как она **не зависит** от геометрических размеров испытываемого образца:  $l_0, A_0$ .

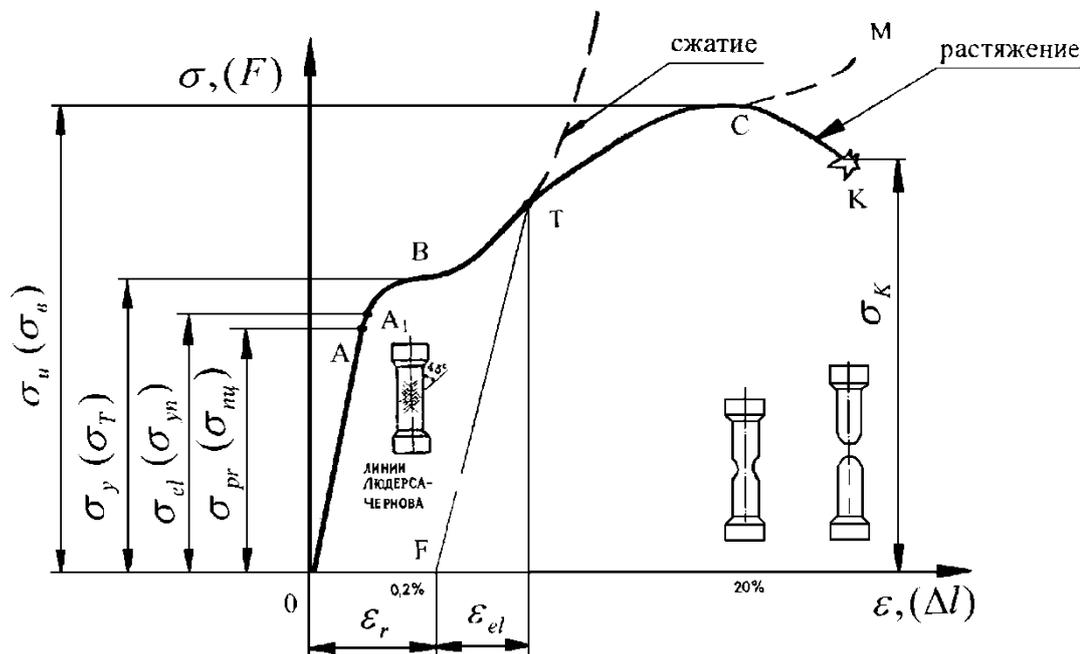


Рисунок 2.15 – Диаграмма растяжения (сжатия) низкоуглеродистой стали

Рассмотрим диаграмму, полученную при испытании образца из низкоуглеродистой стали – Ст3 (см. рисунок 2.15).

Прямолинейный участок ОА диаграммы растяжения подтверждает закон Гука. Точка А соответствует пределу:

$\sigma_{pr}$  или  $\sigma_{нц}$  – **предел пропорциональности** – наибольшее напряжение, для которого справедлив закон Гука (для стали Ст3  $\sigma_{pr}$  200 МПа).

Точка А практически совпадает с точкой А1, которая соответствует пределу:

$\sigma_{el}$  или  $\sigma_{yn}$  – **предел упругости** – наибольшее напряжение, при котором в образце не возникает остаточных деформаций или они настолько малы, что ими можно пренебречь.

Далее продольная деформация возрастает непропорционально напряжению, в образце возникает пластическая деформация. Точка В на диаграмме соответствует началу явления текучести, т.е. росту деформации без увеличения нагрузки.

На этой стадии деформации полированная поверхность образца становится матовой и на ней можно обнаружить сетку линий, наклоненных к оси образца под углом примерно 45°. Это линии Людерса-Чернова, представляющие собой следы сдвигов частиц материала относительно друг друга.

Направление указанных линий соответствует площадкам, на которых при растяжении образца возникают наибольшие касательные напряжения.

$\sigma_y$  или  $\sigma_T$  – **предел текучести** – напряжение, при котором происходит рост пластичной деформации образца при неизменной нагрузке (для стали Ст3  $\sigma_y = 240$  МПа).

Когда явление текучести закончилось, материал опять начинает сопротивляться нагрузке, причем деформация растет значительно быстрее напряжений. Точка С на диаграмме соответствует:

$\sigma_u$  или  $\sigma_s$  – **временное сопротивление** – условное напряжение, равное отношению максимальной силы, которую выдерживает образец к первоначальной площади его поперечного сечения (для стали Ст3  $\sigma_u = 400$  МПа).

С этого момента на образце появляется местное утоньшение – **шейка** и далее, диаграмма фиксирует уже процесс растяжения не всего образца, а его материала в зоне образования шейки, т.е. **появление шейки – это начало разрушения образца.**

$\sigma_u$  или  $\sigma_{nc}$  – **предел прочности** – это временное сопротивление образца, разрушающегося без образования шейки (основная характеристика хрупких материалов).

Точка К соответствует напряжению  $\sigma_k$ , возникающему в образце в момент разрыва во всех поперечных сечениях, кроме сечений шейки.

$\sigma_p$  – **истинное напряжение (напряжение разрыва)** – напряжение, возникающее в наименьшем поперечном сечении шейки в момент разрыва (точка М).

При испытании на сжатие пластичные материалы до предела текучести ведут себя так же, как при растяжении, но далее пластическая деформация растет медленнее. Образец постоянно сплющивается (рисунок 2.16, а). На диаграмме (рисунок 2.15) это показано пунктирной линией.

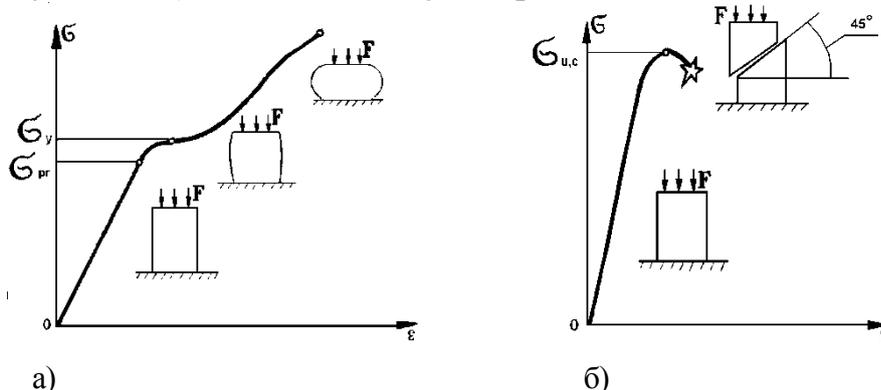


Рисунок 2.16 – Диаграммы сжатия пластичных и хрупких материалов

При испытании хрупких материалов (например, чугунных образцов) установлено, что они способны выдерживать гораздо большие нагрузки при

сжатии, чем при растяжении, образец разрушается по наклонным плоскостям, расположенным под углом  $45^\circ$ .

С повышением % содержания углерода прочность стали увеличивается, а пластичность уменьшается.

Степень пластичности материала характеризуется:

1) **остаточным относительным удлинением**  $\delta = \frac{|l_0 - l_1|}{l_0} 100\%$

2) **остаточным относительным сужением шейки после разрыва**

$$\psi = \frac{|A_0 - A_u|}{A_0} 100\%$$

Чем больше  $\delta$  и  $\psi$  тем пластичнее материал.

### Напряжения предельные, расчетные и допускаемые. Расчет на прочность.

**Предельное (опасное) напряжение** – напряжение, при котором возникают заметные пластические деформации или признаки разрушения:  $\sigma_{dan}$  или  $\sigma_{пред}$ .

Предельные напряжения для материалов:

- 1) пластичных материалов (рисунок 2.17, а) – предел текучести  $\sigma_y$  ;
- 2) хрупких материалов (рисунок 2.17, б) – предел прочности  $\sigma_u$  .

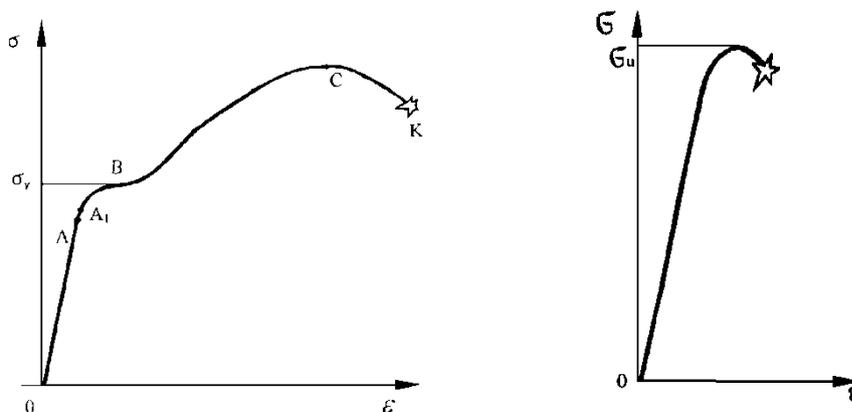


Рисунок 2.17 – Предельные напряжения для пластичных и хрупких материалов

**Расчетное (рабочее) напряжение** – напряжение, возникающее при действии реальных нагрузок. Обычно максимальные значения, найденные по эпюрам ВСФ.

Очевидно, что наибольшие напряжения, возникающие в поперечном сечении элемента конструкции должны быть меньше предельных напряжений  $\sigma < \sigma_{dan}$ .

Отношение предельного напряжения к наибольшему расчетному напряжению, возникающему в элементе конструкции, называют **коэффициентом запаса прочности**

$$S = \frac{\sigma_{dan}}{\sigma} \text{ или } S = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma}.$$

Очевидно, что недостаточный коэффициент запаса прочности не обеспечит прочности конструкции, а чрезмерный приведет к перерасходу материала и утяжелению конструкции.

Минимально необходимый коэффициент запаса прочности называют **допускаемым**  $S_{adm}$  или  $[S]$ .

Сечение, для которого коэффициент запаса прочности минимальный, называют **опасным**.

**Допускаемое напряжение** – отношение предельного напряжения к допускаемому коэффициенту запаса прочности

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}} \text{ или } [\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[S]}.$$

**Допускаемым напряжением** называют оптимальное значение напряжения, при котором обеспечены прочность, надежность элементов конструкции, безопасность в работе и экономичность.

### Допускаемое напряжение для материалов

**пластичных**

**и**

**хрупких**

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}} = \frac{\sigma_u}{S_{adm}}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}} = \frac{\sigma_y}{S_{adm}}$$

**Условие прочности конструкции или ее элемента** состоит в том, что наибольшее расчетное напряжение не должно превышать допускаемое напряжение:

$$\sigma \leq \sigma_{adm} \text{ или } \sigma \leq [\sigma].$$

Или его можно записать:  $S \geq S_{adm}$  или  $S \geq [S]$ , т.е. расчетный коэффициент запаса прочности не должен быть меньше допускаемого коэффициента запаса прочности.

**Условие прочности при растяжении и сжатии**  $\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm},$

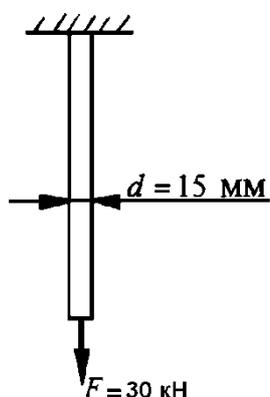
т.е. нормальное напряжение в опасном сечении не должно превышать допускаемое. Если допускаемое напряжение при растяжении и сжатии различны, то их обозначают: при растяжении  $\sigma_{adm,t}$ ; при сжатии  $\sigma_{adm,c}$ .

## Три вида расчета на прочность при растяжении-сжатии

### 1. Проверочный расчет.

Дано:  $\sigma_{adm} = 160$  МПа

$\sigma$  - ?



Решение:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad N = F;$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} = 177 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma = \frac{30 \cdot 10^3}{177} = 169 \text{ МПа} > \sigma_{adm};$$

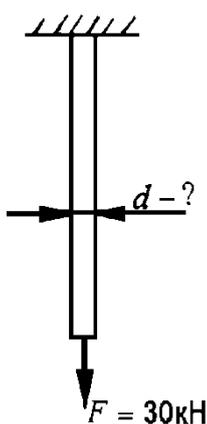
$$\Pi = \frac{|\sigma_{adm} - \sigma|}{\sigma_{adm}} 100\% = \frac{|160 - 169|}{160} 100\% = 5,1\% > 5\%$$

Прочность не обеспечена

### 2. Проектировочный расчет.

Дано:  $\sigma_{adm} = 160$  МПа

$d$  - ?



Решение:

$$A \geq \frac{N}{\sigma_{adm}};$$

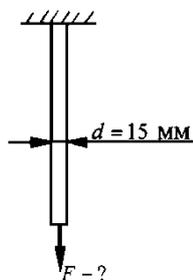
$$A = \frac{30 \cdot 10^3}{160} = 188 \text{ мм}^2;$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 188}{3,14}} = 15,6 \text{ мм}$$

### 3. Определение допускаемой

Дано:  $\sigma_{adm} = 160$  МПа



$F_{adm}$  - ?

нагрузки

Решение:

$$F_{adm} = N_{adm} \leq A \cdot \sigma_{adm};$$

$$F_{adm} = 177 \cdot 160 = \\ = 29 \cdot 10^3 \text{ кН}$$

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 2.3 Практические расчеты на срез и смятие.

#### Понятие о срезе и смятии, условность расчета, основные допущения, расчетные формулы.

Если два бруса соединить штифтом, а затем нагрузить в противоположные стороны силами  $\bar{F}$  (рисунок 2.18), то при небольшом диаметре штифта, он может быть разрушен по сечению, расположенному в плоскости соприкосновения поверхностей соединяемых брусьев. Такое разрушение соединительной детали (штифта, болта, шпильки, заклепки, шпонки и т.п.), происходящее под действием нагрузок, перпендикулярных к ее оси (поперечные нагрузки), называется **срезом**.

Иными словами, **срезом** называется деформация сдвига, доведенная до разрушения.

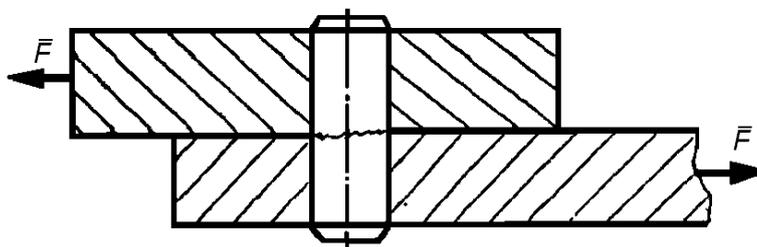


Рисунок 2.18 – Разрушение соединительной детали

**Сдвиг** - такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила.

Естественно считать, что при сдвиге в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения  $\tau'$  и предполагая, что они распределены равномерно, их можно определить:  $\tau' = \frac{Q}{A'}$ .

Практические расчеты соединительных деталей на срез носят условный характер и основываются на трех допущениях:

- 1) в поперечном сечении возможного среза детали возникает только один внутренний силовой фактор – **поперечная сила Q**;
- 2) касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, **распределены по сечению равномерно**;
- 3) если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т.п.), то считается, что все они **нагружены одинаково**.

Исходя из этих допущений, условие прочности при расчете на срез имеет вид:

$$\tau' = \frac{Q}{A'} \leq \tau'_{adm}, \quad (1)$$

где  $\tau'$  – расчетное напряжение среза в поперечном сечении детали;

$Q = \frac{F}{n}$  - поперечная сила, возникающая в этом сечении;

$F$  – общая нагрузка соединения;  $n$  – число соединительных деталей;  
 $A'$  – площадь поперечного сечения срезаемой части одной детали;  
 $\tau'_{adm}$  – допускаемое напряжение при расчетах на срез, зависящее от материала соединительной детали и условий работы конструкции.

При расчете болтов, штифтов и т.п. принимают:

$$\tau'_{adm} = (0,25...0,35)\sigma_y \quad \text{или} \quad \tau'_{adm} = (0,55...0,6)\sigma_{adm}.$$

Из условия прочности (1) можно проводить три вида расчета:

**проверочный:**  $\tau' = \frac{Q}{A'} \leq \tau'_{adm}$  ;

**проектный** – определение числа соединительных деталей при заданных размерах или размерах детали при заданном их числе:

$$A' \geq \frac{Q}{\tau'_{adm}} \quad \text{или} \quad n \geq \frac{F}{A' \tau'_{adm}} ;$$

**определение допускаемой нагрузки:**  $Q_{adm} \leq \tau'_{adm} A'$  ;  $F_{adm} = Q_{adm} n$  .

При небольшой толщине соединяемых деталей (листов, брусьев) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, в результате которого стенка отверстия может обмяться, форма отверстия измениться и соединение разрушиться.

Давление, возникающее между поверхностями соединительной детали и стенками отверстия, называется напряжением **смятия** –  $\sigma_{con}$ . Обычно все расчеты на срез дополняют проверочными расчетами на смятие, которые так же носят условный характер: **считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярно к ним, поэтому условие прочности на смятие имеет вид**

$$\sigma_{con} = \frac{F}{n \cdot A_{con}} \leq \sigma_{adm,con} ,$$

где  $\frac{F}{n}$  - нагрузка на один соединительный элемент ( $n$  – число элементов);

$A_{con}$  – площадь смятия;

$\sigma_{adm,con}$  – допускаемое напряжение смятия.

Для низкоуглеродистой стали  $\sigma_{adm,con} = (60...120)$  МПа.

Если поверхность смятия плоская, то площадь смятия определяют умножением длины  $l$  на высоту  $h$  (рисунок 2.19):  $A_{con} = l \cdot h$  .

Если поверхность смятия цилиндрическая, то за площадь смятия принимают условную площадь, равную площади проекции поверхности на диаметральной плоскости (рисунок 2.20):  $A_{con} = d \cdot h$  .

При различной высоте соединяемых деталей в расчетную формулу подставляют минимальную высоту  $h$ .

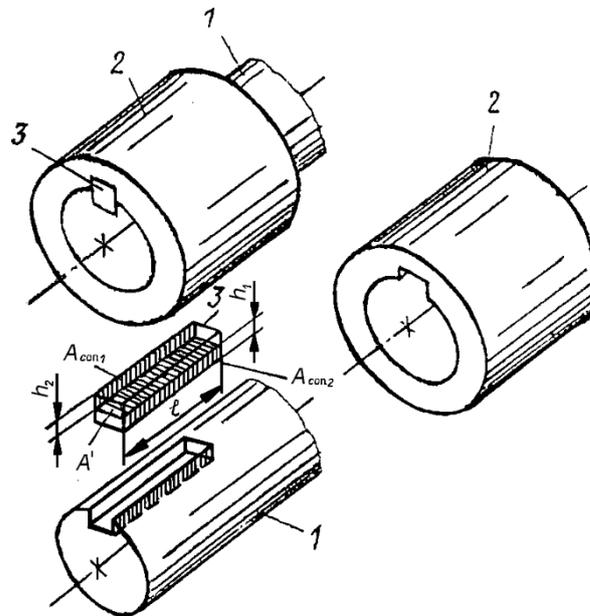


Рисунок 2.19 – Определение площади смятия при соединении вала 1 и ступицы 2 призматической шпонкой

Кроме проверки деталей на смятие при относительно небольшой ширине соединяемых листов или пластин их проверяют на разрыв по поперечному сечению, ослабленному отверстиями согласно рисунку 2.20. Площадь ослабленного сечения:  $A_{oc} = (a - d)h$ .

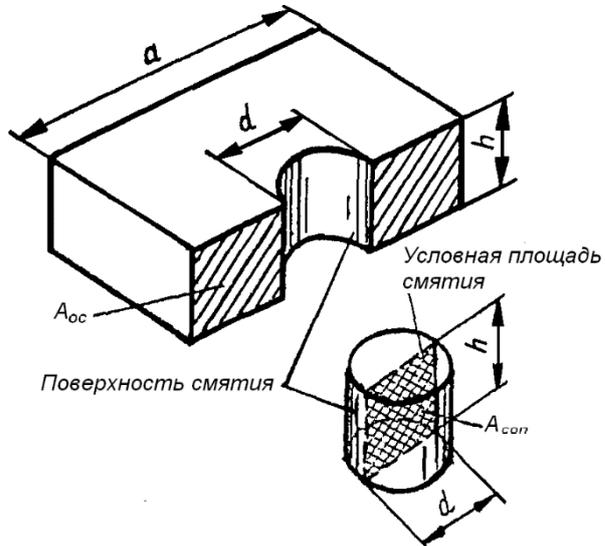


Рисунок 2.20 – Цилиндрическая поверхность смятия

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 2.4 Геометрические характеристики плоских сечений

**Статический момент площади** плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок  $dA$  на расстояния их до этой оси (рисунок 2.21). Статический момент площади обозначим  $S$  с индексом соответствующей оси:

$$S_x = \int_A y dA ; \quad S_y = \int_A x dA .$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры:  $x_c = \frac{\Sigma(A_i x_i)}{\Sigma A_i}$ ;  $y_c = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{\Sigma A_i}$

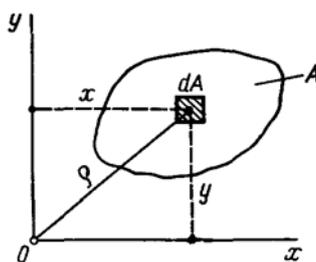


Рисунок 1.21 – Статический момент площади

В этих формулах под  $A_i$  можно понимать площадь  $dA$  элементарной площадки, тогда в пределе при  $dA$ , стремящемся к нулю, выражения  $\Sigma(A_i x_i)$  и  $\Sigma(A_i y_i)$  будут представлять собой статические моменты площади фигуры относительно осей  $x$  и  $y$ , а  $\Sigma A_i$  есть площадь всей фигуры, тогда:

$$S_x = \int y dA = y_c A ; \quad S_y = \int x dA = x_c A .$$

Статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние ее центра тяжести до этой оси. Единица статического момента площади:  $[S] = [x_c] \cdot [A] = 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ м}^3$ .

Статический момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Статический момент сложной фигуры определяется как алгебраическая сумма статических моментов отдельных частей:  $S = \Sigma S_i$ .

**Полярный момент инерции** относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (рисунок 1.65):

$$J_\rho = \int \rho^2 dA .$$

Единица измерения полярного момента инерции:

$$[J_\rho] = [\rho^2] \cdot [A] = 1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ м}^4 .$$

Полярный момент инерции величина положительная и неравная нулю.

Полярный момент инерции для:

$$1) \text{ круга диаметром } d: \quad J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4 .$$

2) кольца размером  $D \times d$ :  $J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4)$

или  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4) \approx 0,1D^4(1 - c^4)$ , где  $c = \frac{d}{D}$ .

**Осевой момент инерции** плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси (рисунок 1.65):  $J_x = \int y^2 dA$ ;  $J_y = \int x^2 dA$

Единица измерения осевого момента инерции:  $[J_x] = [y^2] \cdot [A] = 1 \text{ м}^2 \text{ м}^2 = 1 \text{ м}^4$ ; он всегда положительный.

Сложим моменты относительно двух взаимно перпендикулярных осей  $x$  и  $y$ :

$$J_x + J_y = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA = J_\rho;$$

$$J_x + J_y = J_\rho,$$

т.е. сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

Момент инерции сложной фигуры можно вычислить как сумму моментов инерции простых фигур.

Осевые моменты инерции для:

1) прямоугольника  $b \times h$ :  $J_x = \frac{bh^3}{12}$ ;  $J_y = \frac{b^3h}{12}$ ;

2) квадрата  $a \times a$ :  $J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$ ;

3) круга размером  $d$  относительно диаметров  $x$  и  $y$ :

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4;$$

4) кольца размером  $D \times d$  относительно оси  $x$  и  $y$ :

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4) \text{ или}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4) \approx 0,05D^4(1 - c^4).$$

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называют **центральными**.

Момент инерции относительно центральной оси называют **центральным моментом инерции**.

**Момент инерции при параллельном переносе осей.** Момент инерции относительно какой-либо оси равен центральному моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями (рисунок 1.22):

$$J_{x1} = J_x + a^2 A.$$

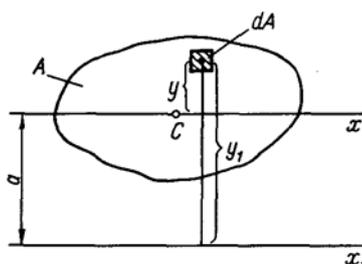


Рисунок 1.22 – Момент инерции при параллельном переносе осей

Из ряда параллельных осей момент инерции будет наименьшим относительно центральной оси. Представим себе плоскую фигуру, моменты инерции которой относительно начала координат  $J_x$  и  $J_y$ , а полярный момент относительно начала координат  $J_\rho$ , тогда  $J_x + J_y = J_\rho$ .

Если оси координат поворачивать в своей плоскости вокруг начала координат, то полярный момент инерции останется неизменным, а осевые моменты инерции будут изменяться при этом  $J_x + J_y = const$ . Если сумма двух переменных величин остается постоянной, то одна из них уменьшается, а другая увеличивается. Следовательно, при каком-то положении осей один из осевых моментов достигает максимального, а другой – минимального значений.

Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называют **главными осями инерции**.

Момент инерции относительно главной оси называется **главным моментом инерции**.

Если главная ось проходит через центр тяжести фигуры, то она называется **главной центральной осью**, а момент инерции относительно этой оси – **главным центральным моментом**.

Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет одной из главных центральных осей.

**Центробежным моментом инерции** плоской фигуры называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на произведения расстояний этих площадок до двух данных взаимно перпендикулярных осей:  $J_{xy} = \int xy dA$ , где  $x, y$  - расстояния от площадки до осей  $y$  и  $x$  соответственно.

Центробежный момент может быть положительным, отрицательным и в частном случае равен нулю.

Единица измерения центробежного момента  $1 \text{ м}^4$

Если взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$  или одна из них являются осью симметрии плоской фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Центробежный момент инерции входит в формулы для определения положения главных осей несимметричных сечений.

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 2.5 Кручение.

**Чистый сдвиг** – напряженное состояние тела, при котором на четырех гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения, а две грани свободны от напряжений.

Согласно закону парности напряжений касательные напряжения на всех четырех площадках равны по абсолютной величине и направлены по смежным граням от ребра или к ребру (рисунок 2.23).

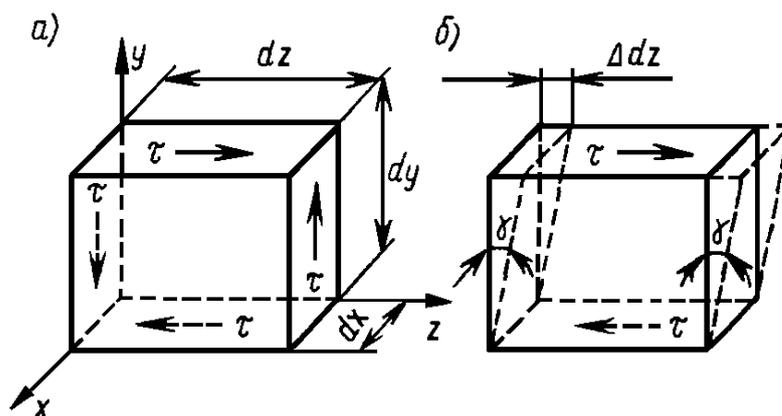


Рисунок 2.23 – Деформация чистого сдвига

Докажем равновесие выделенного элемента при сдвиге. На вертикальных площадках, площадь которых  $dA_B = dx dy$ , действуют силы  $dF_B = \tau \cdot dA_B = \tau \cdot dx dy$ , которые образуют пару сил с моментом  $M_B = -\tau \cdot dx dy \cdot dz$ .

На горизонтальных площадках, площадь которых  $dA_T = dx dz$ , действуют силы  $dF_T = \tau \cdot dx dz$ , образующие пару сил с моментом  $M_T = \tau \cdot dx dz \cdot dy$ , а алгебраическая сумма моментов пар сил будет равна 0, т.е.

$$-\tau \cdot dx dy \cdot dz = \tau \cdot dx dz \cdot dy = 0.$$

Деформация сдвига состоит в том, что под действием внешних сил первоначальная форма выделенного элемента искажается, т.е. горизонтальные площадки сдвигаются относительно друг друга:

$\Delta z$  - величина абсолютного сдвига, на которую сдвигаются горизонтальные площадки относительно друг друга;

$\gamma$  - угол, на который изменяется прямой угол между двумя смежными гранями; он не зависит от размеров выделенного элемента, является мерой деформации сдвига и называется **углом сдвига**.

Экспериментально установлено, что касательные напряжения и величина угла сдвига в пределах упругих деформаций связаны прямо пропорциональной зависимостью:

$$\tau = G\gamma \text{ – закон Гука при сдвиге,}$$

где  $G$  - модуль упругости материала при сдвиге или модуль сдвига или модуль упругости второго рода; он характеризует жесткость материала при сдвиге; размерность  $\left[Па; \frac{Н}{м}\right]$  или  $\left[МПа; \frac{Н}{мм^2}\right]$ . Для стали  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Для одного и того же материала между модулем продольной упругости  $E$ , модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  существует зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

### Крутящие моменты и их эпюры.

**Кручением** называют деформированное состояние бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – **крутящий момент**. Для этого брус необходимо нагрузить, например, двумя парами сил, действующими в противоположных направлениях, в плоскостях, перпендикулярных к оси бруса, моменты которых  $T_{e1}$  и  $T_{e2}$  называют внешними **скручивающими моментами**. Они определяются по формулам:

$$T_e = \frac{P}{\omega} \text{ или } T_e = 9,55 \frac{P}{n}, \quad [Н \cdot м]$$

где  $P$  – мощность, Вт;

$\omega$  – угловая скорость, рад/с;

$n$  – частота вращения, мин<sup>-1</sup>.

Крутящий момент в сечениях бруса определяют с помощью метода сечений (рисунок 2.24): мысленно рассекаем брус и одну часть отбрасываем. Так как равномерно вращающийся вал или неподвижный брус находятся в равновесии, то очевидно, что внутренние силовые факторы, возникающие в поперечном сечении должны уравновешивать внешние моменты, действующие на оставленную часть:  $T = T_{e2}$ .

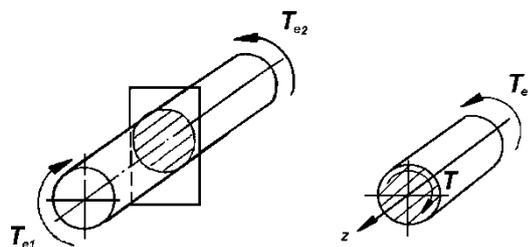


Рисунок 2.24 – Крутящий момент бруса

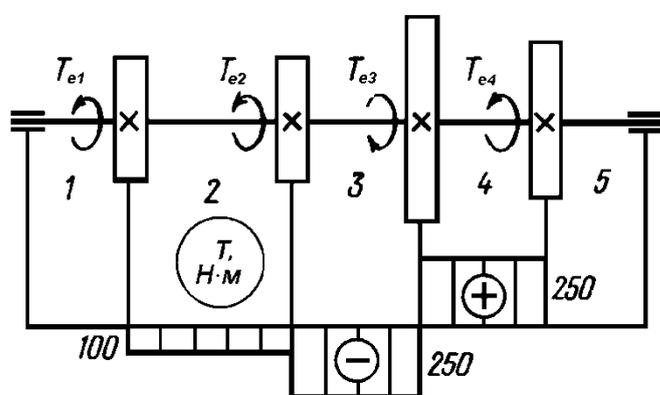
**Крутящий момент** в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения:  $T = \Sigma T_{ei}$ .

