Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

Н.С. Попейко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов-заочников первого курса
экономических специальностей

В 2 частях

Часть 2

Минск
БНТУ
2011

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
П 57

Р е ц е н з е н т ы:
Н.П. Воронова, *И.В. Прусова*

Попейко, Н.С.

П 57 Высшая математика: учебно-методический комплекс для студентов-заочников первого курса экономических специальностей / Н.С. Попейко. – Минск: БНТУ, 2011. – Ч. 2. – 60 с.

ISBN 978-985-525-648-0 (Ч. 2).

Учебно-методический комплекс состоит из двух частей. Во вторую часть вошли темы: «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения», «Ряды».

Учебно-методический комплекс содержит правила оформления контрольной работы, экзаменационные вопросы, теоретический материал, варианты заданий контрольной работы № 2, примеры решения задач, тест.

Комплекс может быть полезен как при самостоятельном изучении математики, так и на занятиях в вузе.

Первая часть вышла в БНТУ в 2011 г.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-525-648-0 (Ч. 2)
ISBN 978-985-525-474-5

РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, изданным либо в электронном виде, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам университет организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы; создаются учебно-методические комплексы по изучаемым дисциплинам. Кроме этого, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь института будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Изучение теоретического материала

1. Изучая теоретический материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и вычерчивая имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий дисциплины, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует от-

мечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. п.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Контрольные работы

В процессе изучения математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – помочь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют судить о степени усвоения им соответствующего раздела дисциплины; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или не-достаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется уровень усвоения всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

2. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

2.1. Вопросы к экзамену

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям.
6. Интегрирование простейших дробей.
7. Метод неопределенных коэффициентов.
8. Интегрирование тригонометрических выражений.
9. Интегрирование иррациональных функций.
10. Определение определенного интеграла.
11. Геометрический смысл определенного интеграла.
12. Свойства определенного интеграла.
13. Формула Ньютона–Лейбница.
14. Методы вычисления определенного интеграла.
15. Вычисление площадей плоских фигур (случаи явного, параметрического и полярного задания функций).
16. Вычисление длин дуг (три случая).
17. Объем тела вращения.
18. Площадь поверхности тела вращения.
19. Определение числовых рядов. Сходимость.
20. Необходимый признак сходимости.
21. Свойства числовых рядов.
22. Достаточные признаки сходимости (Даламбера, Коши, интегральный).
23. Признаки сравнения.
24. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
25. Степенные ряды. Теоремы Абеля.
26. Методы определения радиуса сходимости.
27. Ряды Тейлора и Маклорена.
28. Ряды Маклорена для функций: $\sin x$, $\cos x$, e^x, $(1+x)^n$, $\ln(1+x)$.

2.2. Основная литература

1. Жевняк, Р.М. Высшая математика: в 5 ч. / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск, 1998.

2. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1980.

3. Элементы линейной алгебры / под общ. ред. Р.Ф. Апатенок. – Минск, 1977.

4. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М., 1980.

5. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1984.

6. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1985.

7. Пискунов, И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. / И.С. Пискунов. – М., 1985.

8. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М., 2003.

9. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск, 2000.

10. Балашевич, В.А. Основы математического программирования / В.А. Балашевич. – Минск, 1985.

11. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М., 1993.

12. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М., 1986.

13. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М., 1981.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1991.

15. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

3.1. Правила оформления контрольных работ

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 – четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводить с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) незачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводить в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

3.2. Выбор варианта контрольной работы

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

$$76 - 2 \cdot 30 = 16.$$

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется студентам на установочной сессии.

3.3. Контрольная работа № 2

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ. РЯДЫ

Задание 1.1

С помощью интегрирования по частям вычислить неопределенный интеграл от функции вида:

1. $x\sin x$;
2. $x\mathrm{e}^{2x}$;
3. $x\cos x$;
4. $x\mathrm{e}^{-x}$;
5. $x\ln x$;
6. $x\mathrm{arctg}x$;
7. $x\cos 2x$;
8. $x\mathrm{e}^{3x}$;
9. $x\sin 2x$;
10. $x\cos 3x$;
11. $x5^x$;
12. $x\mathrm{e}^{-2x}$;
13. $x\cdot 2^x$;
14. $(x+2)\sin x$;
15. $(x-3)\cos x$;
16. $x\sin(x-6)$;
17. $(3x+4)\ln x$;
18. $x\cdot 6^x$;
19. $(x+7)\sin x$;
20. $(x+5)3^x$;
21. $x\mathrm{e}^{x+5}$;
22. $x\cos(x-4)$;
23. $\ln(x^2+1)$;
24. $x\mathrm{e}^{-3x}$;
25. $x\cdot 4^x$;
26. $\arcsin\sqrt{x}$;

27. $x\mathrm{e}^{-4x}$;

28. $(3x+8)\mathrm{e}^{x}$;

29. $(x-5)\cos x$;

30. $(2x-7)\mathrm{e}^{x}$.

Задание 1.2

Вычислить неопределённый интеграл с помощью разложения на простейшие дроби подынтегральной функции:

1. $\dfrac{x+2}{x(x^2-2x-8)}$;

2. $\dfrac{x+4}{x(x^2-4x+3)}$;

3. $\dfrac{2x-1}{(x^2-9)x}$;

4. $\dfrac{4}{x^3-x}$;

5. $\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

6. $\dfrac{2}{x(x^2-3x+2)}$;

7. $\dfrac{x^2}{x(x^2+x-2)}$;

8. $\dfrac{x+3}{(x^2-16)x}$;

9. $\dfrac{2x+1}{x(x^2+x-30)}$;

10. $\dfrac{x^2+x-1}{x(x^2+2x-8)}$;

11. $\dfrac{x+4}{x(x^2-5x-6)}$;

12. $\dfrac{x^2+3}{x(x^2+5x+4)}$;

13. $\dfrac{2x-3}{x(x+1)(x-2)}$;

14. $\dfrac{6x+1}{x(x^2+x-2)}$;

15. $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$;

16. $\dfrac{x^2+1}{(x+2)(x^2-3x-18)}$;

17. $\dfrac{3}{(x+1)(x^2-5x+6)}$;

18. $\dfrac{4x-7}{x(x^2-9)}$;

19. $\dfrac{5x}{x(x^2+6x+8)}$;

20. $\dfrac{x^2+2}{x(x^2-1)}$;

21. $\dfrac{x-3}{x(x^2-2x+1)}$;

22. $\dfrac{6}{(x^2-16)x}$;

23. $\dfrac{x-1}{x(x^2-x-30)}$;

24. $\dfrac{x^2-2}{(x^2-16)x}$;

25. $\dfrac{7}{x(x^2-4x+3)}$;

26. $\dfrac{3-x}{x(x^2+2x-8)}$;

27. $\dfrac{3+x}{x(x^2-3x+2)}$;

28. $\dfrac{7-x}{x(x^2-2x-8)}$;

29. $\dfrac{x^2+6}{x(x^2-9)}$;

30. $\dfrac{2x+1}{x^3-25x^2}$.

