УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ С ПОМОЩЬЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Листопад В.В, Шоха В.П.
Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина, vlystopad@ukr.net

1) Задача распределения однородных ресурсов

Транспортная задача является типичной задачей линейного программирования, поэтому ее решение можно получить обычным симплекс-методом и с помощью информационных технологий. Специфическая структура транспортной задачи дает возможность получать альтернативный метод отыскания оптимального плана в виде вычислительной процедуры, которая проще симплекс-метода. Транспортная задача принадлежит к типу распределительных задач линейного программирования. Экономическое содержание таких задач может рассматривать разнообразные проблемы, которые не связаны с перевозкой грузов, как, например, задачи оптимального размещения производства, складов, оптимального назначения, распределения ресурсов и др.[2, с.184-254]. Рассмотрим решение задачи распределения ресурсов (однородных, пропорциональных и разных) с помощью функции-оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ с электронных таблиц Ms Excel.

Классическая транспортная задача есть простой задачей распределения одного ресурса, где матрица D не задана и не применяется, потому, что ресурс у всех поставщиков один и тот же, полностью одинаковый, например, щебень или песок из карьера или финансы при расчетах и др.[1, с.151-157]

Постановка задачи

В реальных задачах распределения требование одинаковости есть серьезным недочетом, потому что для удовлетворения спроса применяются разные транспортные средства, оборудование, сырье и др. специфическими свойствами, технологическими и другими параметрами. Тот же песок, который развозится, не одинаковый на разных карьерах, он должен отличаться для приготовления бетона, раствора или для подсыпки дорог. Поэтому возникает необходимость учитывать эти особенности и для этого применяется матрица норм D, которая есть промежуточно-согласующим звеном между запасами ресурсов и спросом.

Рассмотрим три варианта использования этой матрицы для распределения ресурсов:

1) Однородных,
2) Пропорциональных,
3) Полностью разных.

Специфика задания однородных ресурсов: для каждого $i-$го ресурса дополнительно задано показатель, d_i который позволяет использовать однородные и полностью взаимозаменяемые ресурсы для однородных спросов, этот показатель указывает удельную норму применения, то есть, какой спрос может удовлетворить единица определенного ресурса. Приведем пример в котором ресурсами есть машино-часы универсальных машин, например экскаваторы, а показателем d_i - продуктивность $i-$й машины, которая не зависит от типа землекопных работ. В этой модели благодаря однородности ресурсов и работ матрица D представлена своим первым столбцом, то есть вектором.

Пример 1.

Найти оптимальное распределение трех машин (поставщиков) по четырем работам (потребители) , при условии поставки заданных объемов (спрос) и чтобы общая стоимость выполнения всех работ была минимальной.

Исходные данные:

- ✓ Матрица себестоимости работ (у.е./м^3)
- ✓ Вектор ресурсов машин (часы)
- ✓ Вектор продуктивности машин (м^3/час)
- ✓ Вектор объемов работ (м^3).

Таблица 1 – Данные примера 1

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Распределение машин по работам**					
2		Работа	Работа	Работа	Работа	Ресурс	Продуктивность
3		1	2	3	4	(часы)	($м^3$/час)
4	Машина 1	2	1	0,5	1,2	240	30
5	Машина 2	0,8	1,2	0,9	0,8	160	55
6	Машина 3	0,5	1	0,6	0,9	150	18
7	Объем $м^3$	500	2000	3000	8000		

Найти:

<u>Прямая задача</u>

- План распределения машино-часов по работам (часы);
- Общую стоимость выполнения всех работ (ЦФ).

<u>Двоистая задача</u>

Оценки:

- Ограничений продуктивностей машин;
- Объемов работ.

Математическая модель

I. Найти матрицу распределения $X=\{x_{ij}\}, i=1,2,3; j=\overline{1,4},$ где: $x_{ij}-$ количество часов работы $i-$ машины для выполнения $j-$й работы, такую, чтобы

II. Общие расходы $Z=2x_{11}+x_{12}+0,5x_{13}+...+0,9x_{34}\to\min$

III. При ограничениях:

(3.1) для объемов работ:

$30x_{11}+55x_{21}+18x_{31}=5000$ (все машины на 1-й работе)

$30x_{12}+55x_{22}+18x_{32}=2000$ (все машины на 2-й работе)

$30x_{13}+55x_{23}+18x_{33}=3000$ (все машины на 3-й работе)

$30x_{14}+55x_{24}+18x_{34}=8000$ (все машины на 4-й работе)

(3.2) для ресурсов машин

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 240$ (рабочее время 1-й машины не превышает ее ресурса)

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 160$ (рабочее время 2-й машины не превышает ее ресурса)

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 240$ (рабочее время 3-й машины не превышает ее ресурса)

и предельных условий: все $x_{ij}\ge 0$.