**Правило знаков:** крутящий момент в сечении считают положительным, если при взгляде со стороны сечения внешние моменты направлены по часовой стрелке и наоборот.

Для получения наглядной картины деформированного состояния бруса или вала строят эпюры крутящих моментов, которые дают возможность определить опасное сечение, в котором действует максимальный крутящий момент. Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в поперечных сечениях, где приложен вращающий момент, значения крутящего момента меняются скачкообразно.

**Задача:** Построить эпюру крутящих моментов для трансмиссионного вала, если  $T_{e1} = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $T_{e2} = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $T_{e3} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $T_{e4} = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Разбиваем вал на участки 1,2,3,4,5. Используя метод сечений, определяем крутящие моменты для каждого участка:



$$1-1, 5-5: T_1 = 0; T_5 = 0$$

$$2-2: T_2 = -T_{e1} = -100 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$3-3: T_3 = -T_{e1} - T_{e2} = -100 - 150 = -250 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$4-4: T_4 = -T_{e1} - T_{e2} + T_3 = -100 - 150 + 500 = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

### Кручение прямого бруса круглого сечения.

Теория кручения бруса круглого сечения основана на следующих допущениях:

1) гипотеза Бернулли или гипотеза плоских сечений: плоские нормальные поперечные сечения, проведенные в теле до деформации, остаются и при деформации плоскими и нормальными к оси;

2) ось цилиндра, называемая осью кручения, остается прямо-линейной;

3) расстояния между сечениями не изменяются;

4) размеры поперечных сечений не искривляются.

Следовательно, деформация кручения круглого бруса заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения. При этом углы их поворота прямо пропорциональны расстояниям от заделанного сечения: чем дальше отстоит сечение от заделки, тем больше угол поворота (см. рисунок 2.25).

Угол поворота сечения равен углу закручивания части цилиндра, заключенного между данным сечением и заделкой.

Угол  $\varphi$  поворота конечного сечения называют **полным углом** закручивания цилиндра.

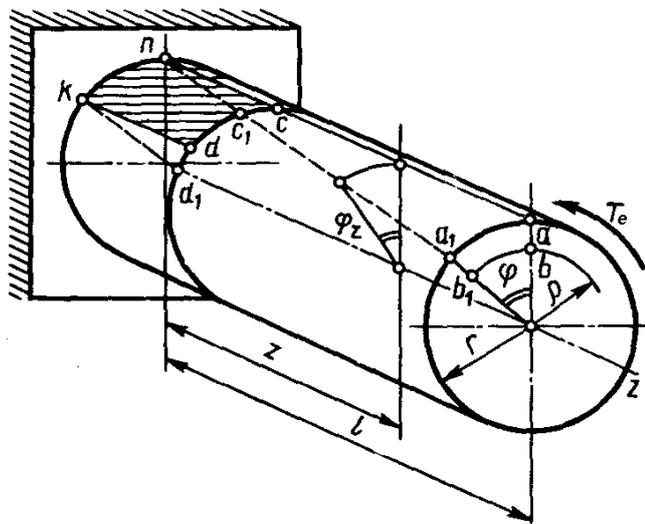


Рисунок 2.25 – Кручение прямого бруса круглого сечения

**Относительным углом** закручивания цилиндра  $\varphi_0$  называют отношение угла закручивания  $\varphi_z$  к расстоянию  $z$  от данного сечения до заделки.

Если брус состоит из одного участка (т.е. имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом  $T_e$ ), то:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = const. \quad (1)$$

Рассмотрим тонкий слой материала на поверхности бруса (ячейка  $kncd$ ). При деформации эта ячейка перекашивается и принимает положение  $knc'd'$ . Аналогичную картину деформации мы наблюдали при сдвиге. Таким образом, при кручении возникает деформация сдвига в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого, следовательно, в точках поперечного сечения возникают только касательные напряжения  $\tau$ , перпендикулярные радиусу, соединяющему эти точки с осью кручения.

Из рисунка 2.25 видно, что абсолютный сдвиг сечения волокна  $a$  равен дуге  $aa'$ , а сечения волокна  $b$  - дуге  $bb'$ . Т.к. радиусы сечения при кручении остаются прямыми, то величина абсолютного сдвига волокон прямо пропорциональна их расстоянию до оси кручения:

$$\cup aa' = r\varphi; \cup bb' = \rho\varphi,$$

где  $\varphi$  - полный угол закручивания, рад;  $r$  - радиус цилиндра;  $\rho$  - расстояние волокна  $b$  до оси кручения.

Относительный сдвиг сечения волокна  $b$ :

$$\gamma_\rho = \frac{\rho\varphi}{l} = \varphi_0\rho. \quad (2)$$

В формулу Гука для сдвига подставим (2):

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\varphi_0\rho. \quad (3)$$

При  $\rho=0$   $\tau=0$ , т.е. на оси кручения касательные напряжения равны нулю; при  $\rho=r$   $\tau=\tau_{\max}$ , т.е. касательные напряжения достигают максимального значения у волокон наиболее удаленных от оси кручения:  $\tau_{\max} = G\varphi_0 r$ . Т.к. относительный угол  $\varphi_0$  есть величина постоянная для данного цилиндрического бруса, то касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от точек сечения до оси бруса (рисунок 2.26).

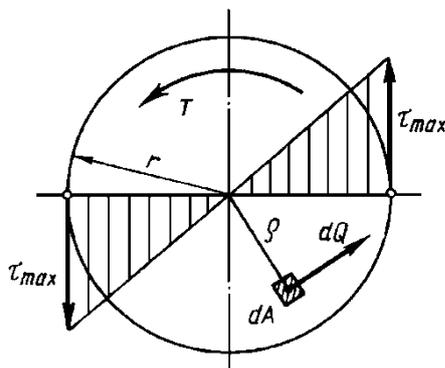


Рисунок 2.26 – Сечение круглого бруса

Т.к. внутренние волокна бруса испытывают небольшие напряжения, поэтому валы иногда делают пустотелыми (кольцевыми), чем достигается значительный выигрыш в массе при незначительной потере прочности.

Рассечем брус поперечной плоскостью, находящейся на расстоянии  $z$  от заделки, и рассмотрим его сечение (рисунок 2.26).

Выделим в сечении малую площадку  $dA$  на расстоянии  $\rho$  от оси кручения. Сила  $dQ$ , действующая на эту площадку, перпендикулярна радиусу и равна:

$$dQ = \tau_\rho dA. \quad (4)$$

Определим момент внутренних сил относительно оси кручения, т.е. крутящий момент:

$$T = \int_A dQ \cdot \rho = \int_A \tau_\rho dA \cdot \rho = \int_A G\varphi_0\rho \cdot dA \cdot \rho.$$

Так как модуль сдвига и относительный угол закручивания величины постоянные их можно вынести за знак интеграла, тогда

$$T = G\varphi_0 \int_A \rho^2 dA,$$

где  $J_p = \int_A \rho^2 dA$  – полярный момент инерции, размерность которого  $\text{м}^4$ .

Тогда крутящий момент  $T = G\varphi_0 J_p$ , отсюда найдем относительный угол закручивания

$$\varphi_o = \frac{T}{GJ_p}, \text{ рад/м.} \quad (5)$$

Полный угол закручивания цилиндра длиной  $l$  равен:

$$\varphi = \varphi_o \cdot l = \frac{T \cdot l}{GJ_p}, \text{ рад.}$$

Произведение  $GJ_p$ , стоящее в знаменателе, называется **жесткостью сечения при кручении**. Модуль сдвига  $G$  характеризует жесткость материала, а **полярный момент инерции  $J_p$  является геометрической характеристикой жесткости бруса при кручении**.

Таким образом, полный угол закручивания круглого цилиндра прямо пропорционален крутящему моменту, длине цилиндра и обратно пропорционален жесткости сечения при кручении. Это справедливо в пределах действия закона Гука, когда нагрузка и деформация пропорциональны.

### Формула Гука

при растяжении

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A}$$

$\Delta l$  — абсолютное продольное удлинение бруса;  
цилиндра;

$l_0$  — первоначальная длина бруса;  
 $E \cdot A$  — жесткость материала при растяжении

при кручении

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}.$$

$\varphi$  — полный угол закручивания ци-

$l$  — длина бруса;  
 $GJ_p$  — жесткость сечения при кручении.

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, значением крутящего момента, полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков  $\varphi_o = \sum \varphi_i$ .

**Выведем формулу для определения напряжений.**

Для слоя  $b$ , находящегося на расстоянии  $\rho$ , напряжение определяют по формуле (3)

$$\tau_\rho = G\varphi_o\rho = \frac{G \cdot T \cdot \rho}{GJ_p} = \frac{T \cdot \rho}{J_p}.$$

При  $\rho = r$  напряжения достигнут максимального значения:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot r}{J_p} = \frac{T}{J_p / r} = \frac{T}{W_p},$$

где  $W_p = \frac{J_p}{r}$  - момент сопротивления кручению (или полярный момент сопротивления), **размерность  $m^3$** , является **геометрической характеристикой прочности бруса круглого поперечного сечения при кручении**.

Таким образом, при кручении напряжение и деформации определяют по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \quad \text{и} \quad \varphi_o = \frac{T}{GJ_p}.$$

Эти формулы применимы для участков бруса, имеющих постоянные размеры поперечного сечения, и постоянное значение крутящего момента.

Следует отметить, что согласно закону парности касательных напряжений касательные напряжения возникают не только в поперечных, но и продольных сечениях.

### **Формулы полярных моментов инерции**

1) круга диаметром  $d$ :  $J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ .

2) кольца размером  $D \times d$ :  $J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4)$

или  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4) \approx 0,1D^4(1 - c^4)$ , где  $c = \frac{d}{D}$ . Обычно  $c = 0,6 \dots 0,8$ .

### **Формулы моментов сопротивления кручению**

1) круга диаметром  $d$ :  $W_p = \frac{J_p}{0,5d} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot 0,5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ .

2) кольца размером  $D \times d$ :

$$W_p = \frac{J_p}{0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \cdot 0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx \frac{0,2(D^4 - d^4)}{D}$$

или  $W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2D^3(1 - c^4)$ , где  $c = \frac{d}{D}$ .

### **Расчеты на прочность при кручении**

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{adm}.$$

Допускаемое касательное напряжение при кручении  $\tau_{adm}$  определяется в зависимости от вида материала:

**для пластичного материала**

**и**

**хрупкого материала**

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_y}{S_{y,adm}};$$

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_u}{S_{u,adm}},$$

где  $\tau_y, \tau_u$  - пределы текучести и прочности материала при кручении соответственно;

нормативные коэффициенты запаса прочности:  $S_{y,adm} = 1,4 \dots 2,5$ ;  
 $S_{u,adm} = 2,5 \dots 5,0$ .

По условию прочности выполняют три вида расчета:

**1) Проверочный расчет**, согласно которому, определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и полярный момент инерции сопротивления сечения, находим  $\tau = \frac{T}{W_p}$  и сравниваем  $\tau_{adm}$ , т.е. должно выполняться условие:

$$\tau = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{adm} .$$

**2) Проектный расчет:** определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и приняв  $\tau_{max} = \tau_{adm}$ , находим требуемое значение полярного момента  $W_p \geq \frac{T}{\tau_{adm}}$ . Затем находим диаметр поперечного сечения:

$$\begin{array}{ccc} \text{для круглого} & \text{и} & \text{кольцевого сечения} \\ d = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0,2}} & & d = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0,2(1-c^4)}} , \text{ где } c = \frac{d}{D} . \end{array}$$

Полученные значения диаметра в мм следует округлять в расчетах до ближайшего большего четного числа или числа, оканчивающегося на 0 или 5.

**3) Определение допускаемой нагрузки:** определив полярный момент сопротивления сечения и приняв  $\tau_{max} = \tau_{adm}$ , находим допускаемое значение крутящего момента:  $T_{adm} \leq W_p \tau_{adm}$ . Затем, исходя из схемы нагружения, находим максимальную допускаемую внешнюю нагрузку.

### **Расчеты на жесткость при кручении**

**Условие жесткости при кручении бруса** состоит в том, чтобы относительный угол закручивания  $\varphi_0$  не превосходил некоторого заданного допускаемого значения  $\varphi_{0,adm}$

$$\varphi_0 = \frac{T}{GJ_p} \leq \varphi_{0,adm} , \text{ рад/м.}$$

Если допускаемое значение относительного угла задается град/м, то условие жесткости имеет вид

$$\varphi_0^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T}{GJ_p} \leq \varphi_{0,adm}^\circ , \text{ град/м,}$$

где  $\varphi_{0,adm}^\circ$  - допускаемый угол закручивания одного метра вала; принимают  $\varphi_{0,adm}^\circ = 0,25 \dots 1,0$  град/м.

По условию жесткости выполняют три вида расчета:

**1) Проверочный** непосредственно по расчетной формуле

$$\varphi_0 = \frac{T}{GJ_p} \leq \varphi_{0,adm}$$

2) **Проектный** по формуле

$$J_p \geq \frac{T}{G\varphi_{0,adm}},$$

затем в зависимости от формы сечения (круг или кольцо) по найденному полярному моменту инерции  $J_p$  определяют диаметры вала:

для **круглого** и **кольцевого сечения**

$$d = \sqrt[4]{\frac{J_p}{0,1}} \quad d = \sqrt[4]{\frac{J_p}{0,1(1-c^4)}}, \text{ где } c = \frac{d}{D}.$$

3) **Определение допустимой нагрузки** по формуле:  $T_{adm} \leq GJ_p \varphi_{0,adm}$ .

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 2.6 Изгиб.

**Изгибом** называется деформация, при которой изменяется кривизна продольной оси бруса.

**Брус** – тело, у которого длина значительно больше поперечных размеров.

Чтобы получить представление о деформации изгиба, возьмем резиновый брус прямоугольного сечения, нанесем на него сетку продольных и поперечных прямых линий и подвергнем деформации изгиба.

**Чистым изгибом** называют такое деформированное состояние бруса, при котором в поперечном сечении возникает один внутренний силовой фактор – изгибающий момент  $M$  (возникает в плоскостях перпендикулярных поперечному сечению).

Если кроме изгибающего момента возникает поперечная сила  $Q$ , то изгиб бруса называется **поперечным**.

И чистый и поперечный изгиб может быть прямым и косым, что зависит от характера нагружения бруса.

Если все внешние силовые факторы лежат в одной плоскости изгиб называют **плоским**.

Плоский изгиб вызывается (рисунок 2.27) действием **сосредоточенных сил**  $F$  (кН) и **распределенных нагрузок**  $q$  (кН/м), расположенных в плоскости, проходящей через ось  $z$  (ось бруса) и перпендикулярных к оси  $z$ , а также **пар сил**, вызывающих **момент**  $m$  (кН м) – в плоскости, проходящей через ось  $z$ .

Плоскость действия нагрузок ( $F, q, m$ ) называется **силовой плоскостью**. Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью инерции, то изгиб называется **прямым**, если не совпадает – **косым**.

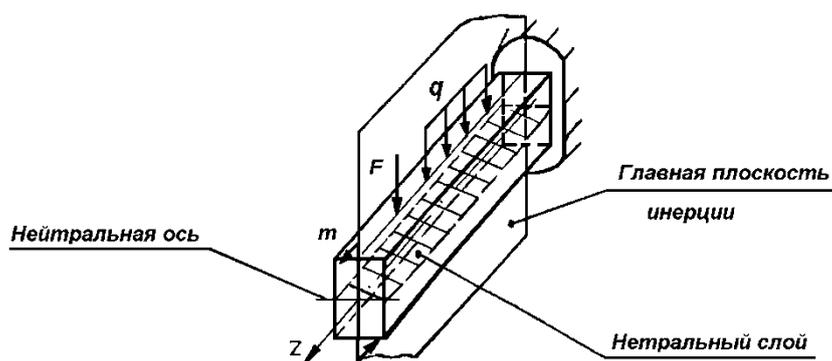


Рисунок 2.27 – Деформация плоского изгиба

**Главной плоскостью инерции** называется плоскость, проходящая через продольную ось бруса и совпадающая с одной из плоскостей симметрии, проходящих через ось  $x$  или ось  $y$ .

Брусья, работающие на изгиб, называются **балками**.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой изгиб балки. Поэтому независимо от формы поперечного сечения балки ее условно будем изображать прямой линией и считать, что нагрузки расположены в главной плоскости.

При изучении деформации изгиба будем мысленно представлять себе, что балка состоит из бесчисленного числа волокон, параллельных оси. При этом при изгибе (рисунок 2.28):

- 1) поперечные прямые линии останутся и при деформации прямыми, но повернутся на встречу друг другу, например, в зоне сжатия;
- 2) продольные прямые линии и ось бруса изогнутся;
- 3) сечения бруса расширяются в поперечном направлении на вогнутой стороне (там, где волокна сжаты) и сужаются на выпуклой стороне (там, где волокна растянуты), следовательно, при чистом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений.

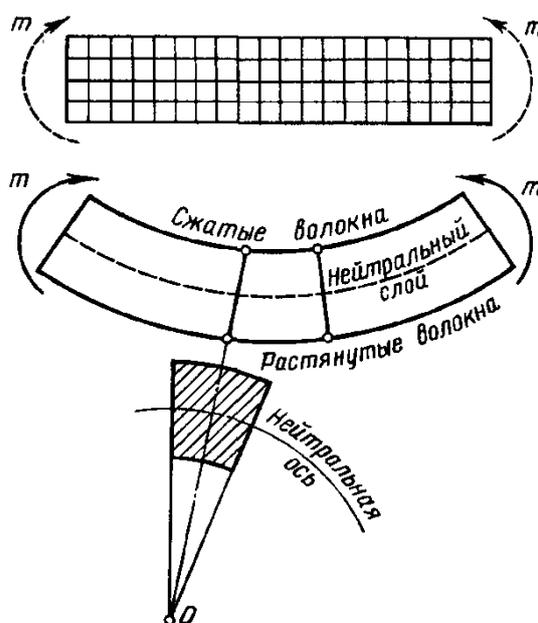


Рисунок 2. 28 – Изгиб

На границе между растянутыми и сжатыми волокнами лежит нейтральный слой волокон, которые только искривляются, не изменяя своей длины.

Полагая справедливой гипотезу о не надавливании волокон можно утверждать, что при чистом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия, неравномерно распределенные по сечению, благодаря чему и происходит искривление волокон и оси бруса. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется **нейтральной осью** (Н.О.), нормальные напряжения на Н.О. равны 0.

## Внутренние силовые факторы: поперечная сила и изгибающий момент. Правило знаков.

Для определения внутренних силовых факторов (ВСФ), возникающих в поперечных сечениях балки при изгибе необходимо знать величину реакций опор балки. Для этого используют уравнения статики. Для двухопорных балок и двухопорных с консолью:

$$\Sigma M_A(F_i) = 0$$

$$\Sigma M_B(F_i) = 0$$

$$\text{Проверка: } \Sigma F_{iy} = 0$$

Если сосредоточенные силы перпендикулярны к оси балки  $R_{Ax} = 0$ .

При построении эпюр для консольных балок реакции опор определять не обязательно, они будут определены в ходе построения эпюр.

При определении ВСФ реакции опор учитывают наравне с внешними силами.

Пример двухопорной балки – вал редуктора, изгибающийся под действием сил, возникающих в зацеплении передач, например, зубчатых и червячных. Пример консольной балки – крыло самолета, изгибающегося под давлением воздуха. Следует отметить, что во всех этих случаях роль балок заключается в том, чтобы приняв нагрузку от других элементов, передать ее тем частям, которые в свою очередь поддерживают балку.

Для определения ВСФ воспользуемся методом сечений. Рассечем балку (рисунок 2.29) в точке К и рассмотрим равновесие каждой ее части в отдельности.

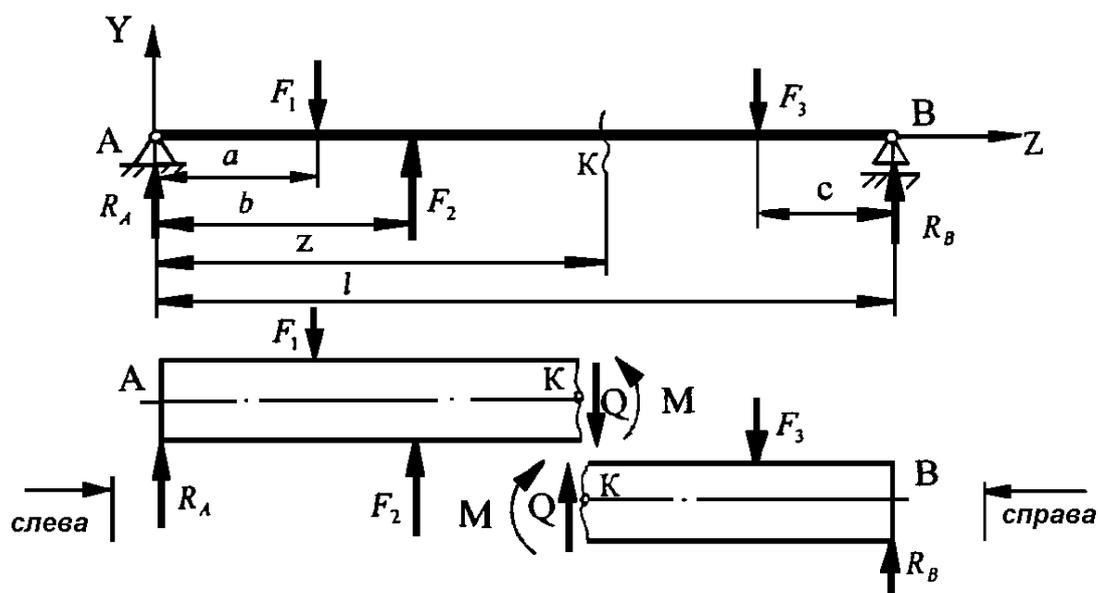


Рисунок 2.29 – Определение ВСФ балки

Записываем уравнения равновесия для :

**левой части**

$$\Sigma F_{iy} = 0; R_A - F_1 + F_2 - Q = 0;$$

или  $Q = R_A - F_1 + F_2$

**правой части**

$$\Sigma F_{iy} = 0; R_B - F_3 + Q = 0$$

или  $Q = F_3 - R_B,$

т.е. **поперечная сила** в произвольном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $Y$ , нормальную к оси балки, всех внешних сил, действующих справа или слева от данного сечения.

**левой части**

$$\Sigma M_K = 0; R_A z - F_1(z-a) + F_2(z-b) - M = 0;$$

$$M + F_3(l-z-c) - R_B(l-z) = 0$$

**правой части**

$$\Sigma M_K = 0;$$

или  $M = R_A z - F_1(z-a) + F_2(z-b);$       или  $M = R_B(l-z) - F_3(l-z-c),$

т.е. **изгибающий момент** в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил и внешних моментов, действующих справа или слева от сечения относительно центра тяжести данного сечения.

**Правило знаков сопромата** (рисунок 2.30):

Внешним силам, сдвигающим относительно сечения оставленную часть балки **по часовой стрелке**, приписывают знак «+», а **против часовой стрелки** – знак «-»

Внешним моментам, изгибающим ось балки **выпуклостью вниз**, приписывают знак «+», а **выпуклостью вверх** – знак «-».

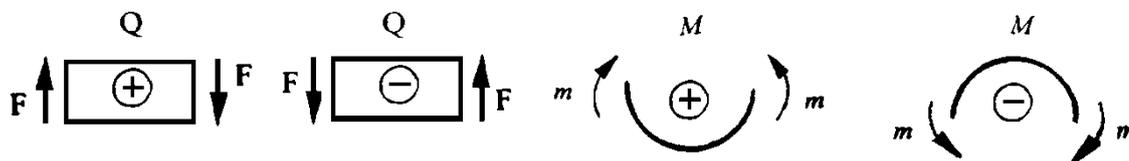
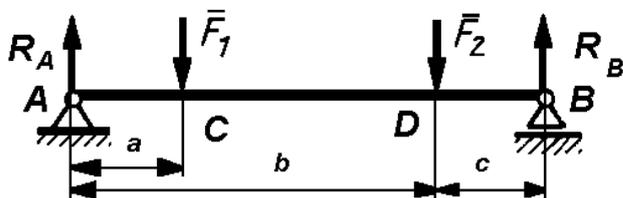


Рисунок 2.30 – Правило знаков

**Примеры на применение правила знаков:**



$$\rightarrow | Q_A = R_A;$$

$$\rightarrow | Q_C = R_A - F_1;$$

$$\rightarrow | Q_D = R_A - F_1 - F_2;$$

$$|\leftarrow Q_B = -R_B; \quad |\leftarrow Q_D = -R_B + F_2; \quad |\leftarrow Q_C = -R_B + F_2 + F_1;$$

$$\rightarrow | M_A = 0; \quad \rightarrow | M_C = R_A \cdot a; \quad \rightarrow | M_D = R_A \cdot b - F_1 \cdot (b-a);$$

$$|\leftarrow M_B = 0; \quad |\leftarrow M_D = R_B \cdot c; \quad |\leftarrow M_C = R_B \cdot (c+b-a) - F_2 \cdot (b-a).$$

### Чистый изгиб

Если нагрузить балку так, что в точках С и D приложены одинаковые силы  $F$  (рисунок 2.31), то реакции опор  $R_A = R_B = F$ . А эпюра поперечных сил имеет вид: в точке А имеется «скачок» вверх на величину силы  $F$ , в точке С - «скачок» вниз на величину силы  $F$ , на участке СД поперечная сила  $Q = 0$ , в точке D – «скачок» вниз на величину силы  $F$ , в точке В – «скачок» вверх на величину силы  $F$ . Эпюра изгибающих моментов в точках С и D:

$$\rightarrow | M_C = Fa ; | \leftarrow M_D = Fa .$$

На участке  $CD$  мы имеем чистый изгиб. При чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения.

Рассмотрим участок балки, подверженный деформации чистого изгиба между поперечными сечениями АВ и CD (см. рисунок 2.32). Выделим элемент балки бесконечно малой длины  $dS$ .

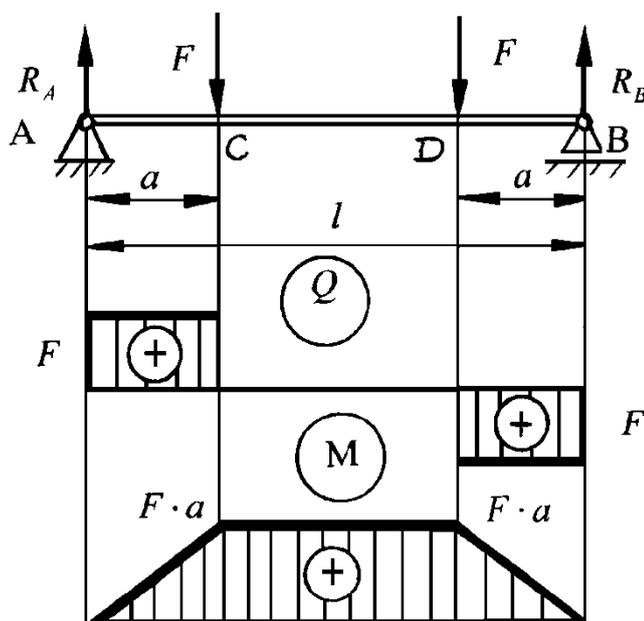


Рисунок 2.31 – Пример чистого изгиба

**Осевые моменты инерции плоских сечений:**

**Осевые моменты сопротивления (моменты сопротивления изгибу):**

1) для круга  $d$  :

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4 ;$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 ;$$

2) для кольцевого сечения  $D \times d$  :

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) \approx 0,05d^4 (1 - c^4)$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) \approx 0,1d^3 (1 - c^4) ;$$

3) прямоугольного сечения  $b \times h$  :

$$J_x = \frac{bh^3}{12} ; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} ;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} ; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} .$$

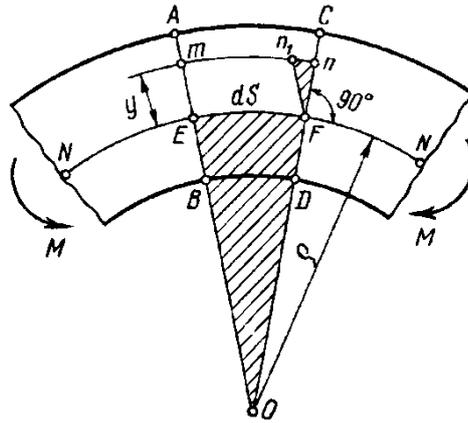


Рисунок 2.32 – Участок балки, подверженный деформации чистого изгиба

Для обеспечения максимальной прочности ось, относительно которой момент инерции максимален, должна быть нейтральной.

Т.к. вблизи Н.О. материал мало напряжен, то выгодно больше материала располагать дальше от Н.О. Поэтому в машиностроении редко применяют балки прямоугольного сечения, но весьма широко используют прокатные профильные балки, таврового (рисунок 2.33), двутаврового, швеллерного (рисунок 2.34), углового сечений.

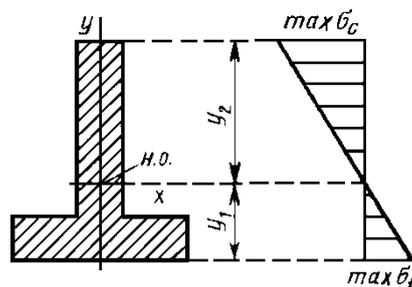


Рисунок 2.33 – Тавровое сечение

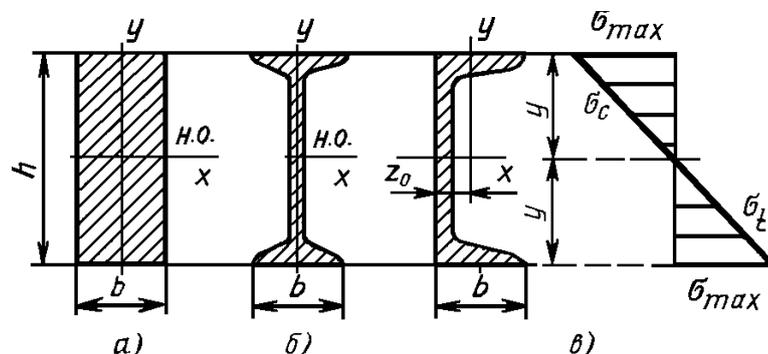


Рисунок 2.34 – Профильные сечения балок

Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим  $\rho$  (см. рисунок 2.32). Рассмотрим слой волокон  $mn$ , находящийся на расстоянии  $y$  от нейтраль-

ного слоя  $NN$ . Это волокно в результате деформации изгиба удлинилось на величину  $nn_1$ . Ввиду малости расстояния  $dS$ , заштрихованные треугольники будем считать прямолинейными. Эти треугольники подобны, так как  $mo \parallel n_1F$  следовательно:  $\frac{nn_1}{dS} = \frac{y}{\rho}$ ,

где  $\frac{nn_1}{dS} = \varepsilon$  – относительное удлинение рассматриваемого слоя. Тогда  $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ . Используя закон Гука при растяжении и сжатии:  $\sigma = E\varepsilon$ , получим

$$\sigma = \frac{E y}{\rho}, \quad (1)$$

т.е. *напряжения при изгибе распределены по высоте сечения неравномерно: максимальные напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси, а по ширине сечения они не меняются* (рисунок 2.35).