Задание 1.3

Вычислить с помощью подстановки неопределённый интеграл от функции:

1. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+2}$;

2. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-7}$;

3. $\dfrac{3x+2}{x-\sqrt{x}}$;

4. $\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}$;

5. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$;

6. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

7. $\sqrt{\dfrac{2+x}{x}}$;

8. $x\sqrt{x+1}$;

9. $\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$;

10. $\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$;

11. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

12. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+3}}$;

13. $\dfrac{1-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

14. $\dfrac{x+7}{\sqrt{x}+5}$;

15. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$;

16. $\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}$;

17. $(x+2)\sqrt[3]{x+1}$;

18. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+3}$;

19. $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$;

20. $\sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}}$;

21. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$;

22. $\dfrac{x}{\sqrt{x+6}}$;

23. $\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-4}$;

24. $\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$;

25. $(x+7)\sqrt[3]{x+2}$;

26. $\dfrac{x}{2\sqrt{x}+7}$;

27. $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$;

28. $x\sqrt[3]{x+5}$;

29. $\sqrt{\dfrac{2}{x}-7}$;

30. $\dfrac{2x+4}{\sqrt[3]{x+5}}$.

Задание 1.4

Вычислить с помощью подстановки неопределённый интеграл от функции:

1. $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$;

2. $\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$;

3. $\dfrac{1}{\cos x \cdot \sin x}$;

4. $\dfrac{1}{\cos 2x}$;

5. $\dfrac{\sin 2x}{2(1-\cos x)^2}$;

6. $\dfrac{1}{\sin^3 x}$;

7. $\dfrac{1}{\cos^3 x}$;

8. $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$;

9. $\operatorname{tg}^3 x$;

10. $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$;

11. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$;

12. $\dfrac{1}{2+\sin^2 x}$;

13. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$;

14. $\dfrac{1}{5+\cos^2 x}$;

15. $\dfrac{1}{4+9\sin^2 x}$;

16. $\dfrac{\cos^3 x}{3+\sin x}$;

17. $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$;

18. $\dfrac{1}{3+4\sin^2 x}$;

19. $\dfrac{1}{2+5\cos^2 x}$;

20. $\dfrac{1}{2-3\sin^2 x}$;

21. $\dfrac{1}{5-3\cos^2 x}$;

22. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x(2+\cos x)}$;

23. $\dfrac{\cos x}{\sin x(4-\sin^2 x)}$;

24. $\dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$;

25. $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}$;

26. $\dfrac{\sin^2 x}{1-\mathrm{tg}x}$;

27. $\dfrac{1}{1-\sin^4 x}$;

28. $\dfrac{1}{5\sin^2 x+6}$;

29. $\dfrac{1}{3+2\cos^2 x}$;

30. $\dfrac{1}{8+5\sin^2 x}$.

Задание 1.5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y=2^x,\ \ y=2x-x^2,\ x=0,\ x=2$; 2. $y=\ln x,\ x=\mathrm{e},\ x=\mathrm{e}^2,\ y=0$;

3. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2$; 4. $y^2=x^3,\ y=8,\ x=0$;

5. $x^2 = 4y,\ y = \dfrac{8}{x^2+4}$;

6. $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$;

7. $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$;

8. $x + y = 3,\ y = x^2 + 1$;

9. $y^3 = x,\ y = x$;

10. $y = x + 1,\ y = \cos x,\ y = 0$;

11. $xy = 6,\ x + y - 7 = 0$;

12. $y = 2x - x^2,\ y = -x$;

13. $y = 4x^2,\ y = \dfrac{x^2}{9},\ y = 2$;

14. $xy = 4,\ x = 1,\ 4y = x$;

15. $y = (x-4)^2,\ y = 16 - x^2$;

16. $y^2 = x^3,\ x = 4$;

17. $y = \mathrm{e}^x,\ x - y + 2 = 0,\ x = \pm 1$;

18. $x = y^2,\ x = \dfrac{3}{4}y^2 + 1$;

19. $y = \ln(x+2),\ y = 2\ln x,\ y = 0$;

20. $x^2 + 4y^2 = 8,\ x^2 - 3y^2 = 1$;

21. $4y = 8x - x^2,\ 4y = x + 6$;

22. $y = 6x,\ 6y = x,\ xy = 6$;

23. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1,\ y = 4,\ y = -4$;

24. $y = \cos x,\ y = \sin x,\ x = 0$;

25. $y = 3^x,\ y = 2x - x^2, x = 2, x = 0$;

26. $x + y = 1,\ y = \cos x,\ y = 0$;

27. $y^3 = x,\ 4y = x$;

28. $y = \mathrm{tg}x,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3}$;

29. $y^2 = x + 5,\ y^2 = -x + 4$;

30. $2x - 3y + 7 = 0,\ y = 3^x,\ x = -2$.

Задание 1.6

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$;

2. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x}$;

3. $\displaystyle\int_9^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$;

4. $\displaystyle\int_5^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$;

5. $\int\limits_4^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$;

6. $\int\limits_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$;

7. $\int\limits_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

8. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$;

9. $\int\limits_0^{\infty}3^{-x}\mathrm{d}x$;

10. $\int\limits_3^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

11. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1}$;

12. $\int\limits_3^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;

13. $\int\limits_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$;

14. $\int\limits_3^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$;

15. $\int\limits_1^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$;

16. $\int\limits_2^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$;

17. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}+1)^3}$;

18. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$;

19. $\int\limits_0^{\infty}6^{-x}\mathrm{d}x$;

20. $\int\limits_3^{\infty}\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{x+1}$;

21. $\int\limits_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$;

22. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+3)}$;

23. $\int\limits_4^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$;

24. $\int\limits_1^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^4+1}$;

25. $\int\limits_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}$;

26. $\int\limits_0^{\infty}4^{-x}\mathrm{d}x$;

27. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x}$;

28. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+6}$;

29. $\int\limits_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$;

30. $\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$.