Табличная модель

После ввода исходных данных формируем:

- Матрицу распределения;
- Вектор Всего, его элементы – суммы порядкам этой матрицы;
- Вектор Резерв, его элементы: разница Ресурс – Всего;
- Вектор-строка Выполнено, его элементы - сумма произведений столбцов матрицы распределения и вектора продуктивности;
- ЦФ – сумма произведений матриц распределения и затрат.

Определяем место для теневых цен, которые будут получены из *отчета по устойчивости.* Воспользуемся функцией ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Таблица 2 – Результаты решения примера 1

10		Работа	Работа	Работа	Работа	Всего	Резерв	Т-цена
11		1	2	3	4	(часы)		
12	Машина 1	0,0	66,7	100,0	50,0	216,7	23,3	0
13	Машина 2	41,8	0	0	118,2	160,0	0,0	-1,4
14	Машина 3	150,0	0	0	0	150,0	0,0	-0,2
15	Выполненс $м^3$	5000	2000	3000	8000	379,7		
16	Т- цена	0,04	0,03	0,02	0,04			

Прямая задача: План (B12:E14), общие расходы 379,7 у.е. 1-я машина недогружена, ее резерв составляет 23,3 часа.

Двоистая задача:

- Теневые цены полностью использованных ресурсов2-й та 3-й машин (с минусом) указывают, что с увеличением их ресурса общие расходы уменьшатся, более «выгодной» есть вторая машина, которая могла бы работать с большим часовым ресурсом.
- Теневые цены объемов работ показывают, как возрастаю то общие расходы при увеличении объемов работ, 1-я и 4-я работы наиболее затратные.

2) Задача распределения пропорциональных ресурсов

Особенности: Ресурсы и спрос неоднородны, но матрица $D = \{d_{ij}\}$ с пропорциональными строчками устанавливает связи между единицами ресурсов и спроса. Элементы этой матрицы определяются следующим образом: $d_{ij} = k_i d_{1j}$, где масштабный коэффициент k_i - индекс $i-$го рядка (для первого рядка 0), с помощью которого простыми вычислениями можно определить все рядки матрицы по заданному первому (базисному) рядку. В примере ресурсами будут машино-часы универсальных , например, энергетических агрегатов, технологические параметры каждого $i-$го из них (продуктивность) относительно $j-$го спроса d_{ij} определяются с помощью параметров d_{1j} первого порядка «базисным» станком с учетом соответствующего $i-$го индекса k_i.

Пример 2.

Найти оптимальное распределение троих станков (поставщики) для изготовления четырьох продуктов (потребители) , при условии выполнения запланированных объемов (спрос) общие затраты должны быть минимальными.

Исходные данные:

- Матрица затрат (у.е./шт);
- Матрица продуктивности (шт./час) заданная первым рядком и вектором индексов;
- Вектор ресурсов (час);
- Вектор запланированного выпуска (шт).

Таблица 3 – Данные примера 2

	A	B	C	D	E	F
1	**Пропорциональное распределение станков по продуктам**					
2	Себестоимость и ресурсы					
3		Продукт	Продукт	Продукт	Продукт	Ресурс
4		1	2	3	4	(часы)
5	Станок 1	2	1	0,5	1,2	240
6	Станок 2	0,8	1,2	0,9	0,8	160
7	Станок 3	0,5	1	0,6	0,9	150
8	План (шт)	3000	15000	4500	1500	
9	Продуктивность (матрица $\boxed{D}$)					
10		Продукт	Продукт	Продукт	Продукт	Индекс
11		1	2	3	4	до1-го
12	Станок 1	30	50	30	20	0
13	Станок 2	60	100	60	40	2
14	Станок 3	18	30	18	12	0,6

Найти:

- План оптимального распределения (часы);
- Общие затраты (ЦФ)

Двоистая задача:

Оценки ограничений:

- Временных ресурсов;
- объемов выпуска.