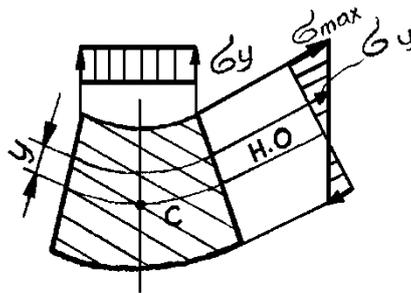


Рисунок 2.35 – Распределение напряжений при изгибе

Формула Гука при изгибе:

$$M = \frac{E J_x}{\rho} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E J_x},$$

согласно корой *кривизна нейтрального слоя балки*  $\frac{1}{\rho}$  прямо пропорциональна *изгибающему моменту* и обратно пропорциональна *жесткости сечения при изгибе*  $E J_x$ .

### Расчеты на прочность при изгибе.

Балки рассчитывают по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными, как известно, возникают касательные напряжения, но они в подавляющем большинстве случаев невелики и при расчетах на прочность не учитываются.

Если материал балки хрупкий (чугун, текстолит) то расчет на прочность при изгибе проводят по напряжениям растяжения и сжатия. У хрупких

материалов предел прочности при сжатии выше предела прочности при растяжении  $\sigma_{u,c} > \sigma_{u,t}$ , поэтому поперечным сечениям балок из хрупкого материала целесообразно придавать форму, асимметричную относительно нейтральной оси, и располагать балку так, чтобы усиленная часть сечения находилась на растянутой зоне (рисунок 2.31). При расчетах балок *из хрупких материалов* используют *два условия прочности*:

1) для растянутой зоны

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} y_1 \leq \sigma_{t,adm};$$

2) для сжатой зоны

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} y_2 \leq \sigma_{c,adm}$$

Причем наилучшее использование материала происходит при форме сечения, удовлетворяющего условию:  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sigma_{t,adm}}{\sigma_{c,adm}}$ .

При расчете балок из пластичных материалов (низкоуглеродистая сталь, цветные металлы) допускаемые напряжения растяжения и сжатия берутся одинаковыми:  $\sigma_{t,adm} = \sigma_{c,adm} = \sigma_{adm}$ . Поэтому для таких балок целесообразными являются сечения симметричные относительно нейтральной оси (рисунок 2.32). В этом случае наиболее удаленные точки в растянутой и сжатой зонах сечения располагаются на одинаковом расстоянии:  $y = h/2$  от нейтральной оси и, следовательно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{\max}}{J_x / (h/2)} = \frac{M_{\max}}{W_x},$$

где  $W_x = \frac{J_x}{h/2}$  - момент сопротивления сечения при изгибе (или осевой момент сопротивления), измеряется в м<sup>3</sup>.

**Условие прочности балки из пластичного материала:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm}.$$

По условию прочности при изгибе выполняют три вида расчета:

1) проверочный

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm}$$

2) проектный

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}}$$

3) определение допускаемой нагрузки

$$M_{adm} \leq W_x \sigma_{adm}.$$

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Вопросы к  
ОКР №1](#)

[Обратная  
связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 2.7 Изгиб с кручением.

**Напряженное состояние** в точке тела определяется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих в любом сечении, проведенном через эту точку.

Наглядной моделью, характеризующей напряженное состояние в точке, служит вырезанный из тела элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с исследуемой точкой внутри. При уменьшении размеров параллелепипеда он стягивается в точку, и можно считать, что любая из граней параллелепипеда проходит через данную точку.

В общем случае на трех любых взаимно перпендикулярных гранях элемента возникают различные полные напряжения  $p$ , которые можно разложить на три составляющие (рисунок 2.36): одну, направленную по нормали к площадке, и две, лежащие в ее плоскости. Индексы нормальных напряжений  $\sigma$  соответствуют осям, перпендикулярным к данным площадкам, а касательные напряжения  $\tau$  имеют два индекса — первый соответствует оси, перпендикулярной к площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор данной касательной составляющей.

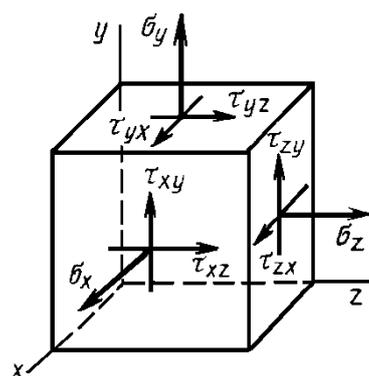


Рисунок 2.36 – Напряженное тело

Таким образом, напряженное состояние в точке тела в общем случае характеризуется девятью компонентами. Такие же девять составляющих напряжений, но противоположно направленные, возникают на трех невидимых гранях элемента (для упрощения на рисунке не показаны). В соответствии с законом парности касательных напряжений, вытекающим из условия равновесия выделенного элемента, имеем:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ;  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ , т. е. **на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательные напряжения, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.**

Следовательно, из девяти компонентов независимы друг от друга лишь шесть. И если эти независимые друг от друга напряжения заданы, то можно определить напряжения в любой другой плоскости, проходящей через данную

точку. Поэтому три взаимно перпендикулярные грани выделенного элемента иначе называют исходными площадками. Таким образом, **напряженное состояние в точке известно, если определены напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку.**

Оказывается, что через заданную точку напряженного тела всегда возможно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых **касательные напряжения равны нулю**, а возникают только нормальные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (рисунок 2.37). Эти площадки называют **главными площадками**, а нормальные напряжения в них – **главными напряжениями**. Причем индексы 1, 2 и 3 характеризуют порядок уменьшения в алгебраическом смысле значений главных напряжений, т. е.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

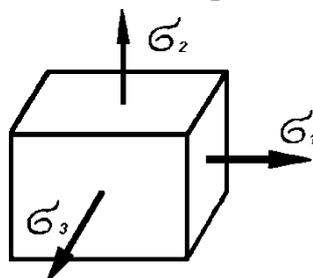


Рисунок 2.37 – Главные напряжения

Виды напряженного состояния классифицируют обычно по главным напряжениям (рисунок 2.38):

1) Если все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние, называют **трехосным** или **объемным** (рисунок 2.38 а, б, в). Оно может быть а) трехосное растяжение; б) трехосное сжатие, в) трехосное смешанное состояние.

2) Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то напряженное состояние называют **плоским** или **двухосным** (рисунок 2.38 г, д, е). Оно может быть г) двухосное растяжение; д) двухосное сжатие, е) двухосное смешанное состояние.

3) Если лишь одно из главных напряжений не равно нулю, напряженное состояние называется **линейным** или **одноосным** (рисунок 2.38 ж, з), оно может быть: ж) одноосное растяжение; з) одноосное сжатие.

Площадки свободные от напряжений называют **нулевыми главными площадками** (на рисунке 2.38 они покрыты точками).

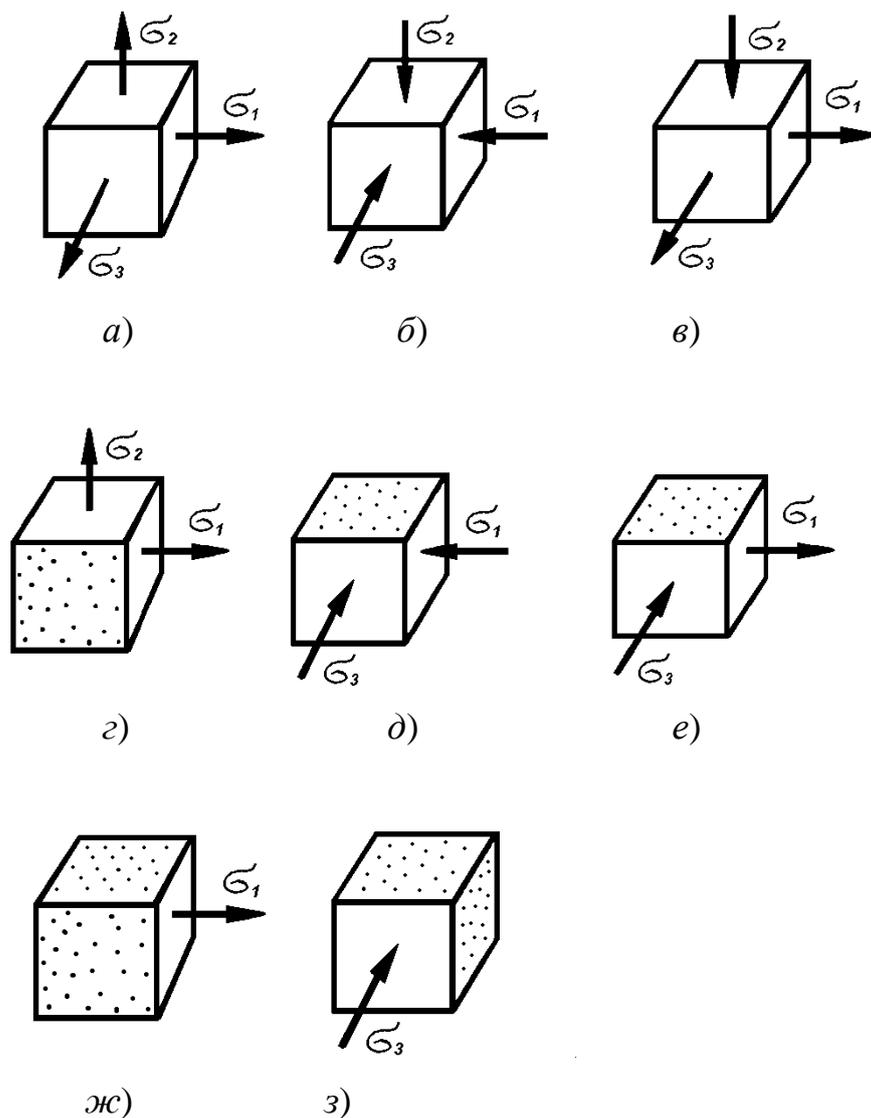


Рисунок 2.38 – Виды напряженного состояния

**Максимальное касательное напряжение** для данной точки тела возникает на площадке, параллельной вектору  $\sigma_2$  и делящей пополам прямой угол между площадками действия  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Оно равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Площадка, на которой возникает  $\tau_{\max}$  отмечена штриховкой (рисунок 2.39), такое же напряжение возникает и на площадке, перпендикулярной отмеченной (она на рисунке не показана).

Напряженное состояние в какой-либо точке одного тела можно сравнивать с напряженным состоянием в точке другого тела только в том случае, если оба тела несут одностипные нагрузки, а напряженные состояния в этих точках подобны друг другу, т. е. характеризуются соответственно пропорциональными главными напряжениями, имеющими одинаковые знаки. Напри-

мер, на рисунке 5 показаны подобные напряженные состояния в точках  $A$  и  $B$ , но состояние в точке  $B$  в 2 раза опаснее.

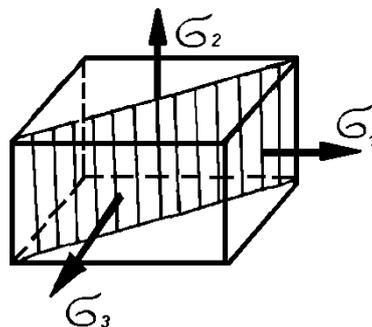


Рисунок 2.39 – Возникновение максимального касательного напряжения

### Назначение теорий прочности

До сих пор мы рассматривали случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечениях бруса возникают только напряжения, которые в каждой точке можно складывать алгебраически.

На практике чаще всего встречаются случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечения возникают напряжения, распределенные неравномерно и по разным законам, в этих случаях опытное определение величин, характеризующих прочность, невозможно, так как не всегда возможно воспроизвести в опытных условиях аналогичные напряженные состояния.

Поэтому при оценке прочности деталей конструкций приходится основываться на механических характеристиках данного материала, полученных из диаграммы растяжения.

В случае одноосного напряженного состояния оценка прочности в данной точке конструкции производится путем непосредственного сопоставления возникающего в ней рабочего напряжения либо с предельным, либо с допускаемым напряжением:  $\sigma \leq \sigma_{adm}$ .

**Допускаемым напряжением**  $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}}$ , т.е. **равно отношению предельного напряжения к допускаемому коэффициенту запаса прочности.**

Предельное напряжение определяют при механических испытаниях данного материала на одноосное растяжение.

Предельным напряжением для пластичного материала является **предел текучести**  $\sigma_y$ , а для хрупкого — **предел прочности**  $\sigma_u$ . Поэтому предельное напряженное состояние у пластичных материалов наступает при возникновении **остаточных деформаций**, а у хрупких — **при начале разрушения.**

Возникает вопрос, как подойти к оценке прочности в общем случае сложного (объемного или плоского) напряженного состояния. Разнообразие

напряженных состояний безгранично, чрезвычайно велика и номенклатура применяемых материалов, поэтому создать каждое из могущих встретиться на практике напряженных состояний в лабораторных условиях невозможно, как по технической, так и экономической причинам.

Это становится возможным с применением *теорий прочности (теорий предельных напряженных состояний)*.

*Основная задача теорий предельных напряженных состояний* состоит в разработке критерия, позволяющего сравнивать между собой разнотипные напряженные состояния с точки зрения близости их к предельному состоянию.

Сравнение разнотипных напряженных состояний производится с помощью *эквивалентного напряженного состояния*, за которое берется наиболее изученное напряженное состояние *при простом растяжении*.

Напряжение при одноосном растяжении, равноопасное заданному сложному напряженному состоянию, называется *эквивалентным* и обозначается  $\sigma_{red}$ .

Два напряженных состояния называют равноопасными или эквивалентными, если они переходят в предельное состояние при увеличении соответствующих им главных напряжений в одно и то же число раз, что означает *равенство коэффициентов запаса прочности при эквивалентных напряженных состояниях*.

Остается решить вопрос, что же является критерием равноопасности различных по характеру напряженных состояний. Решение этого вопроса дают теории прочности. Тогда для расчета на прочность в случае сложного напряженного состояния следует заменить его равноопасным (эквивалентным) ему одноосным растяжением и сравнить соответствующее напряжение с допускаемым (или предельным) для данного материала.

Таким образом, эквивалентное напряжение – это лишь некоторая условная расчетная величина, а не какое-либо реально возникающее напряжение. Его значение зависит не только от заданного напряженного состояния, но и от принятого для расчета признака равноопасности напряженного состояния, чем и занимаются теории прочности.

Тот или иной критерий эквивалентности может быть основой для практических расчетов лишь при условии, что для ряда частных случаев он проверен опытным путем и результаты эксперимента оказались достаточно близки к результатам теоретического расчета.

Независимо от принятой теории прочности после определения эквивалентного напряжения условие прочности можно представить в виде:

$$S = \frac{\sigma_{dan}}{\sigma_{red}} \geq S_{adm} \quad \text{или} \quad \sigma_{red} \leq \sigma_{adm}.$$

## Основные теории прочности:

**Первая гипотеза** прочности была выдвинута Галлилеем в XVII в. и состояла в том, что причиной разрушения материала является наибольшее нормальное напряжение растяжения  $\sigma_t$  или сжатия  $\sigma_c$  без учета двух других главных напряжений. Экспериментальная проверка не подтвердила этой гипотезы в отношении двухосного и трехосного напряженных состояний.

**Вторая гипотеза** была выдвинута в 1682 г. Мариоттом; согласно этой гипотезе, прочность материала в исследуемой точке достигает критического состояния при максимальном значении линейной деформации  $\varepsilon$ . Экспериментальная проверка и в этой гипотезе обнаружила ряд весьма существенных недостатков. В настоящее время эти теории не применяются.

**Третья гипотеза**, предложенная Кулоном в 1773 г., предполагает, что предельное напряженное состояние возникает в момент, когда в двух взаимно перпендикулярных сечениях, проведенных через исследуемую точку, наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения, при котором возможно разрушение путем сдвига и скольжения одной части материала по другой. Эта гипотеза более совершенна, чем первые две, но применима лишь для пластичных материалов, т. е. при условии, если  $\sigma_{u,t} = \sigma_{u,c}$  и для напряженных состояний, у которых  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно этой гипотезе два напряженных состояния равноопасны, если максимальные касательные напряжения для них одинаковы т.е. максимальное касательное напряжение для заданного напряженного состояния и эквивалентного ему одноосного растяжения одинаковы:

$$\tau_{\max} = \tau_{red}.$$

Для заданного сложного напряженного состояния  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , а для эквивалентного одноосного растяжения:

$$\tau_{red} = \frac{\sigma_{red}^{III}}{2}.$$

Будем обозначать эквивалентное напряжение, указывая номер теории прочности римской цифрой.

Приравняв  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{red}$ , получим

$$\sigma_{red}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (1)$$

Очевидный недостаток этой теории пренебрежение влиянием промежуточного напряжения  $\sigma_2$ .

**Четвертая гипотеза**, предложенная Мором в 1900 г., базируется не на каком-либо одном факторе  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  или  $\tau$ , а на двух  $\sigma$  и  $\tau$ , а потому она более совершенна, чем предыдущие три. Экспериментальная проверка показала, что полученный на основе четвертой гипотезы критерий перехода от ис-

следуемого напряженного состояния к эквивалентному, справедлив как для пластичных, так и для хрупких материалов и дает наилучшие результаты, если  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Эквивалентное напряжение по четвертой теории:

$$\sigma_{red}^{IV} = \sigma_1 - k\sigma_3,$$

где для хрупких материалов  $k = \frac{\sigma_{adm,t}}{\sigma_{adm,c}}$  - коэффициент, равный отношению

допускаемых напряжений при одноосном растяжении и сжатии. При  $k=1$  эта формула определения  $\sigma_{red}$  тождественна с формулой (1) третьей теории прочности.

**Пятая гипотеза** прочности иначе называется *гипотезой энергии формоизменения*, и критерий перехода от исследуемого напряженного состояния к эквивалентному состоянию основан на том, что предельное напряженное состояние возникает при некотором значении потенциальной энергии, накапливаемой элементом конструкции при изменении только его формы. Согласно этой гипотезе,

$$\sigma_{red}^V = \sqrt{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (2)$$

Экспериментальная проверка пятой гипотезы показала, что она справедлива только для пластичных материалов, у которых  $\sigma_{y,t} = \sigma_{y,c}$ , но критерий перехода здесь точнее, чем у третьей гипотезы.

### **Расчет вала на изгиб с кручением**

Наиболее характерным случаем нагружения тел, имеющих ось вращения, является изгиб с кручением (в этом случае валы нагружены силами и моментами в разных плоскостях). Примером могут служить валы редукторов, коробок скоростей и т.п.

При этом в поперечных сечениях действуют нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения. Выразив эквивалентное напряжение через  $\sigma$  и  $\tau$ , действующие в поперечном сечении (а не через главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ), из формулы (1) можно получить **формулу эквивалентного напряжения по третьей теории прочности при совместном действии изгиба и кручения:**

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (3)$$

где  $\sigma = \frac{M_{tot}}{W_x}$  - нормальные напряжения изгиба;

$M_{tot} = \sqrt{(M_B)^2 + (M_T)^2}$  - суммарный изгибающий момент в опасном сечении вала;

$W_x$  - осевой момент сопротивления поперечного сечения (или момент сопротивления изгибу) для круга  $W_x \approx 0,1d^3$ ;

$\tau = \frac{T}{W_p}$  - касательные напряжения кручения;  $T$  - крутящий момент;

$W_p$  - полярный момент сопротивления поперечного сечения (или момент сопротивления кручению), для круга:  $W_p \approx 0,2d^3$ .

Таким образом, геометрическая характеристика прочности при кручении в два раза больше геометрической характеристики прочности при изгибе:  $W_p = 2W_x$ .

В формулу (3) подставим значения  $\sigma$  и  $\tau$ , получим:

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\frac{M_{tot}^2}{W_x^2} + 4\left(\frac{T}{2W_x}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{tot}^2 + T^2}{W_x^2}} = \frac{M_{red}^{III}}{W_x},$$

где  $M_{red}^{III} = \sqrt{M_{tot}^2 + T^2} = \sqrt{(M_B)^2 + (M_T)^2 + T^2}$  - эквивалентный момент в опасном сечении вала. Тогда условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{red}^{III} = \frac{M_{red}^{III}}{W_x} \leq \sigma_{adm}.$$

Выразив эквивалентное напряжение через  $\sigma$  и  $\tau$ , действующие в поперечном сечении (а не через главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ), из формулы (2) можно получить **формулу эквивалентного напряжения по пятой теории прочности при совместном действии изгиба и кручения:**

$$\sigma_{red}^V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (4)$$

Подставив в формулу (4) значения  $\sigma$  и  $\tau$ , получим:

$$\sigma_{red}^V = \sqrt{\frac{M_{tot}^2}{W_x^2} + 3\left(\frac{T}{2W_x}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{tot}^2 + 0,75T^2}{W_x^2}} = \frac{M_{red}^V}{W_x},$$

где  $M_{red}^V = \sqrt{M_{tot}^2 + 0,75T^2} = \sqrt{(M_B)^2 + (M_T)^2 + 0,75T^2}$  - эквивалентный момент в опасном сечении вала.

Тогда условие прочности по пятой теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{red}^V = \frac{M_{red}^V}{W_x} \leq \sigma_{adm}.$$

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## РАЗДЕЛ 3 ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ.

### 3.1 Основные понятия кинематики

**Кинематика** – часть теоретической механики, которая занимается изучением законов механического движения твердых тел без учета действующих сил.

Под **механическим движением** понимают перемещение тел в пространстве, совершаемое во времени.

О наличии движения и его характере можно судить **по изменению положения** данного тела по отношению к некоторой **системе координат**, которую чаще всего связывают **с Землей как системой отсчета**.

Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то движение называют **абсолютным**.

**Относительным** называют движение тела по отношению к подвижной системе отсчета.

В мире все находится в непрерывном движении, поэтому все движения являются относительными, но условно можно считать абсолютным движение относительно системы отсчета, связанной с Землей.

Известно, что при изучении некоторых случаев движения можно пренебречь размерами и формой тела, рассматривая его как **материальную точку**. Так, например, при поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому такое тело можно рассматривать как материальную точку, в которой сосредоточена вся масса тела.

В случае, когда все точки тела движутся по-разному, например, при вращении твердое тело рассматривают как неизменную систему точек. Поэтому кинематика делится на две части: **кинематику точки** и **кинематику твердого тела**.

Движение тела является известным, если известно, как изменяется его положение в пространстве относительно выбранной системы координатных осей с течением времени.

Положение тела (точки) в пространстве в данный момент времени определяется его координатами (рисунок 3.1), т. е. расстояниями от этих осей:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Для измерения **расстояний** в системе СИ принята основная единица – **метр (м)** и производные - мм, см, км.

Для измерения **времени** принята основная единица - **секунда (с)** и производные - мин, час (ч).

Причем в кинематике различают:

1) **Момент времени  $t$**  – число секунд, определяющее данное мгновение от некоторого, условно принятого начального момента (начала движения).

2) **Промежуток времени** - разность между более поздним и ранним

моментом времени. Например, автомобиль в некоторый момент времени  $t_1$  находился в пункте  $A$ , а позже, в момент  $t_2$ , переместился в пункт  $B$ . Перемещение автомобиля из пункта  $A$  в пункт  $B$  произошло за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

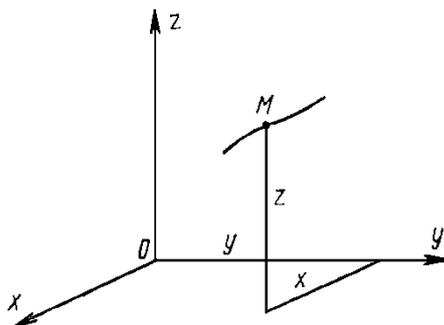


Рисунок 3.1 – Положение тела в пространстве

Воображаемую линию, описываемую определенной точкой движущегося тела, называют **траекторией движения**. В зависимости от формы траектории движение может быть **криволинейным** или **прямолинейным**.

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 3.2 Кинематика точки

Движение точки можно задать двумя способами:

1) **Координатный способ.** Этот способ основан на том, что положение любой точки  $M$  в пространстве определяется тремя координатами относительно выбранной неподвижной системы трех взаимно перпендикулярных осей (рисунок 3.1). При движении точки ее координаты являются функциями от времени, т.е.  $x = f_1(t)$ ;  $y = f_2(t)$ ;  $z = f_3(t)$ .

Данные уравнения называют **уравнениями криволинейного движения точки в прямоугольных координатах.**

Если точка движется все время в одной плоскости, то уравнений будет только два:  $x = f_1(t)$ ;  $y = f_2(t)$ .

Если же точка совершает прямолинейное движение, то направив одну из осей, например ось  $x$ , по направлению движения точки, получим одно уравнение  $x = f(t)$ , которое полностью определит это движение точки.

Задавшись системой координат и зная уравнения движения, можно определить положение движущейся точки в любой момент времени.

2) **Естественный способ.** Этот способ основан на том, что положение точки  $M$  на траектории (рисунок 3.2) определяется длиной дуги траектории  $S = \cup OM$ . Каждому положению точки  $M$  соответствует свое значение  $S$ , т.е.  $S = f(t)$ . Данное уравнение выражает функциональную зависимость между расстоянием  $S$  точки от начала отсчета и временем движения и является **уравнением движения** (законом движения) точки по данной траектории.

Расстояние  $S$ , пройденное точкой от начала отсчета  $O$ , может быть положительным либо отрицательным в зависимости от направления движения точки. Таким образом, движение точки задано, если известны ее траектория и закон движения по этой траектории.

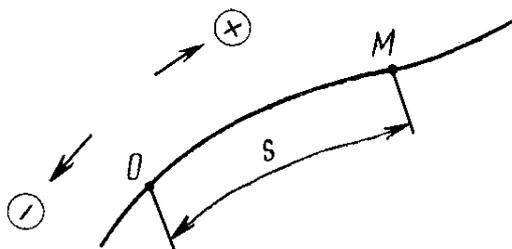


Рисунок 3.2 – Естественный способ задания движения

Следует различать два понятия: **расстояние** и **путь**, пройденный точкой. Если расстояние может быть как положительным, так и отрицательным, то путь, пройденный точкой, всегда является величиной положительной.

Действительно, пусть в некоторый момент времени  $t_1$ , точка находится на траектории в положении  $M_0$  (рисунок 3.3) на расстоянии  $S_0$  от начала отсчета  $O$ . Двигаясь слева направо, точка в момент времени  $t_2$  оказалась в положении  $M_1$ . Путь, пройденный точкой, равен  $S = S_1 - S_0$ .

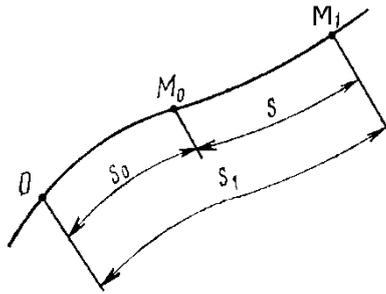


Рисунок 3.3 –Траектория точки

Таким образом, *путь равен разности между конечным и начальным для рассматриваемого промежутка времени расстояниями.*

Очевидно, что при  $S_0 = 0$   $S = S_1$  т. е. *путь совпадает с расстоянием, если положение точки в начале рассматриваемого промежутка времени совпадало с принятым началом отсчета.*

При изучении кинематики точки ограничимся только естественным способом задания движения.

Величину, характеризующую быстроту и направление движения тела по траектории с течением времени, называют *скоростью движения*. Скорость  $\bar{V}$  – величина векторная. За единицу модуля скорости принимают *м/с, км/ч.*

Если модуль и направление вектора скорости не изменяются с течением времени, то движение будет *равномерным и прямолинейным.*

В общем случае, если модуль и направление вектора скорости с течением времени изменяются, то движение является *неравномерным и криволинейным.*

Возможны и другие частные случаи движения, при которых переменны либо модуль, либо направление вектора скорости.

Быстроту изменения модуля и направления скорости по времени называют *ускорением движения.*

Ускорение  $\bar{a}$ , как и скорость, является векторной величиной. Единицей измерения ускорения является  $\text{м/с}^2$ .

### **Равномерное движение точки.**

Рассмотрим сначала равномерное движение точки  $M$  по траектории. Пусть в начале движения точка была в начале отсчета  $O$  и за  $t$  секунд прошла расстояние (путь)  $S$  (рисунок 3.4). Равномерным движением называется такое движение, при котором отношение пройденного пути ко времени движения есть величина постоянная, т. е.  $S/t = \text{const}$ .

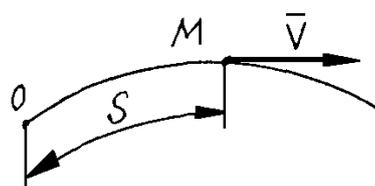


Рисунок 3.4 – Равномерное движение точки

Это отношение называют *скоростью равномерного движения точки*.  
 Модуль вектора скорости равен:

$$V = S/t. \quad (1)$$

**Вектор скорости  $\vec{V}$  направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.**

Из выражения (1) определим расстояние:  $S = V \cdot t$  и время  $t = S/V$  - **данные уравнения являются основными формулами равномерного движения.**

Если в начале рассматриваемого промежутка времени точка находилась не в начале отсчета, а на некотором расстоянии  $S_0$  от него, то формула для определения расстояния примет вид:  $S = S_0 + V \cdot t$ , где  $S_0$  - начальное расстояние;  $S$  - расстояние точки  $M$  от начала отсчета.

### Неравномерное движение точки.

При неравномерном движении скорость точки непрерывно изменяется с течением времени, т. е.  $V = f(t)$ .

Пусть точка, закон движения которой задан функцией  $S = f(t)$  движется из положения  $M_0$  (рисунок 5) в положение  $M_1$  неравномерно в течение промежутка времени  $\Delta t = t_1 - t_0$ . Тогда отношение:  $\frac{S_1 - S_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = V_m$  представляет собой *среднюю скорость движения за данный промежуток времени*.

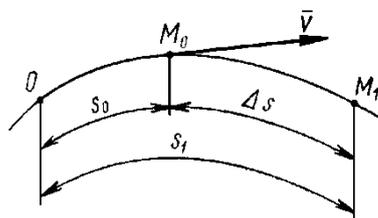


Рисунок 3.5 – Неравномерное движение точки

Но средняя скорость не дает представления о быстроте движения в каждый момент времени. Поэтому кроме средней приходится определять *мгновенную скорость*, или *скорость в данный момент*.