Задание 1.7

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \dfrac{(n+2)!}{n^5}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n-1}{5^n (n+1)!}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n \cdot \left(\dfrac{1}{n}\right)^7$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n+3)}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+3)}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^n n^7$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n(n+1)}{n^n}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)!}{n^n}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\dfrac{2\pi}{3^n}\right)$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n (n+3)!}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+3)!}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{5^n}\right)$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^2+3)}{(n+1)!}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2(n+3)!}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$;

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin\left(\dfrac{\pi}{4^n}\right)$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n!}$;

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}$;

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4\cdot n!}$;

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)!}$;

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{(2\cdot n)!}$;

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$;

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$.

Задание 1.8

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)^n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^n}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{3n}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3\cdot n^2-2}\right)^n$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5^n}\right)\right)^n$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^n}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5^n}\right)\right)^{3n}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+3))^n}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot n^2+4n+5}{6\cdot n^2-3n-1}\right)^{n^2}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\right)\right)^{2n}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{3n}}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^{n}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$;

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot n^2-n-1}{7\cdot n^2+3n+4}\right)^{n}$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$;

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{1}{3n}\right)\right)^{2n}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$;

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$;

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right)^{n}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5n+1}\right)\right)^{n}$;

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right)^{2n}$;

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^{2}}$;

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+3}{2n+5}\right)\right)^{n}$.

Задание 1.9

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4\cdot n^2+1}\right)^{2}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\cdot(\ln(3n+2))}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(\ln(2n+1))^{3}}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\cdot(\ln(3n+4))^2}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot\ln(3n-1)}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\cdot\ln(5n-2)}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot\ln(n+2)}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\cdot\ln(10n+5)}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+n}{25+n^2}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\cdot\ln(n+3)}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)\cdot(\ln(3+2n))^5}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$;

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-4)\cdot(\ln(9n-4))^2}$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2-2n}$;

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)(\ln(5n+8))^3}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$;

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\cdot\ln(n+4)}$;

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+8n)\cdot(\ln(3+8n))^3}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{4n-3}\right)^3}$;

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+3)\cdot(\ln(10n+3))^2}$;

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-n}$;

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot\ln(n+5)}$.

Задание 1.10

Исследовать на абсолютную или условную сходимость знакочередующийся ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{2n+1}}$;

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{6n+5}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[4]{n^5}}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)n}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n\cdot(n+1)}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(n+5)}{3^n}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3n-1}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)\cdot 3^n}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3n^2+1}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\sqrt{n}}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$;

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{5n(n+1)}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$;

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$;

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+5)}{3^n}$;

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+7)^n}$;

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$;

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n+4)}$.

Задание 1.11

Найти область сходимости ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1)^n x^{2n}}{n}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(-2)^{n+1}}{3^{n+2}}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$;

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$;

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$;

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$;

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$;

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$.

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

4.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении решалась задача нахождения производной $f'(x)$, или дифференциала $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$, функции. В интегральном исчислении решается обратная задача. По функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$ такую, чтобы выполнялись равенства $F'(x) = f(x)$ или $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

Определение 4.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$.

Теорема 4.1. Любая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Теорема 4.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две любые первообразные для $f(x)$ на X, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – постоянная.

Следствие. Если $F(x)$ – некоторая первообразная функция $f(x)$ на множестве X, то все первообразные функции имеют вид $F(x)+C$, где C – постоянная.

Операция нахождения первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется интегрированием.

Определение 4.2. Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $f(x)\mathrm{d}x$ – подынтегральное выражение;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

x – переменная интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ и $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$.
2. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$.
3. $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$, где $a \neq 0$, a – постоянный множитель.
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm \int f_n(x)\mathrm{d}x$.
5. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$.
6. $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$, т. е. любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной.

Таблица основных неопределенных интегралов

Буква u может обозначать, как независимую переменную $(u = x)$, так и функцию от независимой переменной $(u = u(x))$.

1. $\int u^n \mathrm{d}u = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$; 2. $\int a^u \mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$;

3. $\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$; 4. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$;

5. $\int \sin u \,\mathrm{d}u = -\cos u + C$; 6. $\int \cos u \,\mathrm{d}u = \sin u + C$;

7. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$; 8. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

9. $\int \mathrm{sh}\, u \,\mathrm{d}u = \mathrm{ch}\, u + C$; 10. $\int \mathrm{ch}\, u \,\mathrm{d}u = \mathrm{sh}\, u + C$;

11. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\, u + C$ 12. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth}\, u + C$;

13. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C$; 14. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$;

15. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$;

16. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \quad (|u| > |a|)$;

17. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C \quad (|u| < |a|)$.

4.2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Требуется вычислить интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что переменную x заменяют переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, тогда $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Теорема 4.3. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

которая называется формулой замены переменой в неопределенном интеграле.

После вычисления интеграла следует вернуться к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$.

При интегрировании заменой переменной нельзя дать общее правило выбора подстановки для любой функции. Однако это можно сделать только при интегрировании отдельных классов функций (тригонометрических, иррациональных и т. д.). Так, например, интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)\mathrm{d}x,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

вычисляются при помощи тригонометрических подстановок соответственно:

$$x=\frac{a}{\cos t}\ \text{ или }\ x=\frac{a}{\sin t};\ \ x=a\cos t\ \text{ или }\ x=a\sin t;\ \ x=a\operatorname{tg}t.$$

4.3. Интегрирование по частям

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на некотором интервале, тогда имеет место формула $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$, называемая формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям удобно применять в следующих случаях:

1. Интегралы вида: $\int P_n(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x, \int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x; \int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n; a – число. В этих интегралах полагаем $u=P_n(x)$ и, применив интегрирование по частям n раз, получаем результат.