Математическая модель

I. Найти матрицу распределения $X = \{x_{ij}\}, i = 1,2,3; j = \overline{1,4},$ где: x_{ij} – количество часов работы i – го станка для изготовления j – го продукта, такую, чтобы

II. Общие расходы $Z = 2x_{11} + x_{12} + 0,5x_{13} + \ldots + 0,9x_{34} \rightarrow \min$

III. При ограничениях:

(3.1) для объемов работ:

$30x_{11} + 60x_{21} + 18x_{31} = 3000$ (все станки для 1-го продукта)

$50x_{12} + 100x_{22} + 30x_{32} = 15000$ (все станки для 2-го продукта)

$30x_{13} + 60x_{23} + 18x_{33} = 4500$ (все станки для 3-го продукта)

$20x_{14} + 40x_{24} + 12x_{34} = 1500$ (все станки для 4-го продукта)

(3.2) для ресурсов (часы)

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 240$ (рабочее время 1-го станка не превышает его ресурса)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 150$ (рабочее время 2-го станка не превышает его ресурса)

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 150$ (рабочее время 3-го станка не превышает его ресурса)

и предельных условий: все $x_{ij} \geq 0$.

Табличная модель

Формируем:

- Матрицу продуктивности (вычисляем за первым рядком и вектором индексов);
- Матрицу распределения;
- Столбик Использовано, его элементы – сумы по рядкам этой матрицы;
- Столбик Резерв, его элементы: разность Ресурс-Использовано;
- Рядок Изготовлено, его элементы – сумма произведение одноименных столбцов продуктивности и матрицы распределения;

- (ЦФ), ее значение – сумма произведений матрицы затрат и распределения, критерий минимум.

Табличная модель

После ввода исходных данных формируем:

- Матрицу продуктивности (вычисляем за первым рядком и вектором индексов);
- Матрицу распределения;
- столбик Использовано, его элементы – суммы порядкам этой матрицы;
- столбик Резерв, его элементы: разница Ресурс – Использовано;
- рядок Изготовлено, его элементы - сумма произведений одноименных столбцов продуктивности и матрицы распределения;
- ЦФ – сумма произведений матриц распределения и затрат, критерий – минимум.

Определяем место для теневых цен, которые будут получены из *отчета по устойчивости.*

Таблица – Результаты решения примера 2

17	Распределение (часы)							
18		Продукт	Продукт	Продукт	Продукт	Использовано	Резерв	Т-цена
19		1	2	3	4			
20	Станок 1	**0**	**90**	**150**	**0**	240	0	-0,03
21	Станок 2	**7,5**	**105**	**0**	**37,5**	150	0	-0,87
22	Станок 3	**141,7**	**0**	**0**	**0**	141,7	8,3	0
23	План (шт)	3000	15000	4500	1500	ЦФ=	**397,8**	
24	Т цена	0,028	0,021	0,018	0,042			
25								
26	Производственная программа (штук)							
27	Станок 1		4500	4500				
28	Станок 2	450	10500		1500			
29	Станок 3	2550						
30		3000	15000	4500	1500			

<u>Прямая задача:</u> план распределения (B20:E22), общие затраты 397,8 у.е.; третий станок имеет резерв 8,3 часа.

<u>Двоистая задача:</u>

- Теневые цены полностью загруженных 1-го и 2-го станков (с минусом) указывают, что с увеличением их ресурса общие расходы уменьшатся, более «выгодной» есть второй станок (-0,87 на каждый дополнительный час).
- Теневые цены плановых заданий по изготовлению продукции показывают, как возрастают общие расходы при увеличении этих показателей, 4-й продукт наиболее «невыгодный).

Имея почасовое распределение ресурсов и продуктивности станков, строим матрицу Производственная программа (шт.), где определяем количество продуктов каждого типа, изготовленных на соответствующих станках, внизу – контрольная строчка.

Замечание Суммы по рядкам этой матрицы не находить, поскольку продукты неоднородные**.**

3) Общая задача распределения ресурсов

<u>Особенности:</u> все ресурсы и спрос неоднородные, но с помощью матрицы $D = \{d_{ij}\}$ с произвольными коэффициентами устанавливаются связи между спросом и предложением.

В приведенном примере с проблематики аграрного менеджмента распределяются земельные ресурсы для выращивания разных с/х культур, где элементами матрицы D

является урожайность каждой культуры на определенном участке. Это универсальная модель распределения ресурсов.

Пример 3.

Найти оптимальное распределение 3-х земельных участков по 4-м с/х культурам при условии получения заданных объемов урожая и с минимальными общими затратами.

Исходные данные и постановка задачи:

- Матрица себестоимости или затрат (у.е./ц);
- Матрица урожайности (ц/га);
- Вектор земельных ресурсов (га);
- Вектор запланированного урожая (ц).