Чем меньше промежуток времени  $\Delta t$ , тем ближе средняя скорость приближается к мгновенной. В пределе, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , средняя скорость примет значение истинной скорости в данный момент времени:  $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$ , т.е. **модуль мгновенной скорости равен первой производной от пути по времени.**

**Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории движения в данной точке и направлен в сторону движения.**

В частном случае, если траектория движения представляет собой прямую линию, вектор скорости направлен вдоль этой прямой в сторону движе-

ния. Модуль мгновенной скорости в этом случае определяется также.

Векторную величину, характеризующую быстроту изменения модуля и направления скорости, называют *ускорением* точки.

### Ускорение точки, совершающей прямолинейное движение.

Пусть в данный момент времени  $t_1$  точка имеет скорость  $\bar{V}_1$ , а через  $\Delta t$  с, т. е. в момент  $t_2 = t_1 + \Delta t$  скорость ее будет  $\bar{V}_2$ .

Изменение модуля скорости за данный промежуток времени составит  $\Delta V = V_2 - V_1$ .

Отношение изменения модуля скорости ко времени, в течение которого это изменение произошло, называют средним ускорением:  $a_m = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

При неограниченном уменьшении промежутка времени ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) среднее ускорение будет приближаться к пределу, который представляет собой *истинное (мгновенное) ускорение* точки:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2},$$

т.е. *модуль ускорения точки при прямолинейном движении равен первой производной от скорости по времени и второй производной от пути по времени.*

*Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора изменения скорости  $\Delta V$ , т. е. при ускоренном движении совпадает с направлением движения, а при замедленном — противоположно ему.*

### Ускорение точки, совершающей движение по криволинейной траектории.

Пусть за время  $\Delta t$  точка переместится из положения  $M_1$  (рисунок 3.6) в положение  $M_2$  и скорость ее при этом изменится от  $\bar{V}_1$  до  $\bar{V}_2$  (как по величине, так и по направлению). Геометрическую разность скоростей найдем, построив векторы скоростей из одной точки  $M_1$  и параллелограмма  $M_1KCE$ . Очевидно, что вектор  $\bar{M}_1E = \Delta \bar{V} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$  является геометрической разностью скоростей.

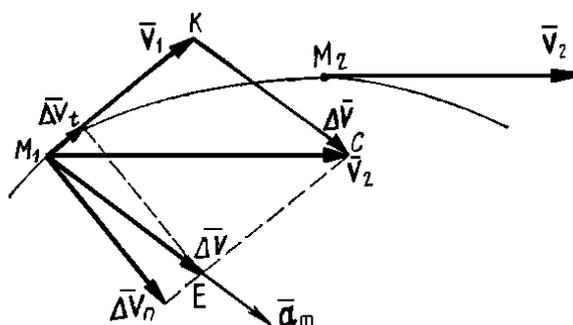


Рисунок 3.6 – Ускорение точки по криволинейной траектории

Поделив вектор изменения скорости  $\Delta\vec{V}$  на промежуток времени  $\Delta t$ , получим вектор среднего ускорения  $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ .

Если предположить, что промежуток времени  $\Delta t$  безгранично мал, то можно считать, что вектор  $\vec{a}_m$  совпадет с вектором мгновенного ускорения  $\vec{a}$ . Важно отметить, **что в данном случае направление ускорения не совпадает с направлением вектора скорости точки, как в случае прямолинейного ускоренного движения, а совпадает с направлением вектора изменения скорости  $\Delta\vec{V}$ .**

Разложим вектор  $\Delta\vec{V}$  на две составляющие, одну из которых  $\Delta\vec{V}_t$ , направим по скорости  $\vec{V}_1$ , т. е. по касательной к траектории в точке  $M_1$ , а другую  $\Delta\vec{V}_n$  перпендикулярно к скорости  $\vec{V}_1$ , т. е. по нормали к траектории в данной точке.

Очевидно, что  $\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_t + \Delta\vec{V}_n$ . Поделив каждый член данного уравнения на промежуток времени  $\Delta t$ , получим выражение  $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}_t}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{V}_n}{\Delta t}$ , которое согласно определению среднего ускорения можно записать так:  $\vec{a}_m = \vec{a}_{mt} + \vec{a}_{mn}$ , т.е. вектор среднего ускорения также можно представить в виде двух составляющих.

При неограниченном уменьшении промежутка времени  $\Delta t$  в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$ , эти составляющие среднего ускорения стремятся к соответствующим составляющим мгновенного ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (2)$$

Составляющая  $\vec{a}_t$ , направленная по касательной к траектории в данный момент времени, называется *касательным ускорением*. Оно характеризует изменение только модуля скорости.

Модуль касательного ускорения равен первой производной от скорости по времени:  $a_t = \frac{dV}{dt}$ .

Составляющая  $\vec{a}_n$ , направленная по нормали к траектории в данный момент времени, называется *нормальным ускорением*. Оно характеризует изменение направления скорости точки и всегда направлено внутрь вогнутости к траектории к центру кривизны, поэтому его иногда называют *центростремительным ускорением*.

Модуль вектора нормального ускорения равен отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории:  $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ .

**Полное ускорение точки в каждый момент времени является геометрической суммой касательного и нормального ускорений  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ .**

На рисунках показаны направления полного, нормального и касательного ускорения в случаях *ускоренного* (рисунок 3.7) и *замедленного* (рисунок 3.8) движения. Нетрудно установить соотношения между величинами ускорений:

$$a_t = a \cdot \cos \alpha ; \quad a_n = a \cdot \sin \alpha ; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} .$$

Криволинейное неравномерное движение точки, при котором полное ускорение представляет собой геометрическую сумму касательного и нормального ускорений, является *общим случаем движения*.

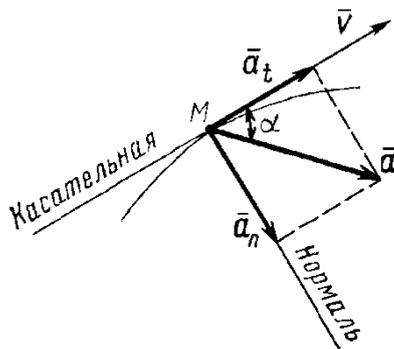


Рисунок 3.7 – Ускоренное движение

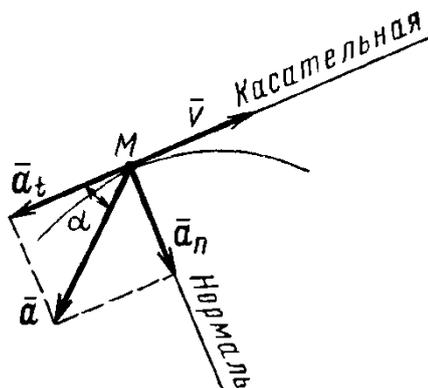


Рисунок 3.8 – Замедленное движение

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) *Прямолинейное неравномерное движение*. Радиус кривизны прямой  $\rho = \infty$ , значит  $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$ , тогда полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_t^2 + 0} = a_t = \frac{dV}{dt}$$

2) *Криволинейное равномерное движение*. В этом случае модуль скорости  $V = const$ , значит  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ , тогда полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{0 + a_n^2} = a_n = \frac{V^2}{\rho} .$$

При равномерном движении по кривой точка всегда обладает лишь нормальным ускорением. Например, при равномерном движении точки по

окружности.

**3) Прямолинейное равномерное движение.** В этом случае  $\rho = \infty$  и  $V = const$ , тогда  $a_n = \frac{V^2}{\infty} = 0$ ;  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$  и полное ускорение  $a = 0$ .

**4) Равномерно-переменное движение (или равнопеременное)** - движение, при котором остается все время постоянным модуль касательного ускорения ( $a_t = const$ ). Оно может быть равномерно ускоренным либо равномерно замедленным; криволинейным, если  $a_n \neq 0$  и прямолинейным, если  $a_n = 0$ .

При равнопеременном движении формулы для определения

<b>скорости</b>	$V = V_0 + a_t \cdot t$	
<b>расстояния (пути)</b>	$S = V_0 t + \frac{a_t \cdot t^2}{2};$	$S = \frac{V^2 - V_0^2}{2a_t}$
<b>средней скорости</b>	$V_m = \frac{V_0 + V}{2} = \frac{S}{t},$	
<b>касательного ускорения</b>	$a_t = \frac{V - V_0}{t},$	

где  $V_0$  - начальная скорость точки при  $t_0 = 0$ ;  $V$  - скорость точки в момент времени  $t$ .

Если при  $V_0 > 0$  ускорение  $a_t > 0$  - движение **равномерно ускоренное**, если при  $V_0 > 0$  ускорение  $a_t < 0$ , то движение является **равномерно замедленным**.

Если точка совершает криволинейное движение, то она имеет нормальное ускорение  $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ . Тогда модуль полного ускорения  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ .

Если точка движется прямолинейно, то  $a_n = 0$ , а полное ускорение  $a = a_t$ .

Частным случаем равномерно-переменного движения является свободное падение тела. Тело, свободно падающее на Землю либо подброшенное вертикально вверх, движется прямолинейно с постоянным ускорением  $a = g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 3.3 Простейшие движения твердого тела.

**Поступательным** называют такое движение твердого тела, когда все его точки двигаются по траекториям одинаковой формы и в каждый данный момент времени имеют скорости и ускорения, равные по модулю и направлению.

При поступательном движении любая прямая, соединяющая две точки тела, перемещается параллельно самой себе (рисунок 3.9).

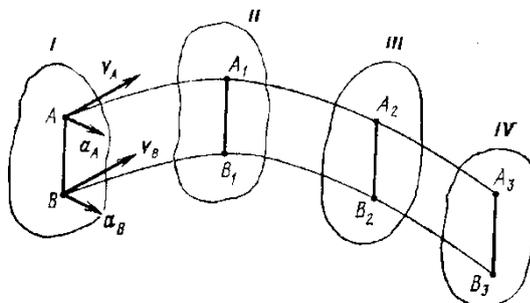


Рисунок 3.9– Поступательное движение

Примером поступательного движения является движение поршня в цилиндре, движение кабины лифта и т. д.

В зависимости от формы траектории поступательное движение может быть **прямолинейным** или **криволинейным**.

Если все точки движутся одинаково, то изучение поступательного движения сводится к изучению движения произвольной точки тела. Чаще всего в качестве этой точки выбирают **центр тяжести тела**.

#### **Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси.**

**Вращательным** называют движение тела, при котором не менее двух каких-либо его точек остаются неподвижными.

Прямая, проходящая через две неподвижные точки, называется **осью вращения**. Каждая точка тела, не лежащая на оси вращения, описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, а центр лежит на этой оси (рисунок 3.10).

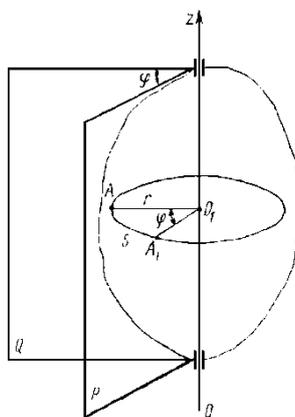


Рисунок 3.10 – Вращательное движение

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $OZ$  (рисунок 10). Проведем через ось вращения неподвижную плоскость  $Q$  и плоскость  $P$ , жестко связанную с телом. При вращении тела угол  $\varphi$  между плоскостями будет непрерывно меняться с течением времени. Его называют **углом поворота (или угловым перемещением)** тела и измеряют в радианах.

Зависимость угла поворота от времени описывается уравнением  $\varphi = f(t)$ , которое называют **законом вращательного движения**.

Быстроту и направление вращения можно охарактеризовать с помощью угловой скорости  $\omega$ . Модуль угловой скорости определяют как быстроту изменения функции  $\varphi = f(t)$ , т. е. **как первую производную от угла поворота по времени**:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ рад/с или } \text{с}^{-1}.$$

В общем случае при неравномерном вращении угловая скорость изменяется с течением времени, т. е.  $\omega = f(t)$ .

Характеристикой быстроты изменения скорости (т. е. функции  $\omega = f(t)$ ) является **угловое ускорение**, равное первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \text{ рад/с}^2 \text{ или } \text{с}^{-2}.$$

Если знаки  $\omega$  и  $\varepsilon$  одинаковы, то имеет место ускоренное вращение, если различны - замедленное вращение.

Мы рассмотрели общий случай вращательного движения твердого тела – **неравномерное вращение** вокруг неподвижной оси.

#### **Частные случаи вращательного движения:**

1) Если модуль угловой скорости при вращении тела постоянен ( $\omega = \text{const}$ ), то имеет место **равномерное вращение**. Угловую скорость равномерного вращения находят как отношение угла поворота за некоторый промежуток времени к этому промежутку, т. е.  $\omega = \frac{\varphi}{t}$ , откуда  $\varphi = \omega \cdot t$  - уравнение называемое **законом равномерного вращения**.

Иногда удобно угловую скорость равномерного вращения выразить через число  $n$  оборотов, совершаемых в одну минуту.

Число оборотов в минуту называют **частотой вращения**.

За один оборот тело поворачивается на  $2\pi$  радиан, а за  $n$  оборотов на  $\varphi = 2\pi n$  радиан. В одной минуте 60 с, поэтому

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ или } \omega = \frac{\pi n}{30}, \text{ отсюда } n = \frac{30\omega}{\pi}, \text{ об/мин или мин}^{-1}.$$

2) Если при вращении угловое ускорение остается без изменения ( $\varepsilon = \text{const}$ ), то имеет место **равномерно-переменное (или равнопеременное) вращение**.

Формулы для определения угла поворота и угловой скорости при равномерно-переменном вращательном движении аналогичны формулам при равномерно-переменном движении точки, только вместо величин  $S$ ,  $V$ ,  $V_0$ ,  $a_t$  нужно подставить величины  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\varepsilon$ . В результате получим:

**Формулы для определения при равномерно-переменном**

движении	вращении
$V = V_0 + a_t \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$
$S = V_0 t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$

Причем, если  $\omega_0 > 0$  и  $\varepsilon > 0$ , то *вращение равномерно ускоренное*, а если  $\omega_0 > 0$ ,  $\varepsilon < 0$  - *вращение равномерно замедленное*.

**Скорость и ускорение точек вращающегося тела.**

При вращении тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Их скорости и ускорения называются *линейными*.

Установим зависимости между угловыми характеристиками вращательного движения тела и линейными характеристиками движения его точек.

Пусть точка  $A$  тела (рисунок 3.11), вращающегося неравномерно, при его повороте на угол  $\varphi$  пройдет расстояние  $S$ , измеряемое дугой  $\cup AA_1$  окружности, радиус которой  $r$ . Из геометрии известна зависимость между длиной дуги окружности, ее радиусом и соответствующим центральным углом, измеренным в радианах:  $S = r\varphi$ .

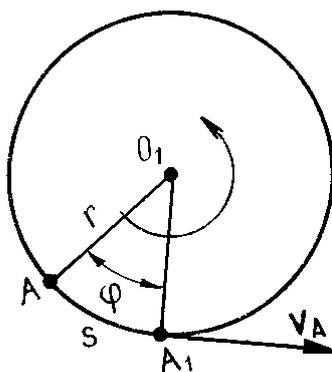


Рисунок 3.11 – Неравномерно вращающееся тело

Мгновенная скорость точки  $A$  направлена по касательной к окружности и ее модуль  $V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$  или  $V = \omega \cdot r$ , т.е. *модуль линейной скорости точки вращающегося тела равен произведению угловой скорости тела на радиус окружности, описываемой точкой*.

Учитывая, что радиус равен половине диаметра окружности, а угловая

скорость тела  $\omega = \frac{\pi n}{30}$ , получим  $V = \frac{\pi d n}{60}$ , м/с, где  $n$  - частота вращения тела, мин<sup>-1</sup>;  $d$  - диаметр окружности, описываемой точкой, м.

**Касательное ускорение точки** равно первой производной от скорости по времени, т. е.  $a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon$  или  $a_t = \varepsilon \cdot r$ , т.е. **модуль касательного ускорения точки вращающегося тела равен произведению углового ускорения тела на радиус окружности, описываемой точкой.**

**Нормальное ускорение точки** равно отношению квадрата скорости к радиусу окружности, следовательно:

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{r^2 \omega^2}{r} = r\omega^2 \text{ или } a_n = \omega^2 r$$

т.е. **модуль нормального ускорения точки вращающегося тела равен произведению квадрата угловой скорости тела на радиус окружности, описываемой точкой.**

**Полное ускорение точки вращающегося тела равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений** (рисунок 3.12):  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ .

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} \text{ или } a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

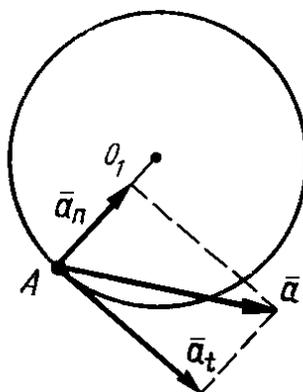


Рисунок 3.12 – Вращающееся тело

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 3.4 Основные понятия и аксиомы динамики

**Динамика** – это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения и взаимодействия материальных тел.

#### **Задачи динамики:**

- 1) по известным законам движения точки или тела определяют силы, выражающее это движение;
- 2) по известным силам, действующим на точку или тело, определяют закон движения.

Динамика делится на динамику точки и динамику твердого тела.

#### **Аксиомы динамики.**

**Аксиома 1 (принцип инерции):** всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

**Аксиома 2 (основной закон динамики):** произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с этой силой:

$$ma = F$$

Здесь сила  $F$  – равнодействующая всех сил  $F_n$ , приложенных к телу:

$$F = \sum F_n$$

**Аксиома 3 (закон равенства действия и противодействия):** две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 3.5 Силы инерции. Метод кинестатики.

Обычно в задачах динамики рассматриваются несвободные тела(точки).

Материальная точка, свобода перемещения которой ограничена связями, называется **несвободной**.

Для несвободной материальной точки все внешние силы необходимо делить на две категории: *активные* (движущие) и *реакции связи* (пассивные).

Если несвободную материальную точку освободит от связей и заменить связи реакциями, то движение точки можно рассматривать как свободное, а основному закону динамики придать такой вид:

$$\sum F_i + \sum R_i = ma,$$

где  $\sum F_i$  – активные силы,  $\sum R_i$  – реакции связи,  $m$  – масса точки,  $a$  – ускорение точки, полученное в результате действия всех внешних сил (активных и пассивных).

#### Сила инерции.

Сила, численно равная произведению массы материальной точки на приобретенное ею ускорение и направленная в сторону противоположную ускорению, называется **силой инерции**, т.е.

$$F_{II} = -ma.$$

**Инертность** — способность сохранять свое состояние неизменным, это внутреннее свойство всех материальных тел.

Сила инерции приложена не к движущемуся телу, а к связи, через которую телу сообщается ускорение.

При рассмотрении криволинейного движения могут возникнуть две составляющие силы инерции: нормальная и касательная

$$a = a_t + a_n;$$

$$a_t = v/t = v'; \quad a_t = \varepsilon r; \quad F_{ин}^t = m\varepsilon r;$$

$$a_n = v^2/r; \quad F_{ин}^n = mv^2/r.$$

При равномерном движении по дуге всегда возникает нормальное ускорение, касательное ускорение равно нулю, поэтому действует только нормальная составляющая силы инерции, направленная по радиусу из центра дуги (рисунок 3.13)

$$\omega = \text{const};$$

$$F_{ин}^n = m \cdot a_n = m \cdot v^2/r = m \cdot \omega^2 \cdot r.$$

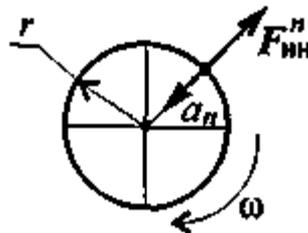


Рисунок 3.13 Равномерное движение тела

## **Принцип кинестатики (принцип Даламбера).**

Принцип кинестатики используют для упрощения решения Ряда технических задач.

Реально силы инерции приложены к телам, связанным с разгоняющимся телом (к связям). Даламбер предложил *условно прикладывать* силу инерции к активно разгоняющемуся телу. Тогда система сил, приложенных к материальной точке, становится уравновешенной, и можно при решении задач динамики использовать уравнения статики.

Принцип Даламбера:

*Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:*

$$\sum F_i + \sum R_i + F_{ин} = 0$$

### ***Порядок решения задач с использованием принципа Даламбера***

1. Составить расчетную схему.
2. Выбрать систему координат.
3. Выяснить направление и величину ускорения.
4. Условно приложить силу инерции.
5. Составить систему уравнений равновесия.
6. Определить неизвестные величины.

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 3.6 Работа и мощность

Все физические тела в окружающем нас мире приводятся в движение с помощью силы. Если на движущееся тело в попутном или противоположном направлении действует сила или несколько сил со стороны одного или нескольких тел, то говорят, что *совершается работа*.

То есть, механическая работу совершает действующая на тело сила. Так, сила тяги электровоза приводит в движение весь поезд, тем самым совершая механическую работу. Велосипед приводится в движение мускульной силой ног велосипедиста. Следовательно, эта сила также совершает механическую работу.

В физике *работой силы* называют физическую величину, равную произведению модуля силы, модуля перемещения точки приложения силы и косинуса угла между векторами силы и перемещения.

$$A = Fscos \alpha,$$

где  $F$  модуль силы,

$s$  – модуль перемещения.

Работа совершается всегда, если угол между векторами силы и перемещения не равен нулю. Если сила действует в направлении, противоположном направлению движения, величина работы имеет отрицательное значение.

Работа не совершается, если на тело не действуют силы, или если угол между приложенной силой и направлением движения равен  $90^\circ$  ( $\cos 90^\circ = 0$ ).

Если лошадь тянет телегу, то мускульная сила лошади, или сила тяги, направленная по ходу движения телеги, совершает работу. А сила тяжести, с которой извозчик давит на телегу, работы не совершает, так как она направлена вниз, перпендикулярно направлению перемещения.

Работа силы – величина скалярная.

Единица работы в системе измерений СИ - *джоуль*. 1 джоуль – это работа, которую совершает сила величиной в 1 ньютон на расстоянии 1 м, если направления силы и перемещения совпадают.

Если на тело или материальную точку действуют несколько сил, то говорят о работе, совершаемой их равнодействующей силой.

#### **Мощность.**

Сила, приводящая в движение тело, совершает механическую работу. Но как совершается эта работа, быстро или медленно, иногда очень важно знать на практике. Ведь одна и та же работа может быть совершена за разное время. Работу, которую выполняет большой электромотор, может выполнить и маленький моторчик. Но ему для этого понадобится гораздо больше времени.

В механике существует величина, характеризующая быстроту выполнения работы. Эта величина называется **мощностью**.

Мощность – это отношение работы, выполненной за определённый промежуток времени, к величине этого промежутка.

$$N = A/\Delta t$$

По определению  $A = F \cdot s \cdot \cos \alpha$ , а  $s/\Delta t = v$ , следовательно

$$N = F \cdot v \cdot \cos \alpha = F \cdot v,$$

где  $F$  – сила,  $v$  скорость,  $\alpha$  – угол между направлением силы и направлением скорости.

То есть **мощность** – это скалярное произведение вектора силы на вектор скорости движения тела.

В международной системе СИ мощность измеряется в ваттах (Вт).

Мощность в 1 ватт – это работа в 1 джоуль (Дж), совершаемая за 1 секунду (с).

Мощность можно увеличить, если увеличить силу, совершающую работу, или скорость, с которой эта работа совершается.

### Закон сохранения механической энергии.

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы тел называется полной механической энергией системы.

$$E = E_p + E_k$$

Учитывая, что при совершении работы  $A = \Delta E_k$  и, одновременно,  $A = -\Delta E_p$ , получим:  $\Delta E_k = -\Delta E_p$  или  $\Delta(E_k + E_p) = 0$  - изменение суммы кинетической и потенциальной энергий (т.е. изменение полной механической энергии) системы равно нулю.

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

Значит, полная энергия системы остается постоянной:

$E = E_p + E_k = \text{const}$ . В замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется. (Или: полная механическая энергия системы тел, взаимодействующих силами упругости и гравитации, остается неизменной при любых взаимодействиях внутри этой системы).

$$E = E_p + E_k = \text{const}$$

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 3.7 Общие теоремы динамики. Основное уравнение динамики вращательного движения

Количеством движения материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль ее скорости

$$q = mV.$$

Так как масса тела является скалярной величиной, то направления вектора количества движения совпадает с направлением скорости движения точки.

$$q = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Импульсом постоянной силы называют векторную величину, модуль которой равен произведению модуля данной силы на время на ее действия, а направление совпадает с направлением силы.

$$L = F\Delta t.$$

Единица измерения  $L = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

Теорема об изменении количества движения точки выражается уравнением

$$F\Delta t = mV_2 - mV_1,$$

где  $V_1$  – начальная скорость точки,  $V_2$  – её конечная скорость,  $m$  – масса тела.

Данную теорему можно сформулировать так: приращение количества движения материальной точки под действием постоянной силы за некоторой промежуток времени, равна импульсу силы за этот же промежуток времени.

Закон количества движения имеет большое практическое применение в механике при решении задач, в которых устанавливается зависимость между массой точки, силой и скоростями в начальный и конечный момент времени.

#### **Потенциальная и кинематическая энергия.**

*Энергией* называется способность тела совершать механическую работу. Различают два вида энергии: потенциальную и кинетическую.

*Потенциальная энергия* связана с относительным положением данного тела и иногда носит название энергии положения. Измеряют её работой, которая совершается при изменении положения тела.

*Кинетическая энергия* – это энергия, которой обладает движущееся тело. Эта энергия измеряется работой, которую движущееся тело может совершить. Например, движущийся поток воды может приводить в движение колесо гидравлической турбины.

Чем больше кинетическая энергия, тем большую работу тело способно совершить. Кинетическая энергия зависит от скорости движения и массы:

$$K = \frac{mV^2}{2},$$

т.е. кинетическая энергия точки равна половине произведения массы точки на квадрат модуля её скорости.

### **Теорема об изменении кинетической энергии.**

Теорема или закон об изменении кинетической энергии для материальной точки, из которого следует, что работа постоянной силы на некотором пути равна приращению кинетической энергии на том же пути выражается уравнением

$$FS = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} S \text{ или } FS = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

### **Закон всемирного тяготения.**

Открыт Ньютоном в 1667 году на основе анализа движения планет (законы Кеплера) и, в частности, Луны. В этом же направлении работали Р.Гук(оспаривал приоритет) и Р.Боскович.

Все тела взаимодействуют друг с другом с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Закон справедлив для:

1. Однородных шаров.
2. Для материальных точек.
3. Для концентрических тел.

Гравитационное взаимодействие существенно при больших массах.

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль по  
разделу 3](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 4 РАЗДЕЛ «ДЕТАЛИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ»

### 4.1 Основные понятия и определения

Раздел «Детали машин» изучает основы и методы расчета и проектирования деталей машин общего назначения, исходя из реальных условий работы.

**Машиной** называется устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов, движения или для накопления и переработки информации с целью повышения производительности труда, а также замены или облегчения физического и умственного труда человека.

Машины делят на:

1) **машины-двигатели** – энергетические машины, предназначенные для преобразования энергии любого вида в энергию исполнительных органов рабочих машин (электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания, паровые машины, турбины и т.п.)

2) **рабочие машины** - для замены и облегчения физического труда человека по изменению формы, свойств, состояния, размера и положения обрабатываемых материалов. Они делятся на:

- **технологические** (металлорежущие станки, прокатные станы, дорожные и сельскохозяйственные машины манипуляторы, промышленные роботы и др.);

- **транспортные** - для перемещения различных грузов (автомобили, тепловозы, самолеты, вертолеты, подъемники, конвейеры и т.п.);

3) **информационные** - для преобразования информации, а также для облегчения и замены логической деятельности человека при выполнении расчетных и контрольных операций и операций управления производственными процессами (счетные и вычислительные машины).

Машину, в которой все преобразования энергии, материалов, информации выполняются без непосредственного участия человека, называют **автоматом**.

**Механизм** – устройство, предназначенное для передачи и преобразования движения. Механизм обязательно входит в состав машины, но может быть и самостоятельной единицей, например, часовой механизм.

**Звено механизма** – одна или несколько жестко соединенных деталей.

Различают входные и выходные звенья.

**Входное** – звено, которому движение сообщается извне.

**Выходное** – звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

В каждой паре совместно работающих звеньев в направлении силового потока различают **ведущие** и **ведомые** звенья.

**Ведомое** – звено, которое получает движение от ведущего звена.

**Кинематическая пара** – соединение двух звеньев, обеспечивающее их относительную подвижность (винт – гайка, зубчатая передача, шарнир и т.п.)

По характеру движения кинематические пары могут быть вращательными, поступательными, винтовыми и т.д.

Соединение кинематических пар называется *кинематической цепью*. Они бывают *замкнутые* (рисунок 4.1, а) и *разомкнутые* (рисунок 4.1, б). 1,2,3,4,5, 6,7 – звенья; О, А, В, С, D, E, F – точки соединения двух звеньев

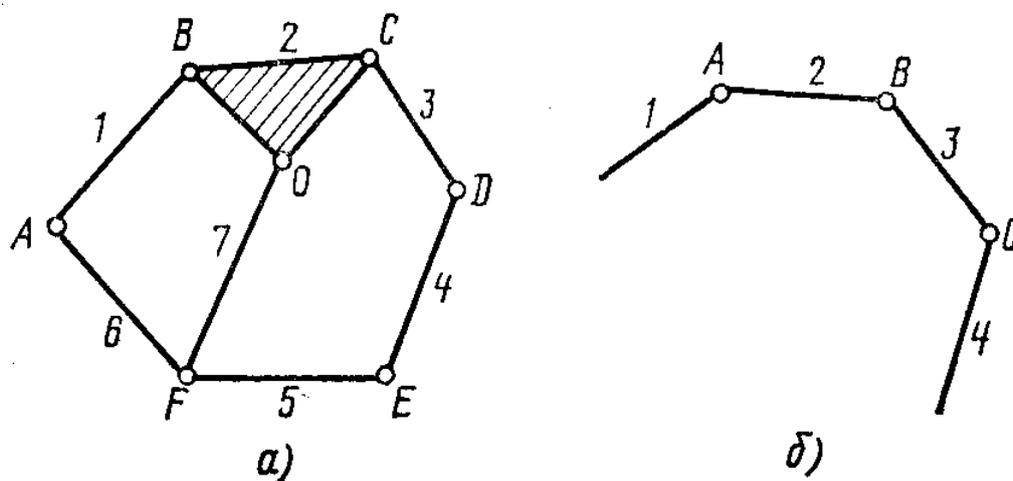


Рисунок 4.1 – Кинематические цепи

Таким образом, механизм состоит из звеньев, соединенных между собой кинематическими парами.