2. Интегралы вида: $\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x; \int P_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x; \int P_n(x)\arccos x\mathrm{d}x;$ $\int P_n(x)\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x;$ $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}x\mathrm{d}x$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Их можно вычислить по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

3. Интегралы вида: $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, (a, b – числа), $\int \sin(\ln x)dx$ и т. д. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям, после чего получается снова исходный интеграл с некоторым коэффициентом. Имеем равенство, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно искомого интеграла.

4.4. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения их на простейшие дроби

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \ge n$) рациональная дробь называется неправильной.

Простейшей дробью называется правильная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$.

2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k \ge 2,\ k \in N)$.

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2-4q<0$).

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \ge 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q – действительные числа.

Теорема 4.4. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{S_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{S_m}$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_1}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+...+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+...$$

$$...+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{C_{S_1}x+D_{S_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{S_1}}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+...+\frac{M_{S_m}x+N_{S_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{S_m}},$$

где $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., C_1, ..., D_1, ..., M_1, ..., N_1, ...$ – некоторые действительные числа.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3};$

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1};$

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}.$

Перед интегрированием рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ необходимо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1. Если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, т. е. представить эту дробь в виде $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M(x)+\dfrac{P_1(x)}{Q_n(x)}$,

где $M(x)$ – многочлен, $\dfrac{P_1(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2. Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители: $Q(x)=(x-a)^m(x-b)...(x^2+px+q)^r...,$ где квадратичные множители имеют комплексные корни.

3. Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби.

4. Вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, ..., A_{k1}$, $B_1, B_2, ..., B_{k2}$, $C_1, C_2, ..., C_{S1}$, $D_1, D_2, ..., D_{S1}$, $M_1, M_2, ..., M_{Sm}$, $N_1, N_2, ..., N_{Sm}$ для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять в числителе коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. В результате интегрирование рациональной дроби сведётся к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

4.5. Интегрирование тригонометрических выражений с помощью подстановок и формул тригонометрии

Условимся через $R(u, v)$ обозначать рациональную функцию относительно u, v, т. е. выражение, которое получено из любых величин u, v с помощью четырёх арифметических действий.

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, где R – рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций, т. е. рационализируются с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2\mathrm{arctg}t;$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}; \quad \int R(\sin x; \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении $\sin x$ и

$\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x; \cos x)\mathrm{d}x$ можно осуществить с помощью других подстановок. Укажем эти случаи:

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$, $\cos x$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интегралы рационализируются подстановкой $t = \mathrm{tg} x$. При этом используются формулы: $\sin^2 x = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$; т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x; \cos x)\mathrm{d}x$ рационализируются с помощью подстановки $t = \cos x$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x; \cos x)\mathrm{d}x$ рационализируются с помощью подстановки $t = \sin x$.

4. Интегралы $\int R(\mathrm{tg} x)\mathrm{d}x$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t = \mathrm{tg} x$.

5. Интегралы $\int R(\mathrm{ctg} x)\mathrm{d}x$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t = \mathrm{ctg} x$.

4.6. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)\mathrm{d}x$,

где R – рациональная функция: $m_1, n_1, \ldots, m_r, n_r$ – целые ненулевые числа. С помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^{\lambda}$, где $\lambda = k(n_1, \ldots, n_r)$, $k(n_1, \ldots, n_r)$ – наименьшее общее кратное чисел $n_1, \ldots, n_r$, указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Рассмотрим два частных случая.

1. Если $c=0$, $d=1$, то данный интеграл имеет вид $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)\mathrm{d}x$ и преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $ax+b=t^{\lambda}$, где $\lambda = k(n_1, ..., n_r)$.

2. Если $b=c=0$, $a=d=1$, то интеграл имеет вид $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., x^{\frac{m_r}{n_r}}\right)\mathrm{d}x$ и приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^{\lambda}$, где $\lambda = k(n_1, ..., n_r)$.

4.7. Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ – определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. На каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ произвольным образом выберем точку $\xi_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 4.1).

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при стремлении к нулю наибольшей из длин Δx_i, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

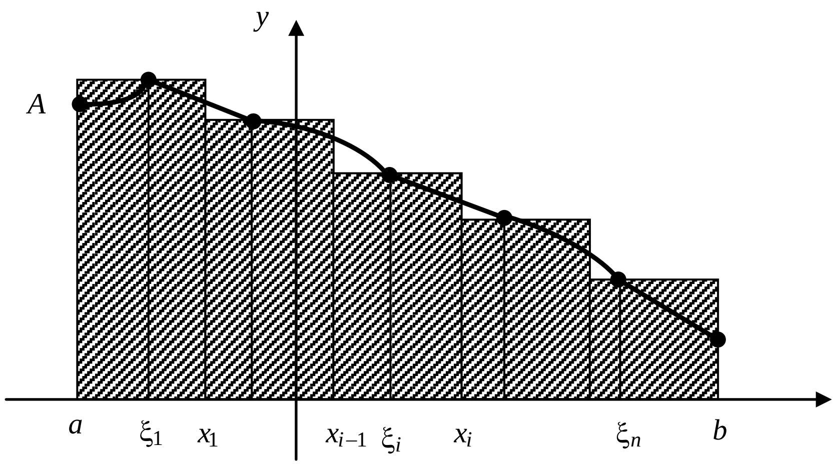

Рис. 4.1

Теорема 4.5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$, т. е. предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки Δx_i и выбора на них точек ξ_i. Если $y = f(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, то геометрически определённый интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется криволинейной трапецией. В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает значения разных знаков, определенный интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, так как площадям криволинейных трапеций, расположенных под осью Ox, присваивается знак «–». Например, для функции, график которой изображен на рис. 4.2, имеем $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3$.