Найти:

Прямая задача

- План оптимального распределения земельных ресурсов(часы);
- Общие затраты (ЦФ)

Двоистая задача:

Оценки ограничений:

- земельных ресурсов (площадей участков);
- объемов урожая культур.

Математическая модель

I. Найти матрицу распределения $X = \{x_{ij}\}, i = 1,2,3; j = \overline{1,4},$ где: $x_{ij} -$ размер (га) $i-$ го участка для выращивания $j-$ой культуры, так, чтобы

II. Общие расходы $Z = 2x_{11} + x_{12} + 0,5x_{13} + \ldots + 0,9x_{34} \to \min$

III. При ограничениях:

(3.1) для с/х культур:

$12x_{11} + 10x_{21} + 15x_{31} = 500$ (все участки для 1-й культуры)

$16x_{12} + 12x_{22} + 16x_{32} = 200$ (все участки для 2-й культуры)

$16x_{13} + 20x_{23} + 24x_{33} = 250$ (все участки для 3-й культуры)

$20x_{14} + 40x_{24} + 12x_{34} = 1500$ (все участки для 4-й культуры)

(3.2) для земельных ресурсов (участков)

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 30$ (занятые площади 1-й культуры не превышает ее ресурса)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 50$ (занятые площади 2-й культуры не превышает ее ресурса)

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 20$ (занятые площади 3-й культуры не превышает ее ресурса) и предельных условий: все $x_{ij} \ge 0$.

Табличная модель

Формируем:

- Матрицу продуктивности (вычисляем за первым рядком и вектором индексов);
- Матрицу распределения;
- Столбик Использовано, его элементы – сумы по рядкам этой матрицы;
- Столбик Резерв, его элементы: разность Ресурс-Использовано;
- Рядок Изготовлено, его элементы – сумма произведение одноименных столбцов продуктивности и матрицы распределения;
- (ЦФ), ее значение – сумма произведений матрицы затрат и распределения, критерий минимум.

Табличная модель

После ввода исходных данных формируем:

- Матрицу распределения B(16:E18), неизвестные;

- столбик Использовано, его элементы – суммы порядкам этой матрицы;
- столбик Резерв, его элементы: разница Площадь – Использовано;
- рядок Урожай, сумма произведений одноименных столбцов урожайности и матрицы распределения;
- ЦФ (F19)-сумма произведений матриц затрат и распределения, критерий – минимум.

Таблица 5 – Исходные данные и результаты результаты решения примера 3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Рраспределение земельных ресурсов по культарам**							
2	Себестоимость, план и ресурсы							
3		Культура 1	Культура 2	Культура 3	Культура 4	Площадь (га)		
4	Участок 1	2	2,5	3	3	30		
5	Участок 2	2,4	3	3,2	0,5	50		
6	Участок 3	1,8	2	2,5	1,1	20		
7	План	500	200	400	250			
8	Урожайность (матрица $\boxed{D}$)							
9		Культура 1	Культура 2	Культура 3	Культура 4			
10	Участок 1	12	15	16	25			
11	Участок 2	10	12	20	15			
12	Участок 3	15	16	24	23			
13								
14	Распределение							
15		Культура 1	Культура 2	Культура 3	Культура 4	Использовано	Резерв	Т-цена
16	Участок 1	**17,5**	**12,5**	**0**	**0**	30	0	-0,5
17	Участок 2	**0**	**0**	**19,2**	**16,7**	35,9	14,1	0
18	Участок 3	**19,3**	**0**	**0,7**	**0**	20	0	-1,3
19	Урожай	500	200	400	250	ЦФ=	**172,5**	
20	Т цена	0,31	0,19	0,16	0,03			

Прямая задача: план распределения (B16:E18), общие затраты 172,5 у.е., 2-й участок имеет резерв, который составляет 14,1 га.

Двоистая задача:

- Теневые цены полностью загруженных 2-го и 3-го участков (с минусом) указывают, что с увеличением их ресурса общие расходы уменьшатся, более «выгодным» есть третий участок (-1,3).
- Теневые цены плановых заданий по уборке культур показывают, как возрастают общие расходы при увеличении этих показателей, 1-я и 2-я культуры наиболее «невыгодны»).

Література

1. Кузьмічов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel:Навч. посібн.-К.:Вид-во Європ. Ун-ту, 2005.-320 с.
2. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник.-К.:КНЕУ,2005-452с.