Все машины и механизмы состоят из деталей, сборочных единиц и узлов.

*Деталь* – изделие, изготовленное из однородного по наименованию и марке материала без применения сборочных операций. Детали могут быть *простыми*, например, шпонка, болт, гайка, или *сложными*, например, корпус редуктора, станина станка, коленчатый вал. Детали объединяют в узлы.

*Узел* – законченная сборочная единица, состоящая из ряда деталей, имеющих общее функциональное назначение (подшипник, муфта и т.п.).

*Сборочная единица* – изделие, составные части которого подлежат соединению между собой сборочными операциями (сваркой, склеиванием, соединением винтами, болтами и т.п.).

Детали и узлы делятся:

1) *детали общего назначения* (валы, зубчатые колеса, подшипники, болты, винты и т.д. (их расчет и конструирование изучают в разделе «Детали машин»);

2) *детали специального назначения* (коленчатый вал, ходовой винт, шпиндели станков, канаты и др.).

Все детали и узлы общего назначения делят на:

1) *соединительные детали и соединения* (сварные, резьбовые, шпоночные и др.);

2) *передачи вращательного движения* (ременные, зубчатые, червячные и др.);

3) *механизмы поступательного, колебательного и прерывистого движения* (рычажные, кулачковые, храповые, мальтийские и др.)

4) *детали и узлы, обслуживающие передачи* (валы, подшипники, муфты и др.)

### **Основные требования, предъявляемые к машинам, сборочным единицам и деталям.**

1) *Работоспособность* – состояние изделия, при котором оно способно выполнять заданные функции с параметрами, установленными нормативно-технической документацией. Основные критерии работоспособности:

- *прочность* – способность детали сопротивляться разрушению или возникновению пластичных деформаций под действием приложенных нагрузок. Конструкция будет прочной, если рабочие напряжения, возникающие в деталях, не превышают допустимых. Однако, излишние запасы прочности приводят к громоздкости и удорожанию конструкции.

- *жесткость* – способность деталей сопротивляться упругим деформациям, т.е. изменению их формы и размеров под действием нагрузок. Под жесткостью деталей подразумевают ограничение упругих деформаций в пределах заранее установленных для определенных условий их работы. Чрезмерные упругие деформации могут привести к нарушению правильности работы деталей, отчего они быстро выходят из строя.

- *износостойкость* – сопротивление трущихся деталей изнашиванию. Износ приводит к изменению размеров, формы и состояния трущихся поверхностей, в результате снижается точность работы машин и приборов, падает КПД, увеличиваются динамические нагрузки. Износостойкость определяется правильным выбором материала и смазки, всесторонним учетом особенностей работы трущихся деталей.

- *теплостойкость* – способность конструкции сохранять работоспособность в пределах заданных температур. Для установления температурного состояния изделия при работе производят тепловые расчеты и при необходимости применяют водяное охлаждение, циркуляционную смазку и др.

- *виброустойчивость* – способность конструкции работать в заданном диапазоне режимов без резонансных колебаний. Виброустойчивость как критерий работоспособности характерна для быстроходных машин. Вибрации снижают качество работы машины, вызывают дополнительные переменные напряжения, которые приводят к усталостному разрушению деталей.

2) **Высокая производительность и надежность.** В зависимости от назначения конструкции и условий ее эксплуатации надежность может включать в себя безотказность, долговечность и сохраняемость.

3) **Удобство и безопасность в обслуживании.**

4) **Экономичность** в изготовлении и эксплуатации (небольшие габариты, низкая металлоемкость (масса), низкая энергоемкость).

5) **Технологичность** - обеспечение заданных эксплуатационных показателей при наименьших затратах времени, труда, материалов и средств на создание данной конструкции.

6) **Ремонтпригодность** – приспособленность конструкции к предупреждению, обнаружению и устранению отказов (удобный ремонт, быстрая замена изношенных деталей).

7) **Транспортабельность** – удобство при транспортировке.

8) Соблюдение правил **технической эстетики** (машинам следует придавать красивый вид, сочетающийся с целесообразностью форм).

9) **Удовлетворение требованиям техники безопасности.**

10) Максимальная **взаимозаменяемость**, использование унифицированных и стандартных деталей.

Важнейшей предпосылкой стандартизации и унификации является широкое применение **предпочтительных чисел**, т.е. специально подобранных величин, которыми рекомендуется пользоваться во всех отраслях народного хозяйства. При расчете деталей машин полученные расчетом линейные размеры (диаметры, длины, высоты и др.) необходимо округлять (как правило в большую сторону) до предпочтительных. Стандарт СТ СЭВ 515-77 устанавливает предпочтительные числа и их ряды:

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 4.2 Соединение деталей

Каждая машина получается в результате сборки деталей, осуществляется с помощью подвижных и неподвижных соединений.

**Подвижные соединения** обеспечивают движение одной детали относительно другой (кинематические пары, например, соединение вала с опорами, зубчатое зацепление и др.).

**Неподвижные соединения** жестко скрепляют две или несколько деталей (сварные, резьбовые и т.п)

По признаку разъёмности соединения делят на неразъёмные (заклепочные, сварные, соединения склеиванием, пайкой, запрессовкой, развальцовкой и др.) и разъёмные (резьбовые, шпоночные, шлицевые, штифтовые и др.). Неразъёмные можно разбирать только после их полного или частичного разрушения, разъёмные допускают многократную разборку и сборку без повреждения деталей.

**Заклепочные соединения** (рисунок 4.2) получают установкой заклепок в совмещенные отверстия соединяемых деталей и расклепкой с осаживанием стержня заклепки. Применяют для соединения трудносвариваемых металлов и разнородных материалов, а также в конструкциях, поврежденных действием вибрационных и ударных нагрузок.

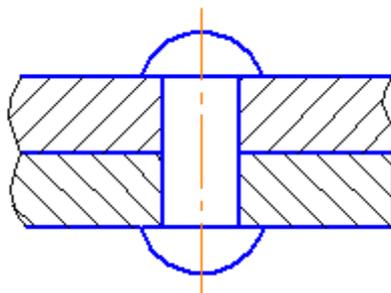


Рисунок 4.2 – Заклепочное соединение

**Сварные соединения** образуются под действие сил молекулярного сцепления, возникающих в результате местного нагрева соединяемых деталей (сварка плавлением) или их совместного пластического деформирования (сварка давлением).

**Достоинствами:** равнопрочность шва и соединяемых деталей; герметичность соединения; технологичность и невысокая стоимость изготовления; малая трудоемкость и возможность автоматизации процесса сварки, простота конструкции сварного шва.

**Недостатки:** недостаточная прочность при переменных и особенно вибрационных и ударных нагрузках; коробление деталей из-за неравномерности нагрева в процессе сварки и охлаждения; опасность появления трещин из-за изменения структуры металла вблизи сварных швов.

Сварные соединения широко используются в машиностроении.

**Виды сварных соединений:** стыковые, нахлесточные, тавровые и угловые (рисунок 4.3).

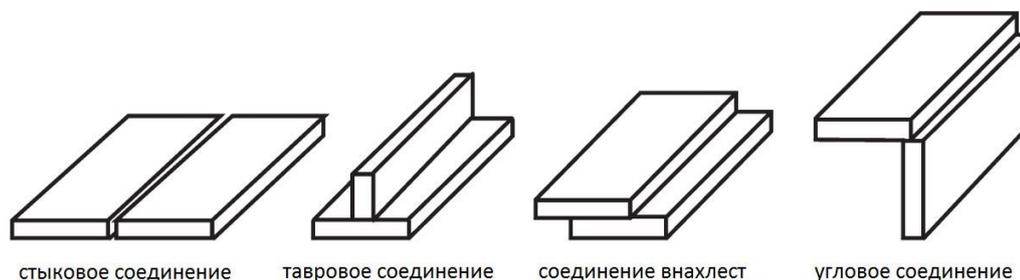


Рисунок 4.3 Сварные соединения

**Клеевые соединения** осуществляются за счет сил сцепления в процессе затвердевания жидкого клея.

**Достоинства:** возможность соединения деталей из разнородных материалов, в том числе и деталей, неподдающихся сварке; герметичность; высокая коррозионная стойкость; хорошее сопротивление усталости.

**Недостатки:** сравнительная низкая прочность и особенно при неравномерном отрыве; низкая теплостойкость; снижение прочности некоторых клеевых соединений с течением времени.

Клеевые соединения применяют в электропромышленности, авиации, станкостроении, мостостроении и т.д.

**Соединения пайкой.** Пайкой называется процесс соединения друг с другом двух или нескольких металлических или покрытых слоем металла неметаллических деталей с использованием расплавляемого промежуточного материала (припоя), температура которого ниже, чем у соединяемых деталей.

Пайку применяют в различных отраслях техники. Современная технология позволяет паять углеродистые, легированные и нержавеющие стали, цветные металлы и сплавы. В машиностроении пайку применяют при изготовлении лопаток и дисков мелких турбин, трубопроводов, радиаторов, сосудов промышленного значения и т.д. В электропромышленности и приборостроении пайку применяют при изготовлении электро- и радиоламп, телевизоров, деталей электромашин и т.д.

**Разъемные соединения.**

**Резьбовые соединения** – самый распространенный вид разъемных соединений, осуществляемый с помощью резьбовых крепежных деталей (винтов, болтов, шпилек, гаек или резьбы, нанесенной непосредственно на соединяемые детали). Основным элементом резьбового соединения является резьба, получаемая прорезанием на поверхности деталей канавок при движении

плоской фигуры — профиля резьбы (треугольника, трапеции и т.п.) по винтовой линии.

Резьбы делят по следующим признакам:

*По форме поверхности*, на которую наносится резьба, — на **цилиндрическую** и **коническую**. Наиболее распространена цилиндрическая. Коническую резьбу обычно применяют для плотных соединений труб, масленок, пробок и т.п.

*По форме профиля* — на **треугольные, трапециевидные, круглые, прямоугольные** и др.

*По направлению винтовой линии* — на **правую** и **левую** резьбу. У правой резьбы винтовая линия поднимается вверх слева направо (рисунок 4.4, а); у левой — в противоположном направлении (рисунок 4.4, б). Винты с правой резьбой ввинчиваются по часовой стрелке, а вывинчиваются против часовой стрелки. Наиболее распространена правая резьба. Левую резьбу применяют в особых случаях (например, в стяжках).

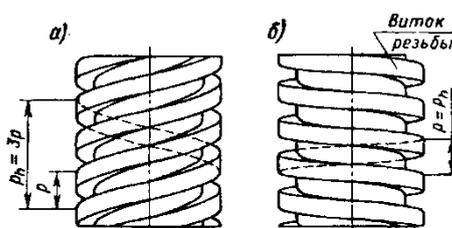


Рисунок 2 – Резьбы правая и левая

Рисунок 4.4 – Резьбы правая и левая

*По числу заходов* — на **однозаходные** и **многозаходные** (двух-, трехзаходные и т.д.). Число заходов больше трех применяют крайне редко.

*По назначению* различают **крепежные, крепежно-уплотнительные** и **ходовые** (для передачи движения). Крепежная резьба должна обладать высокой прочностью и большим трением, предохраняющим соединяемые детали от самоотвинчивания; крепежно-уплотнительная кроме указанных качеств должна обеспечивать повышенную плотность соединения; ходовые винты должны быть с малым трением, чтобы повысить КПД и уменьшить износ.

**Шпоночные и шлицевые соединения** служат для закрепления деталей на валах и осях и для передачи вращающего момента от вала к установленным на нем деталям (зубчатым колесам, шкивам, муфтам и т.д.) или наоборот.

**Шпоночные соединения** (рисунок 4.5) осуществляются с помощью шпонок, которые устанавливаются в пазах вала и ступицы детали. Шпоночные пазы на валах получают фрезерованием, а на ступицах — протягиванием

**Достоинства:** простота разборки и сборки; надежность в эксплуатации; компактность и простота конструкции.

**Недостатки:** ослабление вала и ступицы шпоночными пазами; наличие значительной концентрации напряжений в зоне шпоночного паза, что снижает сопротивление усталости вала; необходимость удлинения ступицы колес; высокие требования к точности выполнения шпоночных пазов; трудность обеспечения взаимозаменяемости, т.е. необходимость ручной пригонки или подбора шпонки по пазу. Шпоночные соединения применяют во всех отраслях машиностроения при малых нагрузках.

Шпоночные соединения делят на: **ненапряженные соединения**, осуществляемые призматическими и сегментными шпонками, которые не вызывают деформации ступицы и вала при сборке, и **напряженные**, осуществляемые клиновыми и тангенциальными шпонками, которые вызывают деформацию вала и ступицы при сборке.

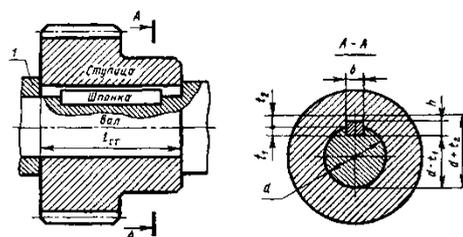


Рисунок 4.5 – Шпоночное соединение

**Шлицевые соединения** (рисунок 4.6) условно можно рассматривать как многошпоночное, у которого шпонки, называемые шлицами (зубьями) выполнены как одно целое с валом и входят в соответствующие пазы ступицы детали. На валу шлицы фрезеруют или нарезают на зубообрабатывающих станках методом обкатки, а пазы в ступицах получают протягиванием.

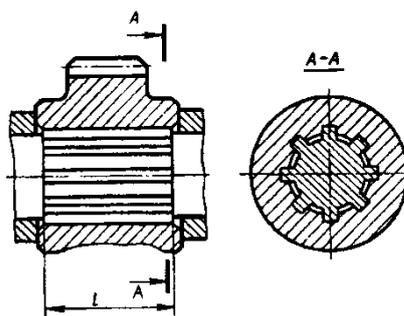


Рисунок 4.6 – Шлицевые соединения

**Достоинства** по сравнению со шпоночными соединениями: возможность передачи больших моментов, высокая надежность при динамических и реверсивных нагрузках и повышенная прочность соединения вследствие увеличения суммарной рабочей поверхности шлицев, а также вследствие уменьшения глубины пазов и равномерного распределения нагрузки по

окружности вала; лучшее направление при осевом перемещении. Все это позволяет использовать шлицевые соединения в высоконагруженных быстроходных машинах (автотракторная промышленность, станкостроение, авиастроение и т.п.). **Недостатки** по сравнению со шпоночными: более сложная технология изготовления и более высокая стоимость.

Шлицевые соединения бывают **неподвижные** для закрепления деталей на валу (рисунок 4.6) и **подвижные**, допускающие перемещение детали вдоль вала (например, у блоков коробки скоростей токарного станка).

По форме профиля различают (рисунок 4.7): прямобочные, (а); эвольвентные (б); треугольные (в).

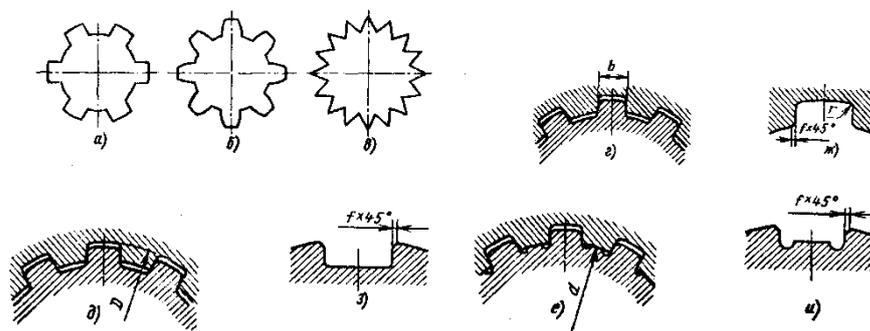


Рисунок 4.7 – Формы профиля и виды центрирования

Прямобочные шлицевые соединения получили наибольшее распространение в машиностроении. Их выполняют с тремя видами центрирования ступицы на валу (рисунок 4.7): по боковым граням (г); по наружному диаметру (д); по внутреннему диаметру (е). При этом впадины имеют различную конфигурацию (см. рисунок 4.7, ж, з, и).

Центрирование по граням способствует более равномерному распределению нагрузки по шлицам, но не обеспечивает точной соосности ступицы и вала, поэтому его применяют при передаче больших моментов, при ударных и реверсивных нагрузках, когда к точности центрирования не предъявляют высоких требований (например, в шлицевых соединениях карданных валов автомобилей). Когда требуется повышенная точность совпадения осей вала и ступицы, используют центрирование по внутреннему или наружному диаметру.

**Штифтовые соединения** осуществляют соединение различных элементов конструкций с помощью специальных деталей — штифтов.

По характеру соединения различают штифты: **соединительные** или **крепежные**, применяемые в разъемных соединениях (рисунок 4.8, ж); **установочные**, используемые для обеспечения точного взаимного положения деталей (рисунок 4.8, з).

По форме исполнения штифты подразделяют на (рисунок 4.8): **цилиндрические гладкие** (а) для соединения деталей, передающих вращающие моменты, и фиксирующие относительное положение деталей; конические (б) для жесткого, безлюфтового соединения деталей с осями и валами, реже для фиксации плоских деталей; пружинные или трубчатые (в) для соединения цилиндрических и плоских деталей, а также деталей из пластмассы, керамики и фарфора; цилиндрические насеченные (г) для соединения цилиндрических и плоских деталей, обработка отверстий под штифт не требует высокой точности; цилиндрические с накаткой (д) для напряженных штифтовых соединений, способных передавать значительные нагрузки; цилиндрические с засверленными концами (е) для неразборных соединений, их называют также заклепочными штифтами, так как после установки в отверстие концы штифта развальцовывают.

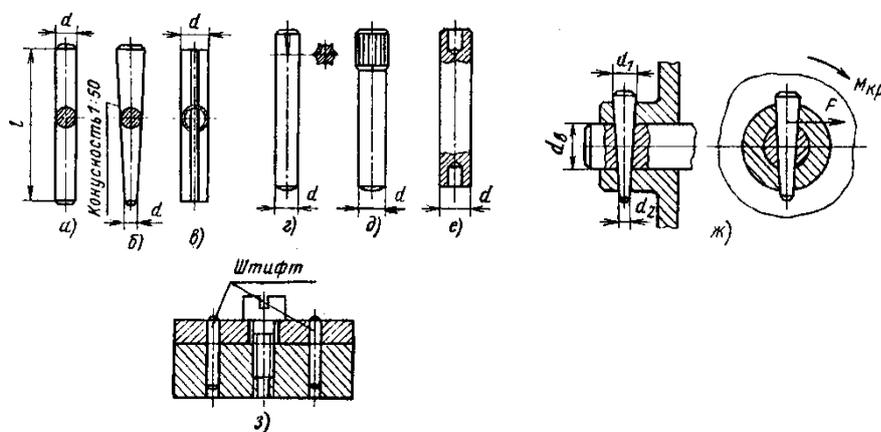


Рисунок 4.8 – Типы штифтов

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

### 4.3 Механизмы поступательного, колебательного и прерывистого движения

#### Рычажные механизмы: шарнирный четырехзвенник и кривошипно-ползунный механизм.

В современных машинах и приборах широкое применение получили рычажные механизмы. Простейшим видом рычажного механизма является **двухзвенный механизм**, состоящий из двух звеньев (рисунок 4.9), подвижного рычага 2, имеющего подвижность вращаться вокруг неподвижной оси, и неподвижного звена 1 (стойки). К двухзвенным механизмам относятся основные и в большинстве случаев единственные механизмы многих ротационных машин: электродвигателей, лопастных турбин и вентиляторов, молотильных барабанов и т.п., так как механизмы всех этих машин состоят из стойки и вращающегося в неподвижных подшипниках звена (ротора).

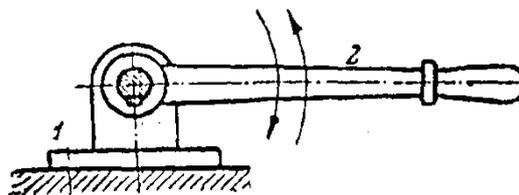


Рисунок 4.9 – Двухзвенный рычажный механизм

Более сложными рычажными механизмами являются механизмы, состоящие из четырех звеньев – **четырёхзвенные механизмы**.

На рисунке 4.10 показан механизм **шарнирного четырехзвенника**, который состоит из трех подвижных звеньев 2, 3, 4 и одного неподвижного звена 1. Все звенья соединены между собой шарнирно и образуют кинематические пары, допускающие только вращательные движения звеньев одного относительно другого (вращательные пары).

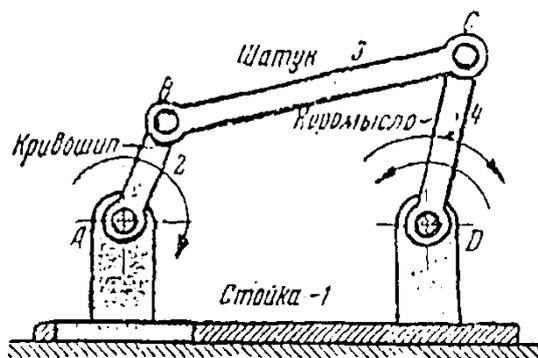


Рисунок 4.10 – Механизм шарнирного четырехзвенника

Если звено, соединенное во вращательную пару со стойкой, может совершать вращение на полный оборот (на  $360^\circ$ ), то такое звено называется **кривошипом**.

Если звено, образующее вращательную пару со стойкой, не может совершать вращения на полный оборот (на  $360^\circ$ ), то такое звено называется **коромыслом**.

Звено, связанное вращательными парами с подвижными звеньями, но не связанное со стойкой, называется **шатун**ом.

Таким образом, в шарнирном четырехзвеннике (см. рисунок 4.11) звено АВ служит кривошипом, звено CD – коромыслом, звено BC – шатуном, звено AD – стойкой. Такой шарнирный четырехзвенник называется кривошипно-коромысловым. Они используются, например, в сельскохозяйственных, строительных, транспортных машинах, в машинах пищевой промышленности

Шарнирный четырехзвенник, у которого оба звена, соединенные в кинематические пары со стойкой, являются кривошипами, т.е. могут поворачиваться на полный оборот (на  $360^\circ$ ), носит название **двухкривошипного шарнирного четырехзвенника**. Такие механизмы широко используются в насосах.

Если в шарнирном четырехзвеннике вместо коромысла установить ползун, движущийся в неподвижных направляющих, получим **четырёхзвенный кривошипно-ползунный механизм** (рисунок 4.11).

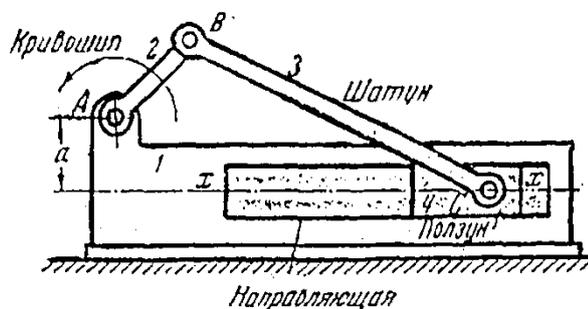


Рисунок 4.11 – Кривошипно-ползунный механизм

Подвижное звено 4, шарнирно соединенное с шатуном BC и скользящее в неподвижных направляющих, принадлежащих стойке, носит название **ползуна**.

Кривошипно-ползунные механизмы широко применяются в поршневых двигателях, компрессорах, прессах, насосах, приборах и т.д. Звено АВ может совершать вращение на полный оборот вокруг точки А и, следовательно, является кривошипом, звено BC – шатун, звено 4 ползун, который движется возвратно-поступательно в неподвижных направляющих.

Если прямая  $x - x$ , вдоль которой движется центр шарнира С проходит через точку А, то такой кривошипно-ползунный механизм носит название **аксиального** или **центрального кривошипно-ползунного механизма**.

Если прямая  $x - x$  не проходит через точку  $A$ , то имеем *дезаксиальный* или *нецентральный кривошипно-ползунный механизм*.

Расстояние  $a$  называется *дезаксиалом*.

Если в четырехзвенном механизме ползун движется в подвижных направляющих, то получается так называемый *четырёхзвенный кулисный механизм* (рисунок 4.12). Ползун 3 движется по направляющей 4, которая вращается вокруг точки  $C$ ; кривошип 2 также вращается на полный оборот вокруг оси  $A$ . Подвижные направляющие 4 называются *кулисами*. Такие механизмы широко используются ротативных насосах, строгальных станках.

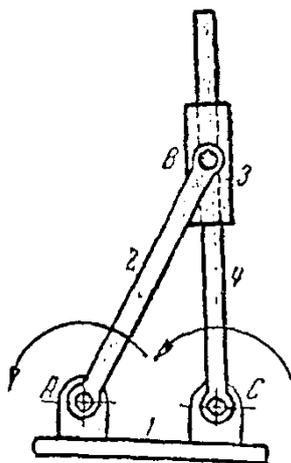


Рисунок 4.12 – Четырёхзвенный кулисный механизм

Главное достоинство шарнирно-рычажных механизмов заключается в их простоте, компактности, легкости изготовления и небольшой стоимости. Недостатком является их ограниченность угловых и линейных перемещений.

**4.3.2 Кулачковые механизмы** – это большая группа трехзвенных механизмов, используемых в приборах и машинах как передаточные устройства, которые могут осуществлять практически любой заданный закон движения исполнительного органа. Например, равномерное вращательное движение кулачка в возвратно-поступательные или качательные движения толкателя.

На рисунке 4.13 показан простейший кулачковый механизм, у которого звено 2, движущееся поступательно относительно стойки 1, называется *кулачком*. Кривая  $\alpha - \alpha$ , по которой очерчен кулачок 2, носит название профиля кулачка. Звено 4 носит название *рычага, штанги* или *толкателя*. Обычно с целью уменьшения потерь на трение рычаг 4 снабжается круглым роликом 3.

У кулачкового механизма, представленного на рисунке 4.14, кулачок 2 вращается вокруг оси А и действует на ролик 3 поступательно движущегося толкателя 4. Если ось  $x-x$  движения толкателя 4 не проходит через ось вращения А кулачка, то имеем **нецентральный кулачковый механизм**, если проходит через точку А – центральный.

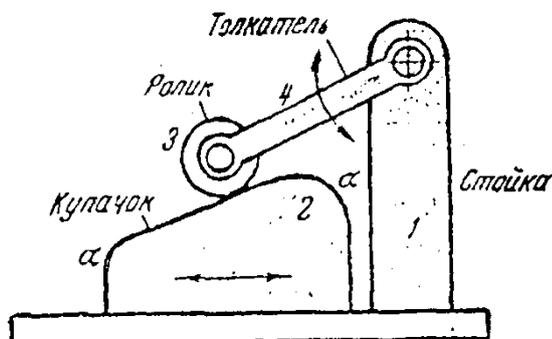


Рисунок 4.13 – Кулачковый механизм с поступательно движущимся кулачком

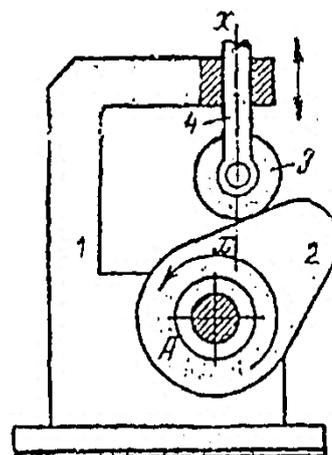


Рисунок 4.14 – Кулачковый механизм с вращающимся кулачком

Кулачковые механизмы просты по конструкции, компактны. Их недостаток – сравнительно быстрый износ соприкасающихся поверхностей (особенно при больших удельных давлениях), достаточно сложный расчет профиля рабочей поверхности кулачка и его изготовление.

**Храповые и мальтийские механизмы** относятся к зубчатым механизмам с прерывистым движением.

**Храповые механизмы** применяют в механизмах завода пружин, в муфтах свободного хода, в шаговых двигателях, в пишущих машинках и.п.д.

На рисунке 4.15 показана схема механизма шарнирного четырехзвенника ABCD, соединенного с храповым колесом 6 посредством собачки 5, сидящей на звене 4. Вращением звена 2 коромысло 4 приводится в колебательное движение. При ходе комысла справа налево собачка упирается в соответствующий зуб храпового колеса 6, поворачивая его на некоторый угол. Для

предупреждения обратного самопроизвольного вращения колеса 6 установлена стопорная собачка 7.

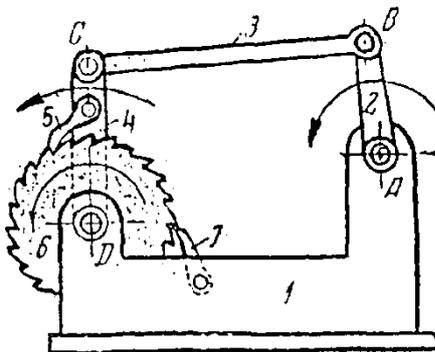


Рисунок 4.15 – Храповый механизм

**Мальтийские механизмы** преобразуют непрерывное вращательное движение ведущего звена в прерывистое вращательное движение ведомого звена с остановками заданной продолжительности. Их применяют в металло-режущих и карусельных станках, киноаппаратуре, отсчетных устройствах, в часовых механизмах.

На рисунке 4.16 показан механизм мальтийского креста, ведущее звено 2 которого несет на себе ролик  $a$ , который последовательно за время каждого полного оборота колеса 2 входит в соответствующий паз  $b$  в звене 3. Таким образом, за один полный оборот звена 2 звено 3 поворачивается на  $90^\circ$ , после чего в соприкосновение приходят дуги  $\alpha-\alpha$  и  $\beta-\beta$ , скользящие друг по другу и предохраняющие звено 3 от самопроизвольного поворота.

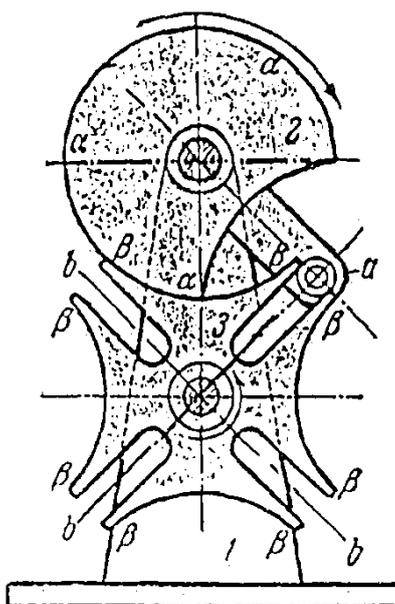


Рисунок 4.16 – Мальтийский механизм

Чаще применяют мальтийский механизм с внешним зацеплением, у которого звенья 2 и 3 вращаются в разных направлениях. Мальтийский механизм с внутренним зацеплением применяют, когда необходимо получить движение ведущих и ведомых звеньев в одном направлении. Число пазов звездочки  $z = 3, 4, 6, 8$  и т.д. Чем больше пазов, тем меньше период движения и больше период простаивания.