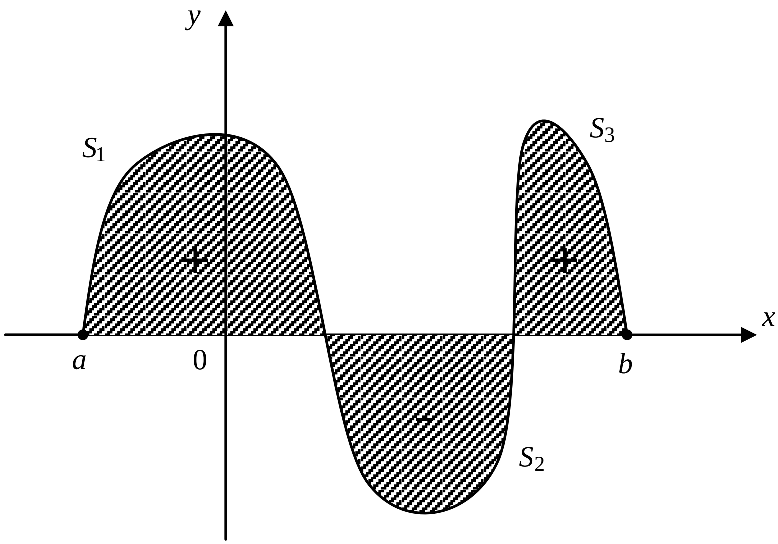

Рис. 4.2

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. $\int\limits_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (c = \mathrm{const})$.

4. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ для любого действительного c.

6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, где $a < b$ и $f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда найдется хотя бы одна точка $c \in [a, b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$.

4.8. Методы вычисления определенного интеграла

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$, где $x = \phi(t)$ имеет непрерывную производную, $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$. Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле $\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$.

4.9. Приложение определенного интеграла к задачам геометрии

Площадь плоской фигуры

1. Площадь криволинейной трапеции (рис. 4.3), ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b y\mathrm{d}x$$

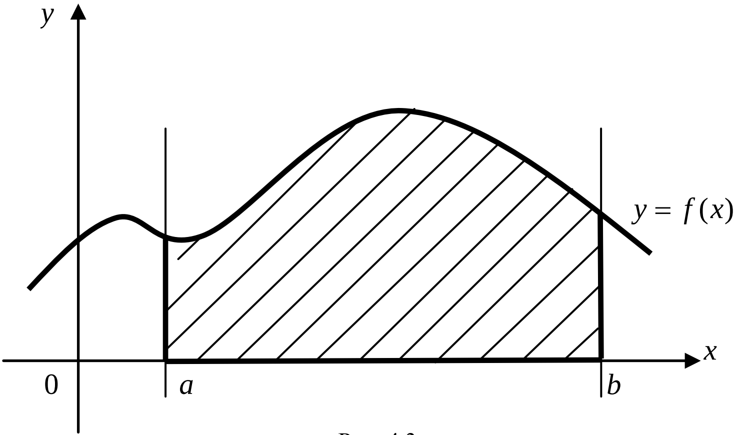

Рис. 4.3

2. Площадь фигуры (рис. 4.4), ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\mathrm{d}x .$$

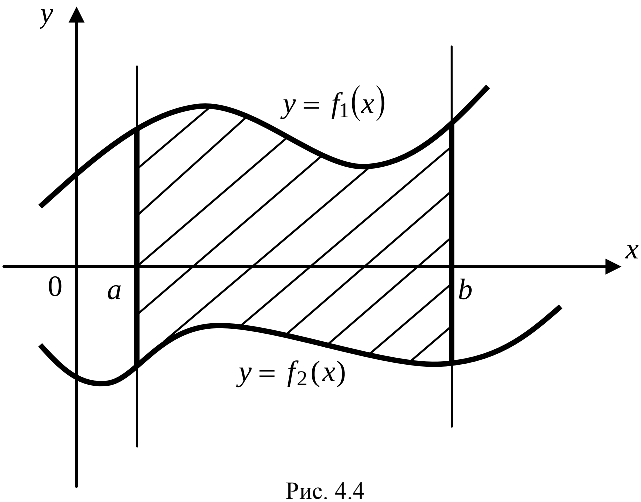

Рис. 4.4

3. Площадь криволинейной трапеции, в случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le x \le b$, $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, будет вычисляться по формуле $S = \int\limits_{t_2}^{t_1} y(t)x'(t)\mathrm{d}t$.

4. Площадь криволинейного сектора (рис. 4.5), ограниченного непрерывной кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

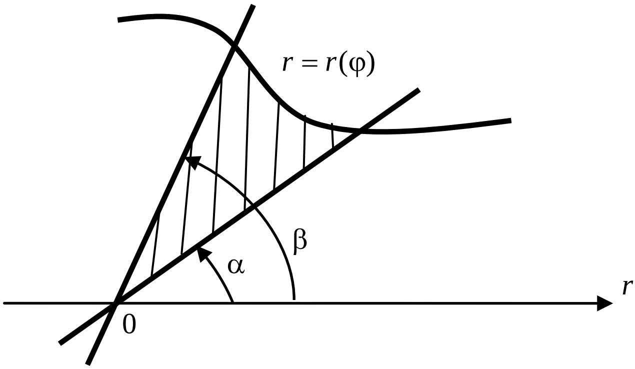

Рис. 4.5

Длина дуги кривой

1. Длина дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x$.

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\mathrm{d}t$.

3. Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\mathrm{d}\varphi$.

Объем и площадь поверхности тел вращения.

1. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 \mathrm{d}x$.

Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то $V_y = \int\limits_c^d x^2 \mathrm{d}y$.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле $Q = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$.

4.10. Числовые ряды. Основные понятия

Определение 4.3. Пусть $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – числовая последовательность. Выражения вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

называются *числовым рядом*, числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – членами ряда, а число a_n – n-м членом ряда.

Например, числовыми рядами являются следующие выражения:

$$1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Определение 4.4. Сумма конечного числа n первых членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

называется n-й *частичной суммой* данного ряда.

Таким образом,

$$S_1 = a_1 ,$$
$$S_2 = a_1 + a_2 ,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Определение 4.5. Если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S – суммой данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

Выражение вида

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k ,$$

представляющее собой числовой ряд, называется n-м *остатком ряда*. Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S_n+r_n\,.$$

Поскольку для сходящегося числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0.$$

Например, рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,,$$

предоставляющий собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Вычислим n-ю частичную сумму этого ряда:

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=2(1-0)=2\,.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма $S=2$. Ряд $1+2+3+\ldots+n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ является расходящимся, т. к.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1+2+3+\ldots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2}\cdot n=\infty\,.$$

4.11. Необходимый признак сходимости ряда

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и его n-ю частичную сумму

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \text{, т. е. } a_n = S_n - S_{n-1} .$$

Если ряд сходится, то существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 .$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (т. е. предел общего члена сходящегося ряда при $n \to \infty$ равен нулю).

Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Из выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не обязательно следует сходимость ряда, т. е. оно не является достаточным признаком сходимости ряда.

Например, рассмотрим *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} .$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, однако гармонический ряд расходится.

4.12. Простейшие свойства числовых рядов

1. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ также сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b$.

3. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма S, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{A} a_k = S\mathrm{A}$, где A – const.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{A} a_k$ называется произведение ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ на число A.

Замечание. Операции суммирования рядов и умножения ряда на число называются *линейными операциями над рядами*. Из данных определений вытекает, что линейные операции над рядами реализуются с помощью линейных операций над их членами.

4.13. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов

Рассмотрим числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, т. е. $a_n \geq 0$.

Признак сравнения. Если для членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливы неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$ для $\forall n \geq n_0$, то:

1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 4.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{2^n+n}+\ldots .$$

Решение. Применим признак сравнения.

Так как $\frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$ для $\forall n\geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1$, то сходится и заданный ряд.

Предельный признак сравнения. Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $b_n>0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L,\ \ 0<L<\infty,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно. В частности, если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, то удобно воспользоваться знаком эквивалентности и писать $a_n\sim b_n$ при $n\to\infty$. Например, многочлен степени k

$$P_k(n)=a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0\sim a_kn^k,$$

т. е. многочлен эквивалентен своей старшей степени при $n\to\infty$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{a_kn^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0}{a_kn^k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{k-1}}{a_kn}+\ldots+\frac{a_1}{a_kn^k}+\frac{a_0}{a_kn^k}\right)=1+0+\ldots+0+0=1.$$

При применении признаков сравнения для исследования сходимости числовых рядов удобно сравнивать с *обобщенным гармоническим рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$. При $p=1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Признак Д\`Аламбера. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\ge 0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$. Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

3) при $L=1$ признак Д\`Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Радикальный признак Коши. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\ge 0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

3) при $L=1$ радикальный признак Коши неприменим.

Интегральный признак Коши. Если функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ монотонно убывает и неотрицательна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ сходятся или расходятся одновременно.

4.14. Знакочередующиеся ряды

Определение 4.6. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого имеют разные знаки, называется *знакопеременным*.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, который является знакоположительным.

Теорема 4.6. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

В этой теореме сформулирован достаточный признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Определение 4.7. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Определение 4.8. Знакочередующимся называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \qquad (4.1)$$

где a_n, $n = 1, 2, \ldots$ – числа одного знака.

При исследовании сходимости знакочередующихся рядов применяют признак Лейбница.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ удовлетворяют условиям:

1) $a_n \geq a_{n+1}$ для $\forall n \in N$,

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т. е. $S \le a_1$.

4.15. Степенные ряды

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность функций

$$U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x), \ldots$$

Выражение вида

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$$

называется *функциональным рядом*, а сумма первых n слагаемых

$$S_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)$$

n*-й частичной суммой функционального ряда*.

Функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

(если предел существует и конечен) называется *суммой функционального ряда*.

Множество всех значений x, для которых ряд сходится, называется *областью сходимости функционального ряда*.

Например, ряд $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ при $|x|<1$ является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и, следовательно, сходится, причем сумма ряда $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является интервал $(-1;\ 1)$.

Определение 4.9. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad (4.2)$$

где $a_n (n \in N)$, x_0 – действительные числа, называется *степенным рядом* по степеням $x - x_0$, а числа a_n – коэффициентами степенного ряда.

При $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Поскольку заменой $x - x_0 = X$ ряд (4.2) можно свести к последнему ряду, то ограничимся рассмотрением таких рядов.

Степенной ряд всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно для любых x таких, что $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если в точке x_2 степенной ряд расходится, то он расходится для любых x таких, что $|x| > |x_2|$.

Из теоремы Абеля и следствия вытекает, что если степенной ряд сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $|x| < R$ и расходится для всех $|x| > R$. При $x = \pm R$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение 4.10. Неотрицательное число R такое, что степенной ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, называют *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R;\, R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Если ряд сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех действительных x, то $R = \infty$.

Для определения радиуса сходимости степенного ряда используются формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

4.16. Ряды Тейлора и Маклорена

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится и его сумма $S(x) = f(x)$, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Степенной ряд вида

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется *рядом Маклорена*.

По определению полагаем $0! = 1$.

Если для произвольной бесконечно дифференцируемой функции формально составить ряд Тейлора, то он может и не совпадать с самой функцией $f(x)$. Поэтому важно определить, когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен.

Теорема 4.7. Если на интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ функция $f(x)$ и все ее производные ограничены в совокупности одной и той же константой M, то ее ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ на интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$.

4.17. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

1. Запишем разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \mathrm{e}^x$. Так как $f'(x) = \mathrm{e}^x,\ f''(x) = \mathrm{e}^x, ..., f^n(x) = \mathrm{e}^x$, то $f'(0) = 1,\ f''(0) = 1, ..., f^{(n)}(0) = 1$.

Таким образом, получаем следующее разложение:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Поскольку $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$, радиус сходимости данного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 = \infty,$$

т. е. ряд сходится при любых $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Аналогично можно получить разложения других функций в ряды Маклорена.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + ... =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!},\ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x \in (-\infty;\ +\infty).$

4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-1;\ +1).$

5. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1;\ +1).$$

6. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1;\ 1).$

Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена используется, например, при вычислении приближенных значений функций, определенных интегралов, решении дифференциальных уравнений и др.

5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Задание 1.1. С помощью интегрирования по частям вычислить неопределенный интеграл от функции вида $(7x+3)\cos 2x$.

Решение. Поскольку

$$\int\cos 2x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C,\quad \mathrm{d}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)=\cos 2x\mathrm{d}x,$$

искомый интеграл

$$\int(7x+3)\cos 2x\mathrm{d}x=\int(7x+3)\mathrm{d}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}(7x+3)\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(7x+3)=$$

$$=\frac{1}{2}(7x+3)\sin 2x-\frac{7}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(7x+3)\sin 2x+\frac{7}{4}\cos 2x+C.$$

Задание 1.2. Вычислить неопределенный интеграл с помощью разложения на простейшие дроби подынтегральной функции $\dfrac{x^4+2}{x(x^2-4x+3)}$.