<a href="#"><u>НАЗАД</u></a>	<a href="#"><u>Обратная связь</u></a>	<a href="#"><u>ДАЛЕЕ</u></a>
------------------------------	---------------------------------------	------------------------------

#### 4.4 Винтовые механизмы

**Винтовые механизмы** для передачи движения представляют собой передачу винт – гайка и предназначены для преобразования вращательного движения в поступательное. При этом как винт, так и гайка могут иметь либо одно из названных движений, либо оба одновременно.

Примером может служить механизм ходового винта (рисунок 4.17). Вращение винта 1 осуществляется с помощью шестерни 3 и приводит к перемещению гайки 2.

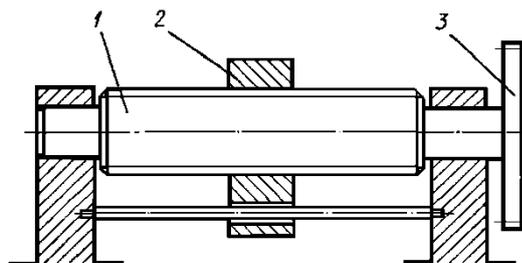


Рисунок 4.17 – Механизм ходового винта

**Достоинства:** большой выигрыш в силе; возможность получения медленного движения с высокой точностью перемещения; компактность при высокой нагрузочной способности; простота конструкции и изготовления.

**Недостатки:** большое трение в резьбе, вызывающее повышенное ее изнашивание, низкий КПД.

Применяют для поднятия грузов (домкраты), создания больших усилий до 1000 кН при малых перемещениях (прессы, нажимные устройства и т.п.) и получения точных перемещений (ходовые винты станков, измерительные приборы, делительные и регулирующие устройства).

Различают: *передачи с трением скольжения* и *передачи с трением качения*.

**Передачи с трением скольжения** имеют наибольшее распространение в виду простоты устройства. Винты делят на грузовые и ходовые. **Грузовые** предназначены для больших усилий (домкраты, прессы). При реверсивном движении под нагрузкой применяют трапецеидальную резьбу, а при больших односторонних нагрузках – упорную. Для получения самотормозящей винтовой пары (домкраты) применяют однозаходные резьбы.

**Ходовые винты** предназначены для получения точных перемещений. Для уменьшения трения они, как правило, имеют трапецеидальную многозаходную резьбу. Для точных винтов делительных и измерительных устройств иногда применяют метрическую резьбу.

Гайки грузовых винтов выполняют цельными. Гайки ходовых винтов (например, гайка ходового винта токарного станка) делают сдвоенными (рисунок 4.18), чтобы устранять зазоры, образовавшиеся при изготовлении и

сборке или в результате износа резьбы. Сдвоенная гайка имеет неподвижную и подвижную части: подвижная (правая) может смещаться в осевом направлении относительно первой, что обеспечивает устранение зазора. Смещения можно достигнуть с помощью пружины (рисунок 4.19) или клина.

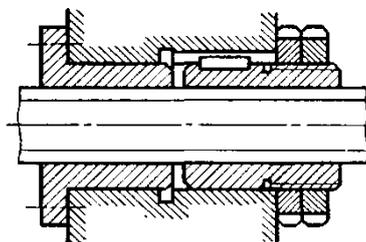


Рисунок 4.18 – Сдвоенная гайка ходового винта токарного станка

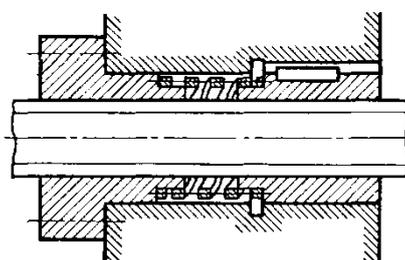


Рисунок 4. 19– Сдвоенная гайка для устранения зазора в резьбе с помощью пружины

**Передачи с трением качения** или *шариковые винтовые механизмы* (рисунок 4.20). В таких механизмах между витками винта и гайки размещают шарики. При вращении винта шарики увлекаются в направлении его поступательного движения, попадают в перепускной канал в гайке и возвращаются в полость между винтом и гайкой. Таким образом, перемещение шариков происходит по замкнутому каналу, соединяющему первый и последний витки резьбы гайки.

**Достоинства** шариковых винтовых механизмов: высокий КПД (до 0,9); возможность полного устранения осевого и радиального зазоров. Их применяют в механизмах подачи станков с числовым программным управлением, механизмах подъема и спуска шасси в самолетах и т.п.

**Коэффициент полезного действия.** В винтовых механизмах следует различать **КПД винтовой пары**  $\eta_{en}$  и **КПД опорных частей механизма**  $\eta_{on}$ .

**КПД винтовой пары**  $\eta_{en}$  отражает потери только в резьбе, которые зависят от профиля резьбы, ее заходности, материала винтовой пары и вида смазки. Определяется по формуле:

$$\eta_{en} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \varphi_0)},$$

где  $\gamma$  - угол подъема резьбы;  $\varphi_0$  - угол трения, зависящий от величины коэффициента трения.

Для самотормозящей винтовой пары  $\eta_{\text{вин}} < 0,5$ . Для повышения КПД применяют многозаходные резьбы (увеличивают  $\gamma$ ), а также антифрикционные материалы, тщательную обработку и смазку трущихся поверхностей (уменьшают коэффициент трения и, следовательно,  $\varphi_0$ ) Коэффициент, учитывающий потери в опорах для ходовых винтов станков  $\eta_{\text{вин}} = 0,9...0,95$ ; для домкратов и прессов  $\eta_{\text{вин}} = 0,5...0,7$ .

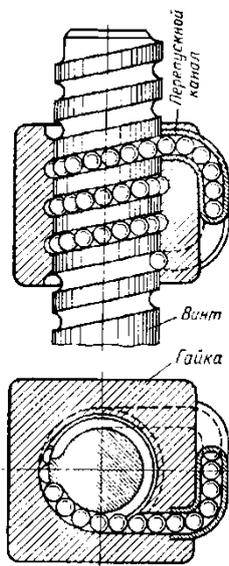


Рисунок 4.20 – Шариковый винтовой механизм

**КПД винтового механизма:**

$$\eta_{\text{вм}} = \eta_{\text{он}} \frac{\text{tg } \gamma}{\text{tg}(\gamma + \varphi_0)},$$

если опорой является упорный шарикоподшипник, то  $\eta_{\text{он}}$  не учитывают.

**Передаточное число** условно можно выразить отношением перемещения маховика или рукоятки к перемещению винта (гайки):

$$u = \frac{2\pi R}{p_h},$$

где  $R$  - радиус маховика или длина рукоятки;  $p_h$  - ход резьбы. При малом ходе резьбы и сравнительно большом  $R$  можно получить очень большое передаточное число, и большой выигрыш в силе.

Наиболее частая причина выхода из строя винтов и гаек – это износ их резьбы. Поэтому основным критерием работоспособности и расчета передачи является **износостойкость**. Расчет на износостойкость выполняют как проверочный. Другими критериями работоспособности являются **прочность** и **устойчивость**. Эти расчеты выполняются как проверочные.

[НАЗАД](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## 4.5 Механизмы передачи вращательного движения

### Общие сведения о механических передачах.

Большинство современных машин создается по схеме двигатель (М) – передача (П) – исполнительный орган (РМ) (рисунок 4.21).



Рисунок 4.21 –Схема двигатель-передача-исполнительный орган

Все двигатели для уменьшения массы габаритов и стоимости выполняют быстроходными, и, как правило, между двигателем и рабочей машиной устанавливают промежуточный механизм – передачу.

**Передачи** – механизмы, служащие для передачи механической энергии на расстояние. При этом, функции передачи энергии, как правило, совмещают с решением следующих задач:

- 1) передача движения от двигателя к рабочей машине;
- 2) повышение (мультипликаторы) или понижение (редукторы) угловых скоростей;
- 3) изменение скорости машины в процессе работы (коробки скоростей);
- 4) преобразование вращательного движения в поступательное движение рабочего органа машины (передачи винт-гайка; шестерня-рейка);
- 5) передача движения мощности на значительное расстояние (ременные передачи до 15 м, цепные до 12 м);
- 6) передача мощности от одного двигателя нескольким валам одновременно (трансмиссионный вал).

### Классификация передач

#### 1 По принципу передачи движения:

- 1.1 Передачи трением (ременные, фрикционные);
- 1.2 Передачи зацеплением (зубчатые, червячные, цепные, винтовые).

#### 2 По относительному положению звеньев:

- 2.1 Непосредственного касания (зубчатые, фрикционные, червячные, винтовые);
- 2.2 По средствам гибкого звена (ременные, цепные).

### Основные кинематические и силовые характеристики для одно- и многоступенчатых передач.

В каждой передаче различают два основных вала ведущий 1 и ведомый 2.

Передача, состоящая из ведущего и ведомого звеньев, т.е из одной пары звеньев называется простой или **одноступенчатой**. Передача, состоящая из нескольких пар звеньев, называется сложной или **многоступенчатой**. Па-

параметры одноступенчатой передачи, относящиеся к ведущему звену, обозначают индексом 1, к ведомому – 2.

### Характеристики передач:

#### 1 Основные:

1.1  $P_1; P_2$ , кВт – мощность на ведущем и ведомом валах.

1.2  $\omega_1; \omega_2$ , с<sup>-1</sup> – угловые скорости на ведущем и ведомых валах или

1.3  $n_1; n_2$ , мин<sup>-1</sup> – частота вращения на ведущем и ведомом валах.

#### 2 Производные:

2.1  $i_{12} = u_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}$  – **передаточное отношение** - отношение угловых

скоростей двух звеньев. «Плюс», если звенья вращаются в одну сторону, «минус» - в разные стороны. Двойной индекс указывает от какого вала к какому определяется передаточное отношение.

Передаточное отношение, вычисленное без учета знака в направлении от ведущего вала к ведомому, называют **передаточным числом**. Обозначают без индексов  $i$  или  $u$ .

Для передач с зацеплением (зубчатых, червячных, цепных):

$i = u = \frac{z_2}{z_1}$  – отношение числа зубьев ведомого к числу зубьев (или заходов)

ведущего звена.

Для передач трением (фрикционных, ременных):

$i = u = \frac{d_2}{d_1}$  - отношение диаметров ведомого и ведущего звеньев.

2.2  $\eta = \frac{P_2}{P_1} < 1$  – **КПД** – отношение мощностей ведомого и ведущего

вала. Мощность на ведомом валу:  $P_2 = P_1 \eta$ .

2.3  $T_1; T_2$ , Н м – **вращающий момент** на ведущем и ведомом валах:

$$T_1 = \frac{P_1}{\omega_1} ; T_2 = \frac{P_2}{\omega_2} .$$

Определим отношение:  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}$ , следовательно,

$T_2 = T_1 \cdot \eta \cdot u$  – зависимость между вращающими моментами на ведомом и ведущем валах. Вращающий момент определяют также по формуле  $T = 10^3 \frac{P}{\omega}$ , Н м, если  $P$  в кВт.

2.4 **Окружная скорость**  $v = \frac{\omega \cdot d \cdot 10^{-3}}{2} = \frac{\pi \cdot d \cdot n \cdot 10^{-3}}{60}$ , м/с, если  $d$  в мм.

2.5 **Окружная сила передачи**  $F_t = \frac{P}{v} = \frac{2T}{d \cdot 10^{-3}}$ , Н, если  $d$  в мм,  $P$  –

мощность, в Вт.

**Для многоступенчатой передачи:**

- 1) **общий КПД:**  $\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ , где  $\eta_1, \eta_2, \eta_n$  – КПД отдельных кинематических пар (зубчатых, ременных и других передач, подшипников и т.п.)
- 2) **общее передаточное число:**  $u = u_1 u_2 \dots u_n$ , где  $u_1, u_2, u_n$  – передаточные числа каждой ступени.

### Фрикционные передачи. Общие сведения

Фрикционная передача относится к передачам трением с непосредственным контактом фрикционных элементов. Передача состоит из двух катков, закрепленных на валах (рисунок 4.22). Подшипники ведомого вала выполнены подвижными, благодаря чему вал может перемещаться в направлении линии центров передачи. Пружина сжатия, действующая на подвижный подшипник, прижимает катки один к другому силой  $F_r$ , нагрузка передается силой трения  $R_f$ , возникающей в месте контакта вращающихся катков.

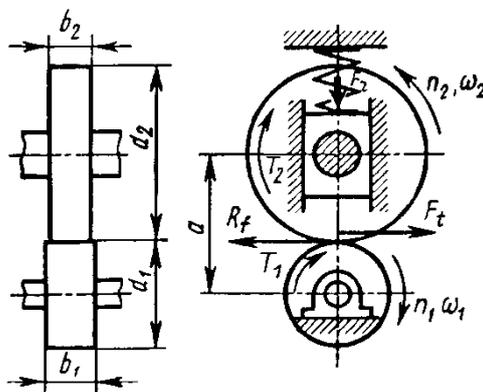


Рисунок 4.22 – Цилиндрическая фрикционная передача

На практике применяют два способа прижатия катков: постоянной силой (например, пружины, собственный вес элементов передачи и т. п.) и переменной силой, которая автоматически изменяется пропорционально изменению передаваемой силы.

**Достоинства:** плавность и бесшумность работы; простота конструкций и эксплуатации; возможность бесступенчатого регулирования передаточного числа; предохраняют механизмы от поломок при перегрузках вследствие скольжения ведущего катка по ведомому.

**Недостатки:** большие нагрузки на валы и подшипники из-за большой силы прижатия катков, что усложняет конструкцию передачи и увеличивают ее размеры; непостоянство передаточного числа из-за неизбежного упругого скольжения катков; повышенный износ катков и др.

Все фрикционные передачи делятся на две группы:

- 1) **передачи нерегулируемые**, т.е. с постоянным передаточным числом

(о постоянном передаточном числе можно говорить только условно, так как из-за неизбежного упругого скольжения оно не остается постоянным. Данные передачи в качестве силовых передач в машиностроении применяют крайне редко (в фрикционных прессах, молотах и т. п.) из-за неконкурентно-способности с зубчатыми передачами по габаритам, надежности, КПД и др. Передаваемая мощность до 20 кВт, допускаемая скорость катков до 25 м/с. Этим передачи нашли ограниченное использование в виде кинематических передач в приборах (магнитофоны, кинокамеры и т. п.), где требуется плавность и бесшумность работы;

2) **передачи регулируемые** (или фрикционные вариаторы) с плавным бесступенчатым регулированием передаточного числа. Фрикционные вариаторы широко применяют как в силовых, так и в кинематических передачах, когда требуется бесступенчатое регулирование передаточного числа

**Основным критерием работоспособности и расчета фрикционных передач с металлическими катками является их контактная прочность, которая зависит от значения контактных напряжений  $\sigma_H$ . Условие прочности**

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q}{\rho_{np}} \cdot \frac{E_{np}}{2\pi(1-\mu^2)}} \leq [\sigma_H].$$

### Ременные передачи. Общие сведения.

Ременная передача относится к передачам трением с гибкой связью. Передача (рисунок 4.23) состоит: из двух шкивов ведущего 1 и ведомого 2, закрепленных на валах, и ремня, надетого на шкивы с предварительным натяжением. Нагрузка передается силами трения, возникающими между шкивами и ремнем. В качестве гибкой связи в передачах применяют плоские (рисунок 4.23), клиновые (рисунок 4.24, а, б), поликлиновые (рисунок 4.24, в) и круглые (рисунок 4.24, г) ремни.

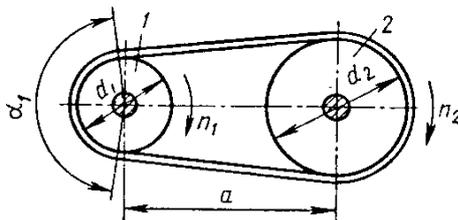


Рисунок 4.23 – Ременная передача

В соответствии с применяемым ремнем передачи подразделяют на плоскоременные, клиноременные, поликлиноременные и круглоременные. В зависимости от скорости ремня передачи могут быть тихоходные ( $v$  до 10 м/с), среднескоростные ( $v$  до 30 м/с), быстроходные ( $v$  до 100 м/с).

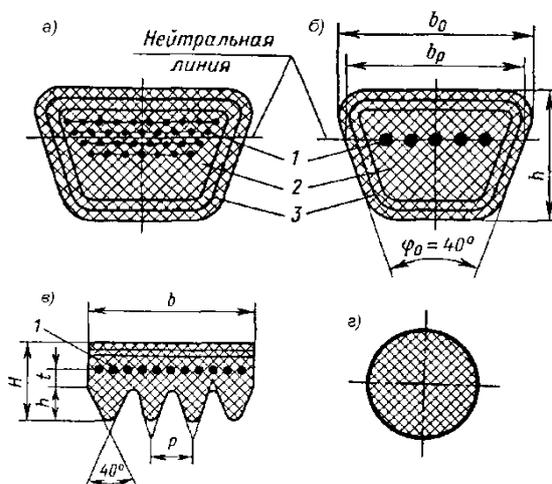


Рисунок 4.24 – Виды ремней

**Достоинства:** плавность и бесшумность работы; простота конструкции и эксплуатации; возможность передачи мощности на большие расстояния (до 15 м); смягчение вибрации, толчков и ударов вследствие упругости ремня; предохранение механизмов от перегрузки вследствие возможного проскальзывания ремня; возможность бесступенчатого регулирования скорости.

**Недостатки:** большие габариты; некоторое непостоянство передаточного числа из-за неизбежного упругого скольжения ремня; повышенные нагрузки на валы и подшипники от натяжения ремня (нагрузка увеличивается в 2...3 раза по сравнению с зубчатой передачей); низкая долговечность ремней (2000...3000 ч).

Применяют во всех отраслях машиностроения и преимущественно в тех случаях, когда по условиям конструкции валы расположены на значительных расстояниях. Передаваемая мощность  $P$  обычно до 50 кВт при скорости ремня  $v = 5...100$  м/с для плоскоременных и  $v = 5...40$  м/с для клино- и поликлиноременных передач. Ограничение мощности и минимальной скорости вызвано большими габаритами передачи. Верхний предел скоростей ограничивается ухудшением условий работы ремней в связи с ростом действующих на них центробежных сил, нагревом, образованием воздушных подушек между ремнем и шкивами и отсюда резким понижением долговечности и КПД передач.

Ременные передачи применяют в основном для быстроходной ступени привода как менее нагруженной, так как в этом случае их важнейший недостаток — большие габариты — оказывает наименьшее влияние на габариты и

массу привода в целом.

**Передачное число.** Окружные скорости шкивов:

$$v_1 = \frac{\pi \cdot n_1 \cdot d_1}{60}; \quad v_2 = \frac{\pi \cdot n_2 \cdot d_2}{60}.$$

При нормальных рабочих нагрузках  $\varepsilon \approx 0,01 \dots 0,02$ . Небольшое значение  $\varepsilon$  позволяет для обычных расчетов принимать  $u \approx \frac{d_2}{d_1}$ .

Основными критериями работоспособности ременных передач являются: **тяговая способность** — надежность сцепления ремня со шкивами и **долговечность ремня**, которая определяется в основном его сопротивлением усталости.

### Цепные передачи. Общие сведения.

Цепная передача относится к передачам зацепления с гибкой связью (цепью). Передача состоит из ведущей 1 и ведомой 2 звездочек и охватывающей их цепи (рисунок 4.25). Цепь в отличие от ремней изгибается только в одной плоскости, поэтому звездочки устанавливают на строго параллельных валах. Принцип зацепления, а не трения устраняет проскальзывание и буксование при работе передачи.

**Достоинства:** возможность передачи мощности на большие расстояния (до 8 м); по сравнению с ременными передачами: могут передавать большие мощности; меньшая нагрузка на валы, так как предварительное натяжение цепи невелико; более компактны, имеют возможность передавать движение одной ведущей звездочки нескольким ведомым с разным направлением вращения.

**Недостатки:** сравнительно быстрый износ шарниров и, как следствие, удлинение цепи, что требует натяжных устройств; необходимость тщательного монтажа и ухода; неравномерность хода; повышенный шум вследствие удара звена цепи при входе в зацепление, особенно при малых числах зубьев звездочек, высокой скорости цепи  $v$  и большом шаге  $p$  (шаг  $p$  - расстояние между осями двух смежных роликов цепи).

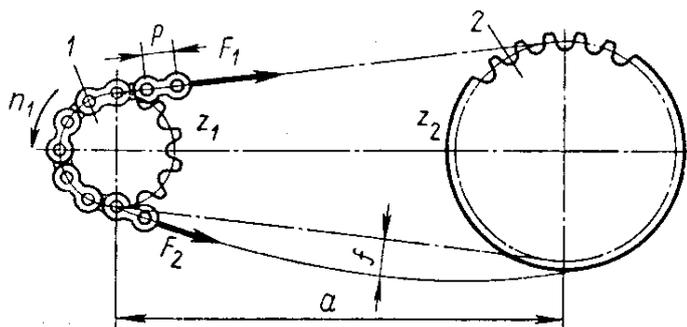


Рисунок 4.25 – Цепная передача

Применяются для передачи движения между параллельными валами, расположенными на значительном расстоянии, когда ременные передачи ненадежны. Их выполняют как понижающими, так и повышающими. В приводах с быстроходными двигателями цепную передачу устанавливают как понижающую, после редуктора.

Наибольшее распространение получили цепные передачи в транспортных средствах (мотопеды, мотоциклы), в транспортирующих машинах (конвейеры, транспортеры и др.), в сельскохозяйственном и химическом машиностроении, а также в подъемно-транспортных устройствах. Передаваемая мощность до 100 кВт (возможно до 3000 кВт) при окружной скорости цепи до 15 м/с. Иногда применяют цепные вариаторы, выполненные по схеме вариаторов с раздвижными коническими дисками.

**Передаточное число** определяют из условия равенства скорости цепи на обеих звездочках, т. е.  $n_1 z_1 p = n_2 z_2 p$  или  $\omega_1 z_1 p = \omega_2 z_2 p$ . Следовательно, передаточное число цепной передачи

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

**Основным критерием работоспособности и расчета цепных передач является долговечность работы цепи на износостойкость шарнирных звеньев цепи.**

### **Червячные передачи Общие сведения.**

Червячная передача предназначена для сообщения вращательного движения валам, оси которых скрещиваются под углом  $90^\circ$ . Движение осуществляется по принципу винтовой пары: винтом является червяк, а червячное колесо представляет собой узкую часть длинной гайки, изогнутой по окружности резьбой наружу. Зубья колеса имеют вогнутую форму, что увеличивает длину контактных линий, а, следовательно, улучшает качество работы передачи.

**Достоинства:** возможность получения больших передаточных чисел при малых габаритах; плавность зацепления и бесшумность работы; возможность получения самоторможения.

**Недостатки:** сравнительно низкий КПД; повышенный износ и нагрев; склонность к заеданию; необходимость применения для венцов червячных колес дорогих антифрикционных материалов.

Применяют в машинах, где по условиям компоновки необходимо передать движение между скрещивающимися валами, а также в делительных механизмах для получения большого передаточного числа. Они имеют широкое распространение в грузоподъемных машинах, станкостроении, авто-

мобилестроении, роботостроении и т. п. Передаваемая мощность не превышает 50...60 кВт. Передача большой мощности невыгодна из-за больших потерь (низкий КПД) и сильного нагрева. Червячные передачи во избежание их перегрева предпочтительно использовать в приводах периодического (а не непрерывного) действия.

**Классификация червячных передач:**

1) по расположению червяка относительно колеса (рисунок 4.26) различают передачи с **нижним** (а), **верхним** (б) и **боковым** (в) червяком. При окружных скоростях червяка  $v \leq 5$  м/с применяют нижний червяк, при  $v > 5$  м/с — верхний червяк. Чаще всего расположение червяка определяется компоновкой изделия.

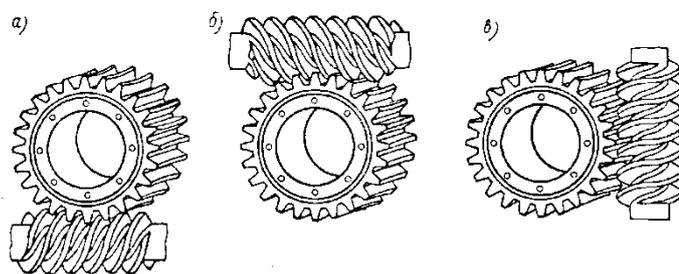


Рисунок 4.26 – Виды червячной передачи

2) по форме поверхности, на которой нарезают витки (рисунок 4.27), червяки делят на **цилиндрические** (а) и **глобоидные** (б). По этому признаку различают и червячные передачи. Глобоидные передачи более надежны и долговечны, имеют в 1,5...2 раза большую нагрузочную способность, но требуют повышенной точности изготовления и монтажа. Применяются реже цилиндрических.

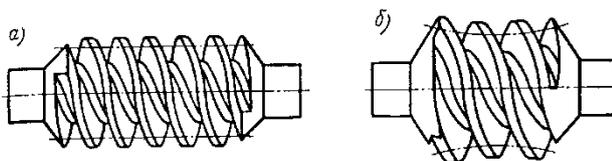


Рисунок 4.27 – Цилиндрический и глобоидный червяки

3) по форме профиля витка цилиндрического червяка передачи бывают с **архимедовыми ZA** (ZA – обозначение червяка согласно ГОСТ19036-81), **эвольвентными ZJ** и **конволютными ZN** червяками, у которых торцовый профиль витка является соответственно: **архимедовой спиралью, эвольвентой окружности и удлиненной эвольвентой**

Червяки выполняют с **левым** и **правым** направлением линии витка, последние имеют преимущественное распространение. Их изготавливают, как правило, за одно целое с валом, что увеличивает жесткость и снижает стои-

мость. В передачах с малыми передаточными числами и большими диаметрами червяков применяют насадные червяки.

**Передаточное число**  $u$  определяют из условия, что за один оборот червяка колесо повернется на число зубьев, равное числу витков червяка  $z_1$ . Для полного оборота колеса необходимо  $\frac{z_2}{z_1}$  оборотов червяка, поэтому

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

**Зубчатые передачи. Классификация, сравнительная оценка. Виды зубчатых колес, их элементы. Материалы для изготовления. Способы изготовления.**

Зубчатые передачи относятся к передачам зацеплением непосредственным контактом пары зубчатых колес. Меньшее из колес передачи принято называть *шестерней*, а большее – *колесом*. Термин «зубчатое колесо» является общим.

**Достоинства:** высокая нагрузочная способность; малые габариты; большая надежность работы; постоянство передаточного числа; высокий КПД (0,92-0,98; для малогабаритных приборов КПД ниже 0,8-0,9); долговечность и надежность в работе; простота в эксплуатации; малые нагрузки на опоры.

**Недостатки:** повышенные требования к точности изготовления и монтажа (использование современных технологий изготовления зубчатых колес: горячая и холодная накатка, точное литье); шум при больших скоростях (заменяя прямозубых передач косозубыми).

Зубчатые колеса – самый распространенный вид механических передач в машиностроении и приборостроении; их применяют для передачи мощности от долей до десятков тысяч кВт при окружных скоростях до 150 м/с и передаточных числах до нескольких сотен.

#### **Классификация зубчатых передач:**

1) по взаимному расположению геометрических осей валов: с параллельными осями – *цилиндрические* (рисунок 4.28, а–г); с пересекающимися осями – *конические* (д, е); со скрещивающимися осями – *цилиндрические винтовые*, их применяют в кинематических цепях приборов (ж), *конические гипоидные*, применяют в автотракторном и текстильном машиностроении (з) и *червячные*; в некоторых механизмах для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот применяют *реечную* передачу, которая является частным случаем цилиндрической зубчатой передачи, рейка представляем собой колесо с бесконечно большим числом зубьев ( $u$ );

2) по расположению центров колес: с внешним зацеплением, когда центры находятся по разные стороны от зоны контакта, в этом случае колеса вращаются в противоположных направлениях (а, б, в); с внутренним зацеплением, когда центры колес расположены по одну сторону от зоны контакта, в этом случае направление вращения колес совпадает (г);

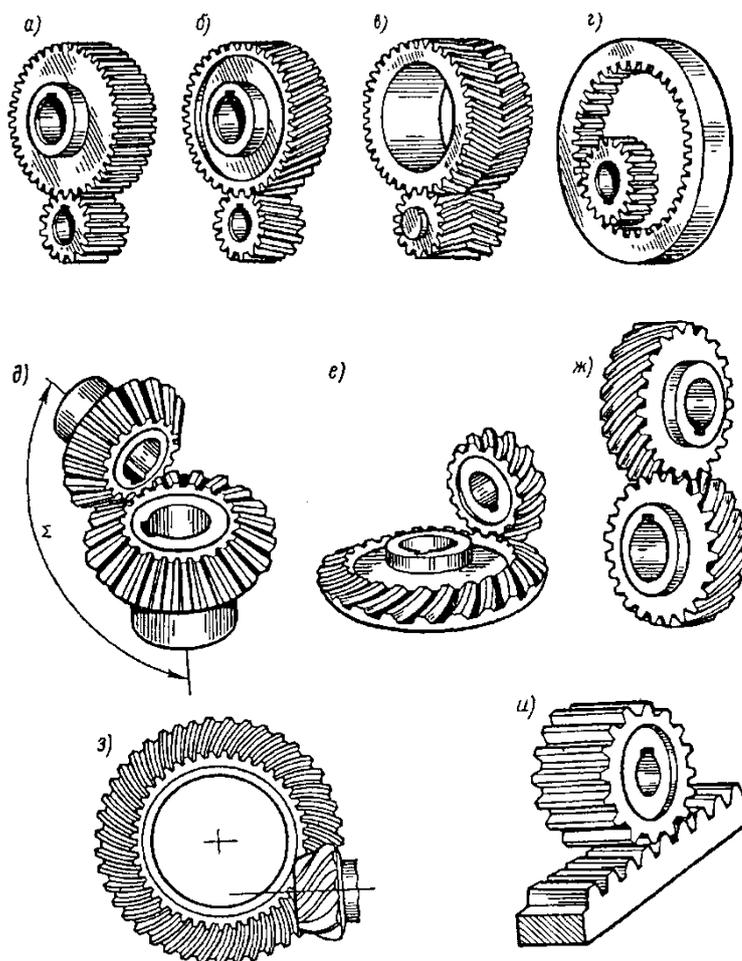


Рисунок 4.28–Классификация зубчатых передач

3) по расположению зубьев на поверхности колес : прямозубые (а, г, д); косообразные (б), шевронные (в) и с круговым зубом (е);

4) по форме профиля зуба (профилем называют кривые, ограничивающие боковые поверхности зубьев в их торцевом сечении): эвольвентные (наиболее распространенные в машиностроении, предложен Л. Эйлером в 1760 г.), цикло-идальные (в машиностроении не применяются, используются в приборах времени, т.к. обеспечивают высокую точность при очень малых габаритах и нагрузках) и с зацеплением Новикова (М.Л. Новиков в 1954 г. предложил принципиально новый профиль зуба – круговой);

5) по окружной скорости: тихоходные ( $v \leq 3$  м/с), среднескоростные ( $v = 3...15$  м/с); скоростные ( $v = 15...40$  м/с); быстроходные ( $v > 40$  м/с);

б) по конструктивному оформлению: открытые (не защищены от влияния внешней среды) и закрытые (изолированные, помещенные в корпуса);

7) по числу пар зацепляющихся колес: одноступенчатые, двухступенчатые и многоступенчатые.