Решение. Поскольку степень многочлена в числителе не меньше степени знаменателя, следует выполнить деление:

$$\frac{x^4+2}{x^3-4x^2+3x}=x+4+\frac{13x^2-12x+2}{x^3-4x^2+3x}=x+4+\frac{13x^2-12x+2}{x(x-1)(x-3)}.$$

Правильную дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{13x^2-12x+2}{x(x-1)(x-3)}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x-1}+\frac{C_3}{x-3}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$C_1(x-1)(x-3)+C_2x(x-3)+C_3x(x-1)=13x^2-12x+2,$$

откуда $C_1+C_2+C_3=13,\ \ 4C_1+3C_2+C_3=12,\ \ 3C_1=2$.

Решая эту систему уравнений, имеем $C_1=\dfrac{2}{3},\ \ C_2=-\dfrac{3}{2},\ \ C_3=\dfrac{83}{6}$.

Искомый интеграл равен

$$\int\frac{(x^4+2)\mathrm{d}x}{x(x-1)(x-3)}=\int(x+4)\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\frac{83}{6}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}=\frac{x^2}{2}+4x+\frac{2}{3}\ln|x|-$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}+\frac{83}{6}\int\frac{\mathrm{d}(x-3)}{x-3}=\frac{x^2}{2}+4x+\frac{2}{3}\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{83}{6}\ln|x-3|+C.$$

Задание 1.3. Вычислить с помощью подстановки неопределенный интеграл от функции $\sqrt{\dfrac{3+x}{x}}$.

Решение. Выполним подстановку $\sqrt{\dfrac{3+x}{x}}=t$. Разрешая уравнение относительно x, находим $x=\dfrac{3}{t^2-1},\ \ \mathrm{d}x=-\dfrac{6t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.

Тогда искомый интеграл запишется: $I=\int\sqrt{\dfrac{3+x}{x}}\mathrm{d}x=-6\int\dfrac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.

Разлагая подынтегральное выражение на простейшие дроби

$$\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{(t+1)} + \frac{A_4}{(t+1)^2}$$

и, раскрывая скобки в равенстве

$$A_1(t-1)(t+1)^2 + A_2(t+1)^2 + A_3(t+1)(t-1)^2 + A_4(t-1)^2 = t^2,$$

приходим к соотношению

$$t^3(A_1 + A_3) + t^2(A_1 + A_2 - A_3 + A_4) + t(-A_1 + 2A_2 - A_3 - 2A_4) +$$
$$+(-A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = t^2.$$

Система уравнений относительно A_1, A_2, A_3, A_4 запишется

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 0; \\ A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 1; \\ -A_1 + 2A_2 - A_3 - 2A_4 = 0; \\ -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, находим $A_1 = \frac{1}{4},\ A_2 = \frac{1}{4},\ A_3 = -\frac{1}{4},\ A_4 = \frac{1}{4}.$

Искомый интеграл

$$I = -6\left(\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\ln\left|\sqrt{\frac{3+x}{x}} - 1\right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3+x}{x}} - 1} - \ln\left|\sqrt{\frac{3+x}{x}} + 1\right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3+x}{x}} + 1}\right) + C.$$

Задание 1.4. Вычислить с помощью подстановки неопределенный интеграл от функции $\dfrac{1}{2+7\sin^2 x}$.

Решение. Универсальной является подстановка $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, для которой нетрудно проверить равенства

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \cos x=2\cos^2 x-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Поэтому искомый интеграл сводится к случаю интегрирования рациональной дроби

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2+7\sin^2 x}=2\int\frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{2(1+t^2)^2+28t^2}. \tag{4.3}$$

Однако в ряде случаев более удобны подстановки:

1. $t=\sin x$. Тогда $\cos x=\sqrt{1-t^2},\quad \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. $t=\cos x$. Тогда $\sin x=\sqrt{1-t^2},\quad \mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

3. $t=\operatorname{tg}x$. Тогда $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Подстановки 1, 2 приводят к подынтегральным выражениям, содержащим радикал, и поэтому нецелесообразны. Для подстановки 3 приходим к интегралу, более простому, чем (4.3), и легко приводящемуся к табличному:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{9t^2+2}=\frac{1}{9}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Задание 1.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 + 3,\qquad y = \ln(2x+1),\qquad x = 0,\qquad x = 2;$

б) $y = \sqrt{x},\qquad y = 4x - \dfrac{1}{2},\qquad x = 0,\qquad x = 1.$

Решение.

а) Рассмотрим вспомогательную функцию $z(x) = x^2 + 3 - \ln(2x+1)$ на отрезке $0 \le x \le 2.$ Площадь вычисляется по формуле $S = \int\limits_0^2 |\, z(x)\,|\, \mathrm{d}x.$ Исследуем $z(x).$ Очевидно, что $z(0) = 3 > 0.$ Поскольку

$$z'(x) = 2x - \frac{2}{2x+1} = \frac{4(x+1)(x-1/2)}{2x+1},$$

нетрудно проверить, что $z(x)$ достигает в точке $x = 1/2$ локального минимума, причем $z(1/2) = 3{,}25 - \ln 2 > 0.$ Кроме того, $z(2) = 7 - \ln 5 > 0.$ Поэтому наименьшее значение $z(x)$ на [0; 2], равное $z(1/2)$, положительно, и, значит, $z(x) > 0.$

Имеем:

$$S = \int\limits_0^2 z(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x^2 + 3 - \ln(2x+1))\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\right|_0^2 - \int\limits_0^2 \ln(2x+1)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{26}{3} - \int\limits_0^2 \ln(2x+1)\mathrm{d}x.$$

Вычисляя интеграл по частям, находим

$$\int\limits_0^2 \ln(2x+1)\mathrm{d}x = (x\ln(2x+1))\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 x\mathrm{d}\ln(2x+1) = 2\ln 5 - \int\limits_0^2 \frac{2x\mathrm{d}x}{2x+1} = 2\ln 5 -$$

$$-\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\ln 5 - x\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1} = 2\ln 5 - 2 + \frac{1}{2}\ln|\,2x+1\,|\,\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{5}{2}\ln 5 - 2.$$

Поэтому $S = 32/3 - 5\ln 5/2.$

б) Здесь $z(x) = \sqrt{x} - 4x + \frac{1}{2}$ на $0 \le x \le 1$. Имеем $z(0) = 3/4,$ $z(1) = -9/4$, и, следовательно, $z(x)$ меняет знак. Найдем интервалы, где она положительна или отрицательна. Отыскивая корни уравнения $z(x) = 0$, находим значение $x_1 = \frac{1}{4},$ поэтому $z(x) \ge 0$ при $0 \le x \le 1/4$ и $z(x) < 0$ при $1/4 < x \le 1.$ Искомая площадь

$$S = \int_0^{1/4} z(x)\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1} (-z(x))\mathrm{d}x = \int_0^{1/4} z(x)\mathrm{d}x - \int_{1/4}^{1} z(x)\mathrm{d}x.$$

Вычисляем неопределенный интеграл

$$F(x) = \int z(x)\mathrm{d}x = \int\left(\sqrt{x} - 4x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + \frac{x}{2} + C.$$

Тогда

$$S = F(x)\Big|_0^{1/4} - F(x)\Big|_{1/4}^{1} = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F(1) + F\left(\frac{1}{4}\right) = 2F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F(1) =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 4} + C\right) - C - \left(\frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2} + C\right) = 1.$$

Задание 1.6. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 7x + 12}$ или доказать его расходимость.

Решение. Согласно определению несобственного интеграла с бесконечным пределом имеем

$$\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{a\to\infty}\int_2^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 7x + 12}.$$

Поскольку корнями трехчлена в знаменателе будут $x_1 = -3$, $x_2 = -4$, то

$$\frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{C_1}{x+3} + \frac{C_2}{x+4}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $C_1 + C_2 = 0$, $4C_1 + 3C_2 = 1$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = -1$.

Поэтому

$$\int_2^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+12} = \int_2^a \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \mathrm{d}x = (\ln|x+3| - \ln|x+4|)\Big|_2^a =$$

$$\ln(a+3) - \ln(a+4) - \ln 5 + \ln 6 = \ln\frac{6}{5} - \ln\frac{a+4}{a+3}.$$

Значение несобственного интеграла

$$\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{6}{5} - \ln\frac{a+4}{a+3} \right) = \ln\frac{6}{5} - \ln\left(\lim_{a\to\infty} \frac{a+4}{a+3} \right) = \ln\frac{6}{5}.$$

Задание 1.7. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{3^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Задание 1.8. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Применим радикальный признак Коши: $a_n=\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}=3>1$, т. о., ряд расходится.

Задание 1.9. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x^4}$ удовлетворяет условиям признака. Исследуем несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b x^{-4}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Так как интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

Задание 1.10. Исследовать на сходимость, абсолютную и условную знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, т. к. $\frac{1}{5}>\frac{1}{5^2}>\ldots>\frac{1}{5^n}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5^n}=0$. Этот ряд сходится абсолютно, т. к. ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ сходится по признаку Коши, т. к. $\lim\sqrt[n]{\frac{1}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$.

Задание 1.11. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+1)}$.

Решение. Для данного степенного ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = \frac{1}{3^n (n+1)}$,

$a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$.

Радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n (n+1)} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 3$. Следовательно, ряд сходится в интервале (–3; 3). Исследуем сходимость ряда на концах интервала. Положим сначала $x = 3$.

Получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, который расходится (сравним с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). Возьмем теперь $x = -3$.

Получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, который сходится условно по признаку Лейбница. Т. о., область сходимости ряда – полуинтервал $x \in [-3; 3)$.

6. ТЕСТ ЗА 2 СЕМЕСТР

1. Если $F(x) = x^5$ является первообразной некоторой функции $f(x)$, то какая из предложенных функций также является первообразной $f(x)$?

а) $F(x) = x^6$; б) $F(x) = x^5 - 10$; в) $F(x) = x^4$; г) $F(x) = \frac{x^5}{5}$.

2. Записать результат интегрирования $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 25}$.

3. Интеграл $\int \cos 4x\mathrm{d}x$ равен

а) $\sin 4x + C$; б) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$; в) $-\frac{1}{4}\sin 4x + C$; г) $\sin 4x$.

4. С помощью какой подстановки можно найти интеграл от функции $\frac{1}{\cos x + 4}$?

а) $x = \mathrm{tg}t$; б) $t = \mathrm{tg}x$; в) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; г) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{4}$.

5. Для вычисления интеграла $\int (x+10)\sin 3x\mathrm{d}x$ применяется формула интегрирования по частям $\int u\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\mathrm{d}u$, где

а) $u = x + 10;\ \mathrm{d}v = \sin 3x\mathrm{d}x$; б) $u = \sin 3x\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = x + 10$;
в) $u = (x+10)\sin 3x;\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$; г) $u = (x+10)\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = \sin 3x$.

6. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то справедливо равенство

а) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$; б) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\cdot b - F(x)\cdot a$;

в) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(a) + F(b) + C$; г) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

7. Вычислить $\int_1^1 \left(x^5 + \cos 4x - 4\right)\mathrm{d}x$.

8. Интеграл $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+5}$ равен

а) $\ln(2x+5) + C$; б) $\ln(2x+5)$;

в) $\frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 5$; г) $\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7$.

9. Вычислить $\int_{14}^{15} \mathrm{d}x$.

10. Какое выражение является числовым рядом?

а) 1, 2, 3, …408, …; б) $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 408\cdot ...$;

в) $1-2+3+...-408+...$; г) $1+x+2x^2+...+nx^4+...$.

11. Укажите ряд, для которого не выполняется необходимый признак сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12^n}$.

12. Если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(u_n\geq 0\right)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}$, то этот ряд

а) сходится; б) монотонно убывает;

в) расходится; г) условно сходится.

13. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-2\right)^n$ равен $R=3$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал

а) $\left(-3;\,3\right)$; б) $\left(-1;\,5\right)$; в) $\left(-5;\,1\right)$; г) $\left(-2;\,2\right)$.

14. Какой ряд сходится по признаку Лейбница?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n n^2$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^{2n}$.

Ответы на тест

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Вариант ответа	б	$\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x}{5}$	б	в	а	г	0

№	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Вариант ответа	в	1	в	а	а	б	б

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПОПЕЙКО Надежда Семеновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов-заочников первого курса
экономических специальностей

В 2 частях

Часть 2

Редактор Е.О. Коржуева
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 29.09.2011.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 2,73. Тираж 200. Заказ 373.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.