**Эвольвентное зацепление колес** характеризуется следующими основными элементами:

1) *начальные окружности* относятся только к зубчатой передаче. Обозначим отрезки  $O_1П$  и  $O_2П$  (см. рисунок 4.29) через  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  и представим их радиусами окружностей, имеющих постоянное касание в полюсе зацепления

$П$ , тогда согласно основной теореме зацепления:  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$ , откуда получаем

равенство окружных скоростей:  $\omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2}$ . Это значит, что при вращении

зацепленных зубчатых колес окружности радиусов  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  перекатываются одна по другой без скольжения. Эти окружности называют *начальными*. У отдельно взятого колеса начальная окружность не известна до тех пор пока

не известны парное колесо и межцентровое расстояние  $a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2}$ .

2) *делительная окружность* принадлежит отдельно взятому колесу и получается при его зацеплении со стандартной рейкой (рисунок 4.29.). Таким образом, окружность, являющаяся начальной при зацеплении с рейкой, называется *делительной*; ее диаметр обозначают  $d$ . На делительной окружности шаг зубчатого колеса равен шагу рейки, а угол зацепления  $\alpha_w$  - углу профиля рейки

3) *окружность вершин зубьев* – окружность, ограничивающая высоту зубьев; ее диаметр  $d_a$ ;

4) *окружность впадин зубьев* – окружность, ограничивающая глубину впадин; ее диаметр  $d_f$ ;

5) *окружной шаг зубьев*  $p_t$  - расстояние между одноименными профилями соседних зубьев по дуге делительной или любой другой концентрической окружности зубчатого колеса.

б) *окружной модуль зубьев*  $m_t$  - линейная величина в  $\pi$  раз меньше шага, измеренного по делительной окружности:  $m_t = \frac{p_t}{\pi}$ . Для удобства расчетов

и измерения зубчатых колес модуль выражают через делительный диаметр  $d$  и число зубьев колеса  $z$ . Длина делительной окружности может быть определена как произведение окружного шага на число зубьев:  $p_t z$  или как известно из курса математики:  $\pi d$ , т.е.  $p_t z = \pi d$ , откуда  $d = \frac{p_t z}{\pi} = m_t z = m z$ , или

$m = \frac{d}{z}$ , где  $m$  - расчетный модуль цилиндрического колеса

*Модуль* - это часть делительного диаметра, приходящаяся на один зуб. Он является основным параметром зубчатой передачи, определяющим ее размеры. Значения модуля стандартизованы.

7) *высота зуба  $h$*  - расстояние между окружностями вершин и впадин зубьев цилиндрического колеса:  $h = h_a + h_f$ , где  $h_a$  - высота головки;  $h_f$  - высота ножки зуба.

8) *линия зацепления* – траектория общей точки контакта зубьев при ее движении, соответствующая нормали  $mn$  (см. рисунок 4.29).

9) *угол зацепления* – острый угол между линией зацепления и прямой, перпендикулярной межосевой линии.

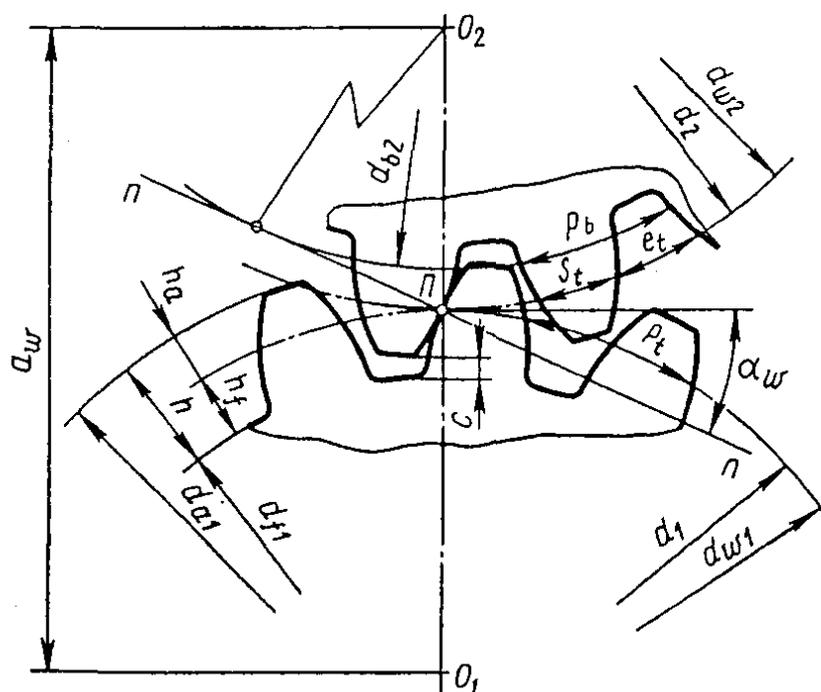


Рисунок 4.29– Зацепление двух эвольвентных колес

### Способы изготовления зубчатых колес.

В зависимости от материала и размеров колес заготовки для них могут быть получены литьем, ковкой или штамповкой. Зубья колес изготавливают накатыванием, нарезанием, реже литьем.

**Накатывание зубьев** – это образование зубьев на специальном прокатном стане в результате пластических деформаций нагретой до температуры 1000...1100 °С заготовки. Деформирование заготовки производится валками, изготовленными в виде зубчатых колес эвольвентного профиля. После накатывания улучшается структура поверхностного слоя металла (создается наклепанный слой), что значительно повышает износостойкость и прочность зубчатых колес. Применяется в массовом производстве для изготовления колес 7 и 8 степени точности с модулем до 5 мм

### **Нарезание зубьев:**

1) *метод копирования* основан на прорезании впадин между зубьями дисковой модульной (рисунок 4.30, *а*) или пальцевой (*б*) фрезами, форма режущих кромок которых соответствует форме впадин зуба колеса. После нарезания впадин заготовку вручную поворачивают на угол  $\frac{360}{z}$ . Непроизводительный и неточный метод, используется в единичном производстве;

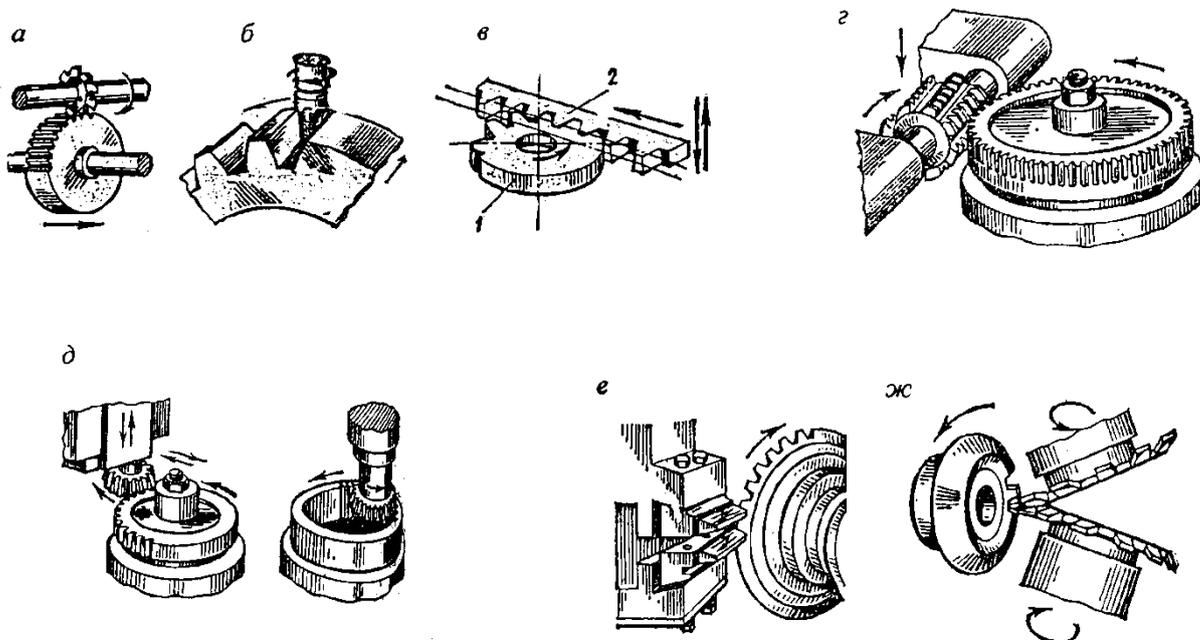


Рисунок 4.30– Способы изготовления зубчатых колес

2) *метод обкатки* основан на воспроизведении зацепления зубчатой пары. Одной из зубчатых деталей является обрабатываемая заготовка, а второй – режущий инструмент, например инструментальная рейка. В процессе нарезания заготовка 1 (рисунок 4.30, *в*) вращается вокруг своей оси, а рейка 2 совершает возвратно-поступательное движение параллельно касательной к заготовке. В качестве режущего инструмента применяют червячные фрезы, имеющие в осевом сечении форму рейки (рисунок 4.30, *з*), зуборезные долбяки (*д*) и др. Этот метод обеспечивает высокую производительность и точность вследствие непрерывности процесса обкатки и является основным при нарезании зубьев. Нарезание зубьев конических колес методом обкатки для колес с прямыми зубьями производится инструментом с прямобочным профилем строганием (рисунок 4.30, *е*) и фрезерованием (*ж*), а для колес с круговым профилем резовыми головками.

**Материал зубчатых** колес выбирают в зависимости от назначения и условий работы передачи:

1) *термически обработанные легированные или углеродистые стали.* Их делят на две группы:

*1-я группа* – колеса с твердостью  $H \leq HB350$ , термообработка – нормализация или улучшение после нарезания зубьев, что обеспечивает высокую точность без отделки зубьев. Колеса хорошо прирабатываются и не подвержены хрупкому разрушению при динамических нагрузках. Недостаток сравнительно невысокая прочность, вследствие чего передачи с такими колесами получаются относительно больших размеров. При выборе материала шестерни и колеса следует ориентироваться на применение одной марки стали, но с различной твердостью, у шестерни она должна быть выше, так как шестерня за один оборот колеса входит в зацепление с ним в передаточное число раз больше и поэтому возможность усталостного разрушения у зубьев шестерни больше. Применяют в низконагруженных передачах и передачах, габариты и масса которых не ограничены.

*2-я группа* – колеса с твердостью зубьев  $H > HB350 (H > HRC35)$ , с термообработкой - объемная закалка, закалка ТВЧ, цементация, азотирование и др. Высокая твердость зубьев позволяет повышать нагрузочную способность передачи по сравнению с 1-й группой до 4 раз. Назерание зубьев производится до термообработки, а отделка – после нее. Колеса плохо прирабатываются, поэтому требуют повышенной точности изготовления. Разность в твердости колеса и шестерни не требуется. Применяются в средне- и высоконагруженных передачах и при повышенных требованиях к габаритам и массе передачи.

2) *чугуны* рекомендуются серые СЧ 20, СЧ 35 и высокопрочные ВЧ 30-2. Они хорошо противостоят усталостному выкрашиванию при плохой смазке, но имеют пониженную прочность при изгибе. Применяют для изготовления крупногабаритных колес тихоходных передач.

3) *пластмассы*, рекомендуют текстолит, капрон, лингофоль и др. Обычно одно из колес зубчатой пары изготавливают из пластмассы. Они обеспечивают бесшумную и плавную работу. Применяются в низконагруженных передачах.

<a href="#">НАЗАД</a>	<a href="#">Самоконтроль</a>	<a href="#">Вопросы к ОКР №2</a>	<a href="#">Обратная связь</a>	<a href="#">ДАЛЕЕ</a>
-----------------------	------------------------------	----------------------------------	--------------------------------	-----------------------

## Тема 4.6 Валы и оси

*Вал* – вращающаяся деталь машины, предназначенная для поддержания установленных на ней зубчатых колес, звездочек, шкивов и т.п. и передачи вращающего момента. При работе вал испытывает изгиб и кручение, а в отдельных случаях дополнительно растяжение и сжатие.

*Ось* – деталь машины, предназначенная только для поддержания установленных на ней деталей. В отличие от вала ось не передает вращающего момента и, следовательно, не испытывает кручения. В машинах оси могут быть *неподвижными*, несущими на себе свободно вращающиеся детали, например, ось блока (рисунок 4.31, *а*) и *подвижными*, вращающимися вместе с установленными на них деталями, например, вагонная ось (*б*).

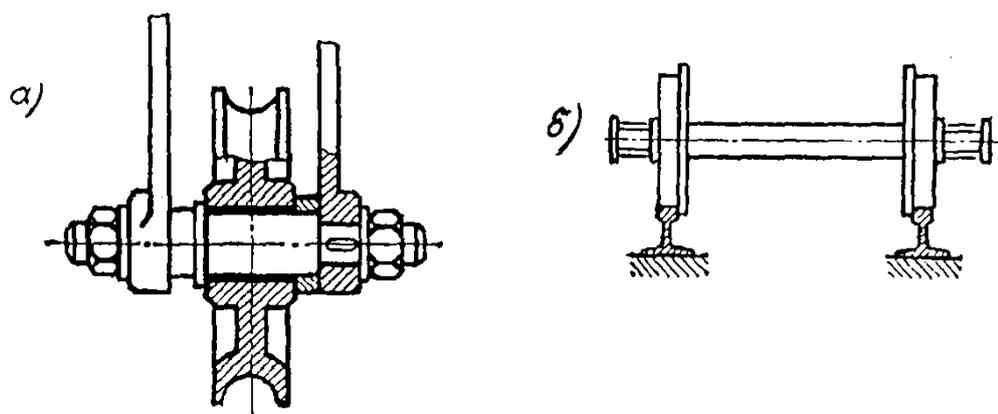


Рисунок 4.31–Подвижная и неподвижная оси

### **Классификация валов и осей:**

1) *по геометрической форме*: прямые, коленчатые и гибкие (коленчатые и гибкие относятся к специальным деталям и нами не рассматриваются);

2) *по конструкции* прямые валы могут быть гладкие и ступенчатые. *Гладкие* – валы одного номинального диаметра по всей длине. Они обеспечивают хорошее центрирование насаживаемых деталей и имеют повышенную прочность и жесткость из-за отсутствия проточек, являющихся концентраторами напряжений; для получения требуемых посадок участки вала отличаются допусками на диаметр и шероховатостью поверхности; для сборки насаживаемых на валы деталей необходимы специальные приспособления. *Ступенчатые* валы (рисунок 4.32) и оси имеют более широкое распространение, так как обеспечивают удобную сборку (разборку) и фиксацию насаживаемых деталей от осевого смещения. Кроме того, уступы на валах воспринимают осевую нагрузку.

3) *по типу сечения*: сплошные и полые, а также валы могут быть шлицевые, валы-шестерни, валы-червяки. Полые валы изготавливают в основном

для уменьшения массы, но из-за сложности изготовления (особенно при длинных валах) применяют редко.

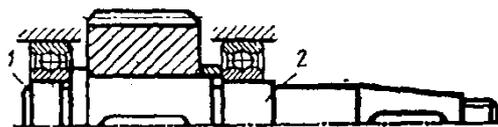


Рисунок 4.32 – Ступенчатый вал

#### **Элементы конструкции.**

**Цапфы** – участки вала или оси, лежащие в опорах (подшипниках). Концевые цапфы называют *шипами* (рисунок 4.32, поз.1), а промежуточные (расположенные в средней части вала) - *шейками* (поз. 2). Шипы и шейки в основном передают радиальную нагрузку. Цапфу, передающую осевую нагрузку называют *пятой*. Они могут быть сплошными и кольцевыми и гребенчатыми.

**Посадочные поверхности** валов и осей под ступицы насаживаемых деталей и подшипников выполняют цилиндрическими. А концы валов – цилиндрическими или коническими. Последние облегчают установку и снятие деталей (муфт и др.) и повышают надежность соединения.

**Переходные участки** между двумя ступенями вала и оси делают для снижения концентрации напряжений, а значит, для повышения сопротивления усталости вала. Их выполняют: с *канавкой со скруглением* (рисунок 4.33, а) для выхода шлифовального круга; с *галтелью постоянного радиуса* (рисунок 4, б), с *галтелью переменного радиуса* (рисунок 4.33, в) и т.п. *Галтелью* называют поверхность плавного перехода от одного диаметра вала к другому.

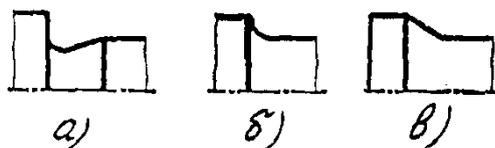


Рисунок 4.33– Переходные участки

Торцы валов и осей для облегчения постановки на них деталей и в целях безопасности делают с *фасками*.

**Материалы** осей и валов должны быть прочными, хорошо обрабатываться и иметь высокий модуль упругости. Прямые валы и оси обычно изготавливают из углеродистых Ст5, Сталь 45 и легированных сталей Сталь 40Х, 40ХН, последние применяют для высоконагруженных валов. Валы из легированных сталей подвергают термообработке. При изготовлении вала-

шестерни материал вала соответствует материалу шестерни. Заготовки валов и осей – круглый прокат или специальные поковки.

**Расчет осей** выполняется по напряжениям изгиба:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm},$$

где  $W_x$  - осевой момент сопротивления:

а) для круга диаметром  $d$  имеем:  $W_x = 0,1d^3$ ;

б) для кольца  $d \times d_0$  имеем:  $W_x = 0,1d^3(1-c^4)$ , где  $c = \frac{d_0}{d}$ ;  $d$  - наружный и

$d_0$  - внутренний диаметры кольца;  $M_{\max}$  - максимальный изгибающий момент оси, взятый с эпюры. Определяется диаметр оси в опасном сечении:

$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,1 \cdot \sigma_{adm}}}$  и округляется до большего стандартного значения. Диаметры

остальных ступеней оси назначаются конструктивно, исходя из условий сборки и монтажа деталей.

**Расчет валов.** При расчете и проектировании валов стремятся обеспечить: 1) прочность, жесткость и долговечность вала путем выбора его формы и необходимых размеров сечения; 2) удобство сборки узла, что в значительной степени определяется конструкцией вала и сопряженных с ним деталей; 3) технологичность конструкции вала и возможную экономию металла.

Расчет валов ведется в три этапа:

1) предварительный (*проектировочный*) расчет. Диаметр выходного конца вала определяется по условию прочности только на кручение без учета изгиба:

$\tau = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{adm}$ , где  $W_p$  - полярный момент сопротивления:

а) для круга диаметром  $d$  имеем:  $W_p = 0,2d^3$ ;

б) для кольца  $d \times d_0$  имеем:  $W_p = 0,2d^3(1-c^4)$ ,  $T$  - крутящий момент в расчетном сечении вала;  $\tau_{adm} = 15...20$  МПа – условное допускаемое напряжение при кручении, его низкие значения компенсируют неучтенные напряжения изгиба. Полученное значение вала округляют до ближайшего большего стандартного размера. По выбранному  $d$  с учетом удобства сборки и фиксации деталей на валу в осевом направлении назначают остальные посадочные размеры вала. Если выходной конец ведущего вала соединяется муфтой с валом электродвигателя диаметром  $d_{ог}$ , то обычно принимают  $d = (1,0...0,8)d_{ог}$ .

2) составляется *расчетная схема вала* по эскизной компоновке, из которой определяются расстояния между опорами и точками приложения сил. Затем определяют реакции в опорах в горизонтальных и вертикальных плоскостях, строятся эпюры изгибающих моментов  $M^B$  и  $M^T$  и крутящего момента  $T$ , находят суммарный момент  $M_{tot}$ . Предположительно устанавливаются опасные сечения, исходя из эпюр моментов, размеров сечения вала и концентратора напряжений.

3) выполняется *проверочный расчет на выносливость* в форме проверки коэффициента запаса прочности для опасных сечений:

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}} \geq s_{adm} = 1,8 \dots 3,$$

где  $s$  - расчетный (действительный) коэффициент в опасном сечении вала;  $s_{adm}$  (или  $[s]$ ) – допускаемый (требуемый) коэффициент запаса прочности;  $s_\sigma$  и  $s_\tau$  - коэффициенты запаса прочности соответственно по нормальным и касательным напряжениям:

$$s_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}, \quad s_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau} \tau_a + \psi_\tau \tau_m},$$

где  $\sigma_{-1}, \tau_{-1}$  – пределы выносливости материала вала при симметричных циклах изгиба и кручения;

$\sigma_a, \tau_a, \sigma_m, \tau_m$  – амплитуды и средние напряжения циклов нормальных и касательных напряжений;

$K_\sigma, K_\tau$  – эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении (определяют по таблицам справочников);

$\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$  – коэффициенты, учитывающие снижение механических свойств металла с ростом размера заготовок (определяют по таблицам справочников);

$\psi_\sigma, \psi_\tau$  – коэффициенты, учитывающие влияние постоянной составляющей цикла на усталость вала (определяют по таблицам справочников).

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## Тема 4.7 Опоры осей и валов (подшипники)

*Направляющие* – устройства, предназначенные для поддержания движущихся деталей и обеспечения определенного вида движения одной детали относительно другой. Направляющие для вращательного движения называют *опорами*.

Опоры поддерживают вращающиеся детали – валы и оси, направляют движение, воспринимают радиальные или осевые нагрузки, возникающие в процессе работы, и при этом обеспечивают строго фиксированное положение вала или оси в радиальном и осевом направлениях.

Понятие «опора» (вращательная кинематическая пара) охватывает два звена – цапфу и подшипник. *Цапфой* называют часть вала или оси, находящуюся в подшипнике и испытывающую при вращении трение. *Подшипником* в простейшем случае является отверстие в корпусе или втулке, охватывающее цапфу и нагруженное поперечными (радиальными) силами.

Опоры могут быть выполнены с трением *скольжения, качения, упругости*, а также на жидкостных или воздушных подушках и на магнитных подвесках. Мы рассмотрим опоры скольжения и качения.

Достоинства *опор скольжения* – незначительные размеры в радиальном направлении, простота устройства изготовления и монтажа, низкая стоимость, возможность использования их в различных конструкциях машин и приборов, долговечность работы, малая чувствительность к ударам и толчкам. В малонагруженных устройствах при незначительных скоростях обеспечивается плавность и бесшумность в работе, поэтому широко используются в приборостроении. К недостаткам следует отнести значительное трение (по сравнению с опорами качения), относительно большую длину цапф, большой расход смазки и необходимость постоянного ухода вследствие высоких требований к смазке и опасности перегрева. Применяют в высокоскоростных машинах (центрифуги, шлифовальные станки и др.), когда долговечность подшипников качения резко сокращается, при работе в химически агрессивных средах, при близко расположенных валах

*Опоры качения* при работе развивают малый момент трения, поэтому имеют более высокий КПД (до 0,995) по сравнению с опорами скольжения и незначительный нагрев, меньшие размеры по длине, меньшую чувствительность к температурным колебаниям и незначительный расход смазочных материалов. Недостатками опор качения являются усложнение их монтажа и демонтажа, относительно большие размеры в радиальном направлении и повышенная чувствительность к ударным и вибрационным нагрузкам, ненадежность при работе в агрессивных средах, неразъемность конструкции, шум при больших оборотах. Применяют во всех отраслях машиностроения и приборостроения. Это самые массовые стандартизованные изделия.

**Конструкции подшипников скольжения** весьма разнообразны, во многом зависят от конструкции машины, в которой устанавливается подшипник. Основные элементы подшипников *корпус* и *вкладыш* (втулка). Часто подшипник не имеет специального корпуса, при этом вкладыш размещают непосредственно в станине или раме машины, например подшипники двигателей, станков, редукторов.

В большинстве случаев подшипники скольжения устанавливают в специальные корпуса, которые бывают двух видов *неразъемные* и *разъемные*. В *неразъемных корпусах* подшипников вкладыш 1 (рисунок 4.34) обычно представляет собой втулку из антифрикционного материала, запрессованную в корпус. Они просты по конструкции и дешевы, но не дают возможности компенсировать износ втулки. Применяют для опор тихоходных валов с небольшой нагрузкой (сельскохозяйственные машины, транспортеры и т.п.).

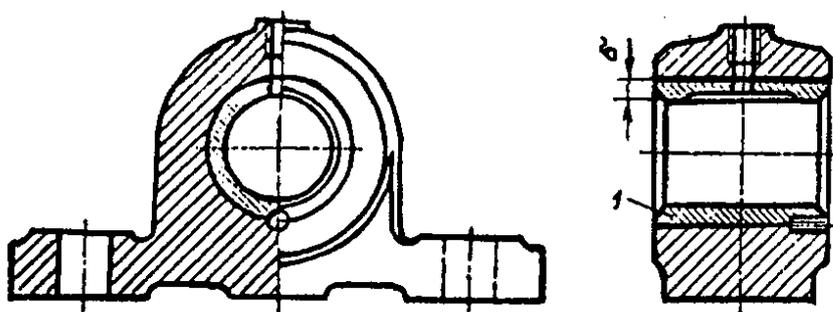


Рисунок 4.34 – Неразъемный подшипник

*Разъемный корпус* (рисунок 4.35) состоит из основания 1 и крышки 4, соединенных винтами, шпильками или болтами. Для повышения точности установки крышек стык ее с корпусом выполняется с уступами. Имеет два вкладыша 2 и 3 (втулка, разрезанная по диаметру), которые устанавливают в корпус и крышку и предохраняют от проворачивания штифтом 5. Такие подшипники широко применяются для опор валов механических передач – ременных, цепных, фрикционных, открытых зубчатых, лебедок, транспортеров и др.

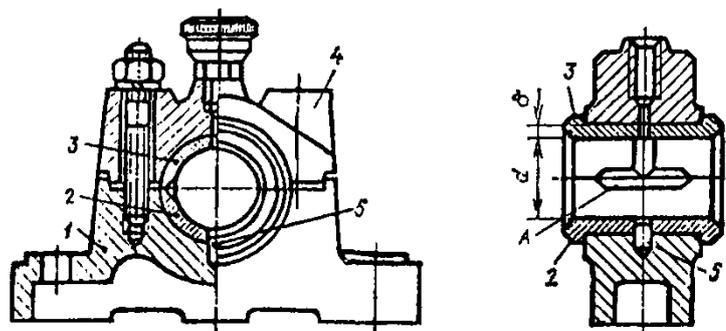


Рисунок 4.35 – Разъемный подшипник

*Встроенные подшипники* устанавливают непосредственно в корпусе машин. Такое устройство характерно для подшипников некоторых редукторов, металлорежущих станков, электрических машин. И др.

*Самоустанавливающиеся подшипники* имеют вкладыш со сферической опорной поверхностью, что позволяет им поворачиваться (самоустанавливаться) для устранения влияния перекосов цапф вала. Применяют при невозможности точной установки валов, например, при монтаже на разных основаниях и при больших упругих деформациях валов.

**Конструкция подшипников качения.** Подшипник качения состоит (рисунок 4.36) из наружного 1 и внутреннего 3 колец с дорожками качения А, тел качения 2 (шариков или роликов) и сепаратора 4, разделяющего и направляющего тела качения. Внутреннее кольцо устанавливают на валу (оси), а наружное - в корпусе. Таким образом, цапфа вала и корпус разобщены телами качения, что позволило заменить трение скольжения трением качения и снизить коэффициент трения. Основные стандартные размеры подшипника:  $d, D$  - внутренний и наружный диаметры;  $B$  - ширина колец.

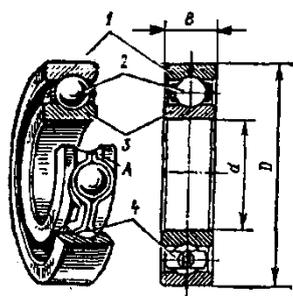


Рисунок 4.36 – Подшипник качения шариковый радиальный

**Классификация:** 1) по направлению действия воспринимаемой нагрузки подшипники качения делятся на: *радиальные, упорные, радиально-упорные и упорно-радиальные*;

2) по форме тел качения (рисунок 4.37): *шариковые (а) и роликовые, причем последние могут быть с роликами: цилиндрическими короткими (б) или длинными (в), коническими (г), бочкообразными (д), игольчатыми (е) и витыми (ж)*;

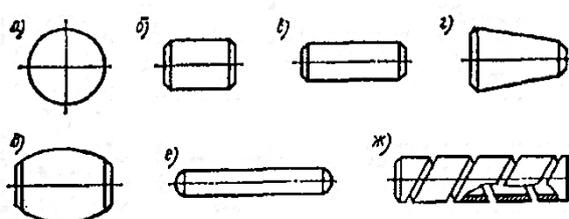


Рисунок 4.37– Тела качения

- 3) по числу рядов тел качения: *одно-, двух-, четырех- и многорядные*;
- 4) по основным конструктивным признакам: *самоустанавливающиеся* (сферические) и *несамоустанавливающиеся*.

В зависимости от нагрузочной способности и габаритных размеров при одном и том же внутреннем диаметре подшипники разделяются на *серии*:

- 1) *по радиальным размерам*: сверхлегкие, особо легкие, легкие, средние и тяжелые;
- 2) *по ширине*: узкие, нормальные, широкие и особо широкие.

Примерное соотношение габаритов различных серий показано на рисунке 4.38. Преимущественное распространение имеют подшипники легкой и средней серии нормальной ширины, как наиболее дешевые.

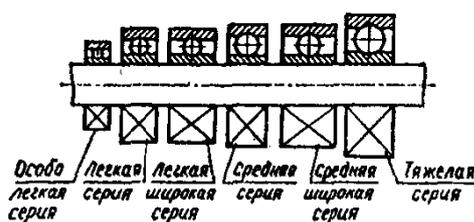


Рисунок 4.38 – Примерное соотношение габаритов подшипников качения различных серий

**Материалы подшипников качения.** Тела качения и кольца изготавливают из высокоуглеродистых хромистых подшипниковых сталей ШХ15, ШХ15СГ и др. с термообработкой до твердости  $HRC60...65$  и последующим шлифованием и полированием. Сепараторы чаще всего штампуют из низкоуглеродистой листовой стали. Для быстроходных подшипников изготавливают массивные сепараторы из бронзы, латуни, текстолита, капрона и т.п.

**Подбор подшипников качения.** При проектировании машин подшипники не конструируют и не рассчитывают, а подбирают из числа стандартных. Не вращающиеся подшипники и вращающиеся с частотой  $n \leq 1 \text{ мин}^{-1}$  (например, домкраты, нажимные устройства) подбирают по статической грузоподъемности  $C_0$ , значения которой в  $H$  приводятся в каталогах.

Подбор подшипников по динамической грузоподъемности  $C$ , выполняют при частоте вращения  $n \geq 10 \text{ мин}^{-1}$  (при  $n = 1...10 \text{ мин}^{-1}$  принимают  $n = 10 \text{ мин}^{-1}$ ).

Под динамической грузоподъемностью для радиальных радиально-упорных подшипников понимают такую радиальную нагрузку, которую может выдержать группа идентичных подшипников в течение 1 млн. оборотов вращающегося внутреннего кольца при неподвижном наружном до появления признаков усталостного разрушения.

Подбор осуществляют по наиболее нагруженному из подшипников, имеющему большую эквивалентную нагрузку  $R_E$ :

1) для радиальных шариковых и радиально-упорных шарико- и роликоподшипников:  $R_E = (XV R_r + Y R_a) K_\sigma K_T$ ;

2) для радиальных подшипников с короткими цилиндрическими роликами, а также для радиальных шариковых и радиально-упорных шарико- и роликоподшипников при отсутствии действия на них осевой нагрузки или малом ее значении:  $R_E = V R_r K_\sigma K_T$ ;

3) для упорных шариковых и роликовых подшипников:  $R_E = V R_a K_\sigma K_T$ , где  $R_r$  - радиальная нагрузка на подшипниках (суммарная радиальная опорная реакция),  $H$ ;  $V$  - коэффициент вращения; при вращении внутреннего кольца  $V = 1,0$ , наружного  $V = 1,2$ ;  $K_\sigma$  - коэффициент безопасности, при спокойной нагрузке  $K_\sigma = 1,0$ , с умеренными толчками  $K_\sigma = 1,3 \dots 1,5$ , при ударной нагрузке  $K_\sigma = 2 \dots 3$ ;  $K_T$  - температурный коэффициент, при рабочей температуре подшипника до  $100^\circ C$   $K_T = 1,0$ ;  $X, Y$  - коэффициенты радиальной и осевой нагрузок;  $R_a$  - осевая нагрузка подшипника, для радиальных шарикоподшипников осевая нагрузка  $R_a$ , равна внешней осевой нагрузке (осевой силе  $F_a$  в зацеплении зубчатой (червячной) передачи), т.е.  $R_a = F_a$ ; для радиально-упорных подшипников  $R_a$  - это результирующие осевые нагрузки на каждый подшипник, которые определяются в зависимости от расположения подшипников с учетом осевых составляющих  $R_s$ , которые определяют по формулам:

а) для конических роликоподшипников:  $R_s = 0,83e R_r$ ;

б) для шарикоподшипников радиально-упорных  $R_{s1} = e R_r$ , где  $e$  - коэффициент влияния осевого нагружения; значения всех коэффициентов и расчетные формулы и схемы нагружения приведены в каталогах.

Расчетную динамическую грузоподъемность  $C_{rp}, H$ , и базовую долговечность  $L_{10h}, ч$ , определяют:

$$C_{rp} = R_E^m \sqrt[5]{573 \omega \frac{L_h}{10^6}} ; L_{10h} = \frac{10^6}{60n} \left( \frac{C_r}{R_E} \right)^m = \frac{10^6}{573 \omega} \left( \frac{C_r}{R_E} \right)^m ,$$

где  $\omega, n$  - угловая скорость в  $c^{-1}$  или частота вращения в  $мин^{-1}$  соответствующего вала;  $m$  - показатель степени:  $m = 3$  для шариковых подшипников,  $m = 3,33$  для роликовых подшипников.

Пригодность подшипников определяется сопоставлением расчетной динамической грузоподъемности  $C_{rp}, H$ , с базовой  $C_r, H$ , или базовой долговечности  $L_{10h}, ч$ , с требуемой  $L_h, ч$ , по условиям:  $C_{rp} \leq C_r$  или  $L_{10h} \geq L_h$ .

[НАЗАД](#)

[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

[ДАЛЕЕ](#)

## Тема 4.8 Муфты

Муфтой называется устройство, соединяющее концы двух валов и передающее вращающий момент с одного вала на другой без изменения его значения и направления. Потребность в соединении валов связана с тем, что большинство машин комплектуют из узлов (сборочных единиц) и механизмов с входными и выходными валами, кинематическая и силовая связь между которыми выполняется с помощью муфт (рисунок 4.39).

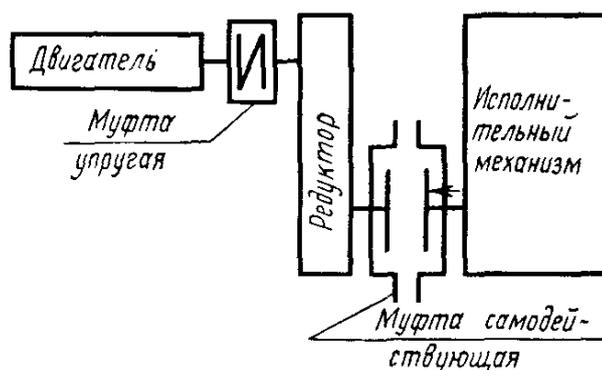


Рисунок 4.39 – Кинематическая и силовая связь

Соединение валов – основное назначение муфты, но, кроме того, муфты обычно выполняют одну или несколько дополнительных функций:

- 1) обеспечивают включение и выключение исполнительного механизма машины при работающем двигателе;
- 2) предохраняют машину от аварий при перегрузках;
- 3) уменьшают динамические нагрузки и дополнительно поглощают вибрации и толчки соединяемых валов и деталей передачи;
- 4) соединяют валы со свободно установленными на них деталями (зубчатые колеса, шкивы ременных передач и др.);
- 5) компенсируют вредное влияние смещения соединяемых валов (несоосность валов).

**Классификация муфт.** В машиностроении применяют большое количество муфт, различающихся по принципу действия и управления, назначению и конструкции, что весьма усложняет их классификацию. Можно рекомендовать классификацию муфт, согласно которой **механические муфты** (электрические и гидравлические муфты изучаются в спецкурсах) приводов подразделяются на четыре класса:

- класс 1** – нерасцепляемые муфты;
- класс 2** – управляемые муфты;
- класс 3** – самодействующие муфты;
- класс 4** – все муфты, не вошедшие в классы 1, 2 и 3, а также специальные, например комбинированные, представляющие сочетание муфт раз-

личных классов.

**Управляемые (сцепные) муфты** служат для быстрого соединения и разъединения валов при работающем двигателе, для этого они снабжены механизмом принудительного управления (ручным или автоматическим). Применяются при строгой соосности валов. По принципу работы делятся на две группы: муфты, основанные на зацеплении (кулачковые и зубчатые), и муфты, основанные на трении (фрикционные).

**Муфта кулачковая сцепная** (рисунок 4.40) состоит из двух полумуфт 1 и 2, на торцах которых имеются кулачки 4. При включении кулачки одной полумуфты входят во впадины другой, создавая жесткое сцепление (на рисунке 11 муфта показана во включенном состоянии). Для включения и выключения муфты полумуфта 1 соединена с валом неподвижно, а полумуфта 2 установлена на валу подвижно в осевом направлении. Подвижную полумуфту перемещают на направляющей шпонке или шлицах с помощью механизма управления муфтой (отводки), вилку которой располагают в пазу 3. На рисунке штриховой линией показано выключенное положение полумуфты 2. Кольцо 5 служит для центровки валов.

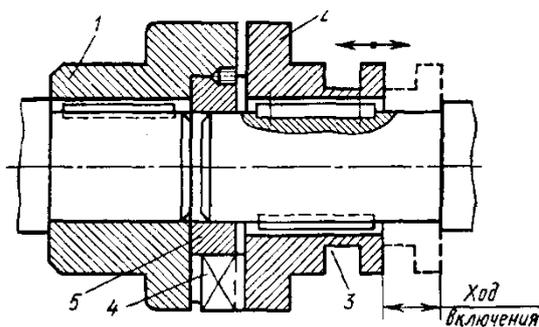


Рисунок 4.40 – Муфта кулачковая сцепная

**Муфта зубчатая сцепная.** Простейшая муфта показана на рисунке 4.41. Полумуфты ее – это зубчатые колеса с зубьями эвольвентного профиля с одинаковым модулем и числом зубьев; одна из полумуфт – с наружными зубьями, другая – с внутренними. Муфта включается механизмом управления при осевом перемещении одной из полумуфт (на рисунке – левой). Вторая полумуфта (правая) соединена с валом неподвижно. Для облегчения включения торцы зубьев закругляют. При частом включении зубчатых и кулачковых муфт (например, в коробках скоростей автомобилей) для устранения или уменьшения ударов и шума широко применяют синхронизаторы, которые выравнивают скорости валов перед их соединениями.

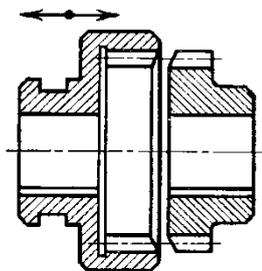


Рисунок 4.41 – Муфта зубчатая сцепная

Самодействующие (самоуправляемые) муфты обеспечивают автоматическое сцепление и расцепление валов при изменении заданного режима работы машины (передаваемого момента, направления вращения или частоты вращения). Применяются при строгой соосности валов. Различают следующие самодействующие муфты: предохранительные, обгонные и центробежные.

[НАЗАД](#)

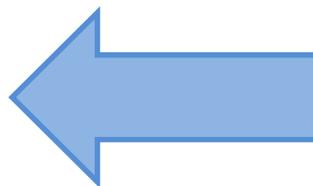
[Самоконтроль](#)

[Обратная связь](#)

## САМОКОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

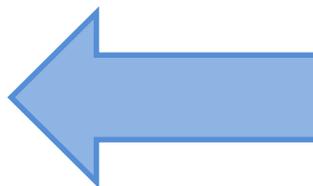
### Вопросы для самоконтроля по теме «Основные понятия и аксиомы статики»

- 1) Что изучает «Статика»?
- 2) Что изучает «Теоретическая механика»?
- 3) Что называется силой и чем она определяется? Графическое изображение силы.
- 4) Материальная точка. Абсолютно твердое тело (дать определения).
- 5) Эквивалентная система сил. Равнодействующая системы сил. Уравновешенная система сил. Уравновешивающая сила (дать определения и привести примеры).
- 6) Сформулировать: Аксиому 1 (принцип инерции). Аксиому 6 (принцип отвердения).
- 7) Сформулировать и графически изобразить: Аксиому 4 (правило сложения двух сил); Правило треугольника.
- 8) Сформулировать и графически изобразить: Аксиому 2 (условие равновесия двух сил); Следствие 1; Аксиому 5 (закон равенства действия и противодействия).
- 10) Сформулировать: Аксиому 3 (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил); Следствие 2 (теорема о равновесии трех сил).
- 11) Связи и их реакции. Свободное и несвободное тело (дать определения).
- 12) Изобразить три случая свободного опирания тела на связь с указанием реакций связей. Сформулировать общее правило определения реакций связей.
- 13) Стержневая связь. Жесткая заделка. Привести примеры с указанием реакций связей. Сформулировать правила определения реакций связей.
- 14) Гибкая связь и шарнирно-подвижная опора. Привести примеры с указанием реакций связей. Сформулировать правила определения реакций связей.
- 15) Шарнирно-неподвижная опора. Привести примеры с указанием реакций связей. Сформулировать правило определения реакций связей.



### Вопросы для самоконтроля по теме «Плоская система сходящихся сил»

- 1) В чем заключается аналитическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил? (Ответ должен содержать уравнения и формулировку условия).
- 2) Как можно определить равнодействующую двух сил, линии действия которых перпендикулярны?
- 3) Что называется проекцией силы и чему она равна? (Ответ должен содержать графическое изображение).
- 4) В чем заключается геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил?
- 5) Является ли уравнение  $\sum F_{ix}=0$  достаточным условием для равновесия плоской системы сходящихся сил?
- 6) Как найти модуль и направление силы, если известны ее проекции на две взаимно перпендикулярные оси координат? (Ответ должен содержать графическое изображение).
- 7) Определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил с помощью силового многоугольника (сформулировать, чему в данном случае равна равнодействующая).
- 8) Как влияет угол между сходящимися силами на модуль их равнодействующей?
- 9) В каких случаях проекция силы на ось равна нулю, и в каких случаях она равна модулю? (Ответ должен содержать графическое изображение).
- 10) Дать определение плоской системы сходящихся сил и привести графический пример.
- 11) Какие условия необходимы для того, чтобы задача разложения силы на две составляющие была определенной?
- 12) Как определяется знак проекции силы на ось? (Ответ должен содержать графическое изображение).



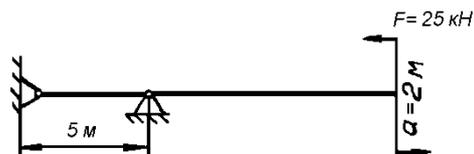
## Вопросы для самоконтроля по теме «Пара сил»

- 1) Что называют моментом силы?
- 2) В каком случае момент силы принято считать положительным? В каком случае момент силы принято считать отрицательным?
- 3) Что называют парой сил?
- 4) Что называют плечом пары? Что называют плечом силы?
- 5) Как можно уравновесить пару сил? Чему равна проекция сил пары на любую ось?
- 6) Чему равен момент равнодействующей пары?

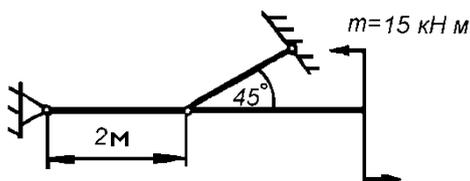
## Примеры задач для самостоятельного решения

Для брусьев, изображенных на рисунке 10, определить реакции опор.

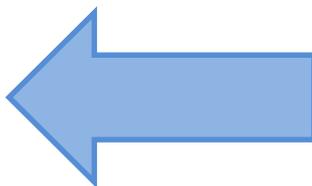
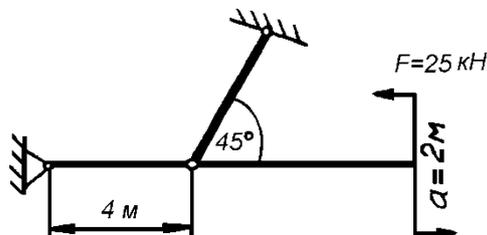
1)



2)

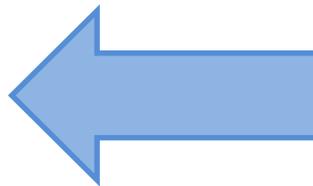


3)



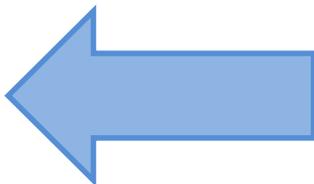
## Вопросы для самоконтроля по теме «ПлСРС»

- 1) Можно ли перенести силу параллельно в любую другую точку тела и что для этого следует сделать?
- 2) Что называют центром приведения?
- 3) Что называется присоединенной парой?
- 4) Что называют главным вектором? Что называют главным моментом?
- 5) Чему равен модуль главного вектора?
- 6) Чему эквивалентна плоская система произвольно расположенных сил?
- 7) Является ли главный вектор плоской системы его равнодействующей?
- 8) Чему равна равнодействующая произвольной плоской системы сил и чем она отличается от главного вектора системы?
- 9) Сколько уравнений равновесия составляют для плоской системы сил? Сформулируйте первую, вторую и третью формы уравнений равновесия.
- 10) Что необходимо и достаточно для равновесия плоской системы параллельных сил? Первая и вторая формы уравнений равновесия.
- 11) Что называется балкой? Какие балки являются статически определенными?
- 12) Что называют сосредоточенной силой?
- 13) Что называют равномерно распределенной нагрузкой? Какими параметрами она задается?
- 14) В каких единицах измеряется интенсивность распределенной нагрузки?
- 15) Сформулировать алгоритм решения задач на определение опорных реакций.



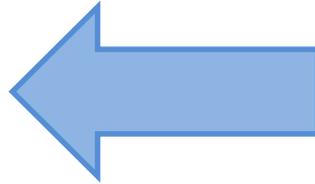
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Центр тяжести»**

1. Приведите доказательство центра параллельных сил?
2. Запишите координаты центра параллельных сил?
3. Дайте определение центра тяжести тела?
4. Где находится центр тяжести прямоугольника, треугольника, круга и полукруга?
5. В чем главное отличие центра тяжести и силы тяжести.
6. Перечислите методы определения центра тяжести сложного сечения.



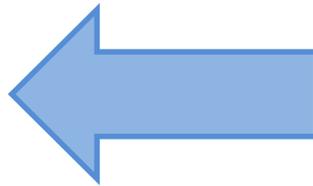
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Основные положения»**

1. Для чего изучается сопротивление материалов?
2. Чем отличается упругая деформация от пластичной?
3. В чем заключаются задачи сопротивления материалов?
4. В чем заключается метод сечений?
5. Что такое напряжение? Какова размерность напряжения?
6. Дайте определение понятиям прочность, жесткость и устойчивость.
7. Объясните основные допущения и гипотезы в сопротивлении материалов?



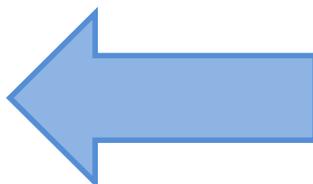
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Растяжение и сжатие»**

1. В каком случае брус испытывает деформацию растяжения или сжатия?
2. Что называется эпюрой продольных сил и эпюрой нормальных напряжений?
3. Для чего строят эпюры продольных сил и перемещений?
4. Какое поперечное сечение бруса называется опасным?
5. Что такое модуль продольной упругости материала, какова его размерность?
6. Что такое жесткость сечения бруса и жесткость бруса при растяжении (сжатии)?
7. Раскрыть сущность трёх выражений закона Гука.
8. Какова цель механических испытаний материалов?
9. Каковы характеристики пластичных свойств материалов?
10. Объясните испытание на растяжение?
11. Дайте определения всем пределам напряжений на диаграмме растяжения низкоуглеродистой стали.
12. Чем отличается предельное напряжение от допускаемого?
13. По какой формуле определяется расчетное напряжение?
14. Запишите уравнение на прочность при растяжении и сжатии?



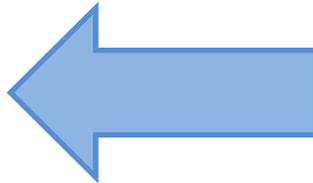
**Вопросы для самоконтроля по теме «Практические расчеты на срез и смятие»**

1. Объясните, что такое срез и чем отличается от сдвига?
2. Дайте определения деформации смятия?
3. Запишите уравнение на прочность для среза и смятия?
4. Запишите три вида расчета на прочность при срезе?
5. В чем заключается зависимость между тремя составляющими: модулем упругости  $E$ , модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$ ?
6. В чем заключается закон Гука при сдвиге?



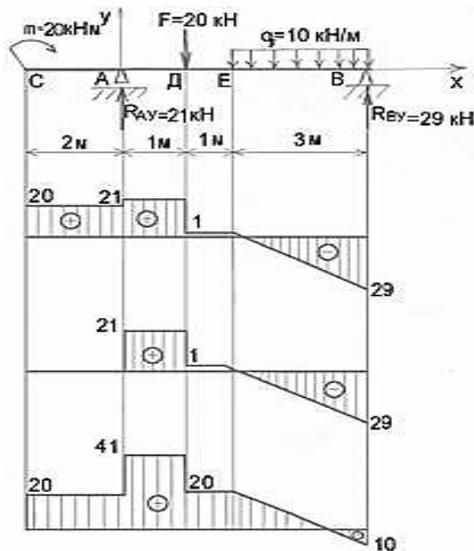
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Кручение»**

1. В чем состоит деформация сдвига?
2. Что такое модуль сдвига и как он связан с модулем продольной упругости?
3. Как определяется крутящий момент в произвольном сечении?
4. Какая зависимость существует между передаваемой валом мощностью, вращающим моментом и угловой скоростью?
5. Какая геометрическая характеристика сечения вала при кручении является для определения напряжения?
6. Напишите уравнение на прочность при кручении?
7. Дайте определения деформации кручению?
8. Дайте определение крутящему моменту?
9. Запишите три расчета на прочность при кручении?

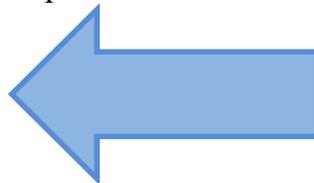


## Вопросы для самоконтроля по теме «Изгиб»

1. В каком случае балка работает на изгиб?
2. Что такое чистый и поперечный изгиб? Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса в этих случаях?
3. Каким методом определяют внутренние силовые факторы, действующие в поперечных сечениях на изгиб?
4. Чему равна поперечная сила и изгибающий момент в произвольном сечении балки при изгибе?
5. Для чего строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
6. Сформулируйте правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента.
7. Для какого варианта эпюра поперечных сил построена верно?

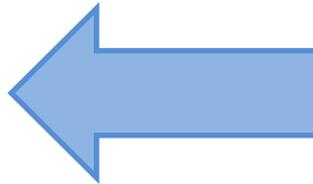


8. Напишите формулу Журавского для определения касательных напряжений и объясните её составляющие?
9. Напишите условие на прочность при изгибе?
10. Запишите три расчета на прочность при изгибе?
11. В чем заключается расчет на жесткость?



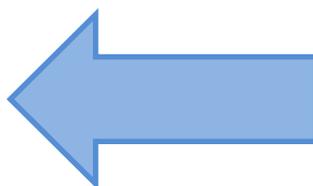
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Изгиб с кручением»**

1. Почему в случае одновременного действия изгиба и кручения оценку прочности производят, применяя гипотезы прочности?
2. Приведите примеры деталей, работающих на изгиб с кручением.
3. Какие точки поперечного сечения являются опасными, если брус круглого поперечного сечения работает на изгиб с кручением?
4. В чем заключается, понятие о сложном напряженном состоянии в точке?
5. Объясните, что такое эквивалентное напряжение?
6. Какие теории прочности вы знаете?
7. Объясните назначения теорий прочности?
8. В чем сущность главных напряжений?



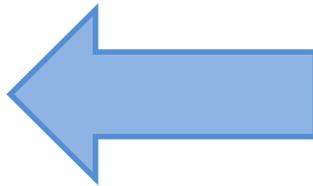
## Вопросы для самоконтроля по разделу «Элементы кинематики и динамики»

1. Дайте определение основных понятий кинематики: траектории, расстоянию, пути, скорости, ускорению, времени.
3. Какими способами может быть задан закон движения точки?
4. Как направлены касательное и нормальное ускорения точки?
6. Какое движение совершает точка, если касательное ускорение равно нулю, а нормальное не изменяется с течением времени?
7. Как выглядят кинематические графики при равномерном и равнопеременном движении?
8. Какое движение твердого тела называется поступательным?
9. Перечислите свойства поступательного движения твердого тела.
10. Дайте определение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
11. Как записывается в общем виде уравнение вращательного движения твердого тела?
12. Напишите формулу, устанавливающую связь между частотой вращения тела  $n$  и угловой скоростью вращения.
13. Дайте определение равномерного и равнопеременного вращательного движения.
14. Какая дифференциальная зависимость существует между угловым перемещением, угловой скоростью и угловым ускорением?
15. Сформулируйте первую аксиому динамики (принцип инерции) и вторую аксиому динамики (основной закон динамики точки).
16. Сформулируйте две основные задачи динамики.
17. Изложите третью аксиому динамики (закон независимости действия сил) и четвертую аксиому (закон равенства действия и противодействия).
18. Как определяется работа постоянной силы на прямолинейном пути?
19. Что называется мощностью?
20. Что такое механический коэффициент полезного действия?



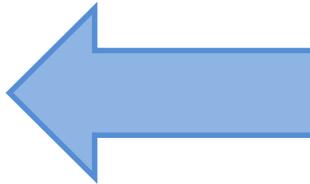
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Основные понятия и определения»**

1. Что рассматривается в разделе курса «Детали механизмов и машин»?
2. Какая разница между машиной и механизмом?
3. Какие детали называются деталями общего назначения?
4. Каково значение взаимозаменяемости и стандартизации в машиностроении?
5. Каковы основные критерии работоспособности и расчета деталей машин?
6. Перечислите и объясните классификацию машин?
7. Чем отличается сборочная единица от узла?
8. Каковы основные требования, предъявляемые к машинам, сборочным единицам и деталям?



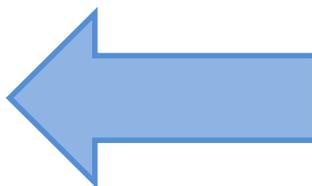
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Соединения деталей»**

1. Каковы достоинства и недостатки сварных соединений?
2. Перечислите виды сварных соединений.
3. Каковы достоинства и недостатки паяных соединений по сравнению со сварными?
4. Что называют припоем?
5. Каковы достоинства и недостатки клееных соединений по сравнению со сварными? Область применения.
6. Каково назначение шпоночных соединений? Их разновидности. Недостатки шпоночных соединений.



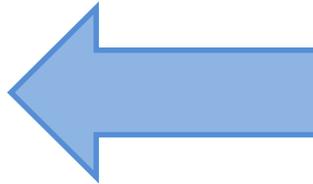
**Вопросы для самоконтроля по теме «Механизмы передачи вращательного движения»**

1. По каким признакам классифицируют механические передачи?
2. Что называется передаточным отношением?
3. Сформулируйте основные кинематические и силовые характеристики передач?
4. Каковы достоинства и недостатки зубчатых передач?
5. Как классифицируются зубчатые передачи?
6. Раскройте способы изготовления зубчатых колес?
7. Из каких материалов изготавливают зубчатые колеса?
8. Назовите основные достоинства и недостатки червячной передачи?
9. Каковы достоинства и недостатки цепных передач?
10. Опишите принцип работы ременной передачи?
11. Перечислите достоинства и недостатки ременной передачи по сравнению с цепной?



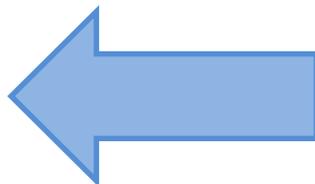
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Валы и оси»**

1. В чем заключается разница между валом и осью?
2. Какие различают виды валов?
3. Что называется шипом, шейкой и пятой?
4. Назовите основные деформации, которые испытывают вал и ось при работе?
5. Назовите основную цель проектировочного расчета?



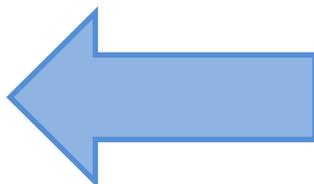
### **Вопросы для самоконтроля по теме «Опоры осей и валов»**

1. Какими недостатками обладают подшипники скольжения?
2. Каковы достоинства и недостатки подшипников качения по сравнению с подшипниками скольжения?
3. Опишите конструкцию подшипников скольжения и качения?
4. Каковы достоинства и недостатки подшипников скольжения и где их применяют?
5. Классифицируйте подшипники качения?



### **Вопросы для самоконтроля по теме «Муфты»**

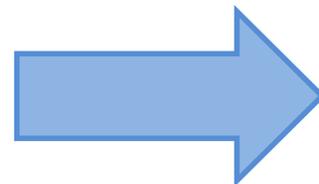
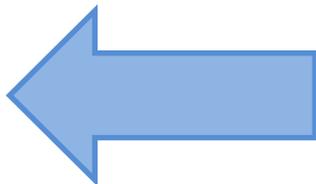
1. Какие различают типы муфт по назначению?
2. Какие требования предъявляются к муфтам?
3. Приведите сравнительную характеристику основных типов муфт.
4. Для чего предназначены самоуправляемые муфты?
5. Какие бывают по классификации самоуправляемые муфты?



# ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ОКР

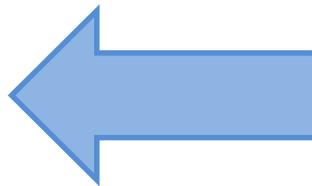
## Вопросы к обязательной контрольной работе №1

1. Дать определения экспериментальному и математическому закону Гука.
2. Раскрыть сущность метода сечения ВСФ.
3. Дать определения продольной силы и нормального напряжения при растяжении (сжатии)
4. Доказать теорему Журавского.
5. Дать определения поперечной силе и изгибающему моменту при деформации изгиба.
6. Раскрыть сущность касательного и нормального напряжения при изгибе.
7. Дать определения деформации кручения и деформации смятия.
8. Раскрыть сущность деформации кручения (формулы напряжения, угол закручивания, условие прочности).
9. Запишите закон Гука при сдвиге. Что характеризует модуль сдвига? Какова единица измерения модуля сдвига?
10. Дать определения деформации кручения и деформации смятия.
11. Запишите закон Гука при растяжении (сжатии). Что характеризует модуль упругости материала? Какова единица измерения модуля упругости
12. Дать определения деформации растяжение (сжатие) и деформации изгиба.
13. Запишите условия прочности на сдвиг и смятие.



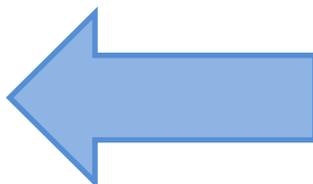
## Вопросы к обязательной контрольной работе №2

1. Дать определение понятию машина. Перечислите классификация машин.
2. Дать определения понятиям: кинематическая пара и кинематическая цепь.
3. Дать определения понятиям: механизм, звено механизма.
4. Перечислить и описать виды разъемных соединений.
5. Дать определение фрикционной передаче, перечислить её достоинства и недостатки.
6. Дать определение ременной передаче, перечислить её достоинства и недостатки.
7. Дать определение червячной передаче, перечислить её достоинства и недостатки.
8. Перечислить и описать основные требования, предъявляемые к машинам, сборочным единицам и деталям.
9. Дать определение цепной передаче, перечислить её достоинства и недостатки.



## ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНЫХ ИЗДАНИЙ, РЕКОМЕНДУЕМЫХ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высш.шк., 2003. – 352с.: ил.
2. Олофинская В.П. Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: учебное пособие. – М.: ФОРУМ: ИНФРВ-М, 2003 – 349с.: ил.
3. Олофинская В.П. Детали машин. Краткий курс и тестовые задания: учебное пособие. –М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2010. – 208с.
4. Куклин. Н.Г., Куклина Г.С., Житков В.К. Детали машин. – М.: Высш.шк., 2007.
5. Эрдеди А.А. Детали машин. / А.А. Эрдеди, Н.А. Эрдеди. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 288с.



## ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

### Анкета по учебной дисциплине «Основы технической механики»

1. Данная тема была мне

- а) интересна;*
- б) не интересна.*

2. Материал лекции при изучении данной темы мне был

- а) понятен;*
- б) не понятен.*

3. В полном ли объеме материал лекции мной был усвоен?

- а) весь;*
- б) частично;*
- в) ничего не понятно.*

4. Считаю, что умения, полученные при изучении данной темы, понадобятся мне

- а) в курсовом/дипломном проекте;*
- б) в трудовой деятельности;*
- в) для общего развития;*
- г) эти знания мне никогда не пригодятся;*
- д) другое (укажите).*

5. При изучении учебного материала темы мое настроение стало

- а) хуже;*
- б) лучше.*

