Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский национальный технический университет

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра «Высшая математика № 1»

СПЕЦМОДУЛЬ «МАТЕМАТИКА»

ПРАКТИКУМ

для студентов инженерно-технических специальностей

Минск, 2019

УДК 517.958(075.8)
ББК 22.311я7
М 29

Составитель:

В.С. Марцинкевич

Рецензенты:

А.В.Метельский – доктор физ.-матем.наук, профессор

З.Н.Примичева – кандидат физ.-матем.наук, доцент

Рекомендовано учебно-методическим объединением в области автоматизации технологических процессов, производств и управления.

Спецмодуль «Математика»: практикум для студентов инженерно-технических специальностей составлен в соответствии с программой курса «Математика» для инженерных специальностей. В нем даны задания для аудиторной и домашней работы по разделу математики «Прикладные методы уравнений в частных производных». Для всех заданий даны ответы и указания по решению. Излагаемый материал разбит по занятиям, каждое из которых посвящено отдельной теме.

Практикум будет полезен при организации практических занятий, а также может использоваться для самостоятельной работы студентов.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-80-75
E-mail: matematics1@bntu.by
Регистрационный № БНТУ/ФИТР48-06.2019

СОДЕРЖАНИЕ

Занятие 1

Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Аудиторные задания

1.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi,\pi)$:

а) $f(x)=\begin{cases}-x, -\pi<x\le 0;\\ 2x,\ 0<x<\pi.\end{cases}$ б) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$;

в) $f(x)=|x|$; г) $f(x)=\pi+x$.

1.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0,\pi)$:

а) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1;\\ 0, & 1<x<\pi.\end{cases}$

б) по синусам, если $f(x)=\cos\frac{x}{\pi}$;

в) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases}1-2x, 0<x\le\frac{1}{2};\\ 0, \quad \frac{1}{2}<x<\pi.\end{cases}$

1.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-l,l)$:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0;\\ x, & 0<x<1.\end{cases}$ б) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ l=\frac{1}{2}$.

1.4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0,l)$:

а) по косинусам, если $f(x)=1-x,\quad l=1$;

б) по косинусам, если $f(x)=x+x^2,\quad l=1$;

в) по синусам, если $f(x)=1+x,\quad l=2$;

г) по синусам, если $f(x)=1-x^2,\quad l=2$.

Домашние задания

1.5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi,\pi)$:

а) $f(x)=\begin{cases}5x, & -\pi<x\le 0;\\ -x, & 0<x<\pi.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi<x\le 0;\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$

в) $f(x)=\mathrm{e}^{-x/2}$.

1.6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0,\pi)$:

а) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x<1;\\ 0, & 1\le x<\pi.\end{cases}$

б) по синусам, если $f(x)=\cos\pi x$;

в) по синусам, если $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

1.7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-l,l)$:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0,\\ x, & 0<x<3,\end{cases}$ $l=3$;

б) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$, $l=1$; в) $f(x)=|x|$, $l=2$.

1.8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0,l)$:

а) по косинусам, если $f(x)=x$, $l=3$;

б) по синусам, если $f(x)=2+3x$, $l=2$;

в) по косинусам, если $f(x)=|x|$, $l=3$.

Ответы:

1.1. а) $\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{2n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$;

б) $\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n\sin nx}{4n^2-1}$; **в)** $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;

г) $\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

1.2. а) $\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}\cos nx\right)$; **б)** $2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1-(n\pi)^2}\left((-1)^n\cos 1-1\right)\sin nx$;

в) $\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{2}+16\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n/4}{n}\right)^2\cos nx\right)$.

1.3. а) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi(2n+1)x)}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\pi nx)}{n}$;

б) $2\mathrm{sh}\dfrac{1}{2}\left(1+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1/2\left(\cos(2\pi nx)-\pi n\sin(2\pi nx)\right)}{1+(2\pi n)^2}\right)$;

в) $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin((2n+1)\pi x)$.

1.4. а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$; **б)** $\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x$;

в) 4.3. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-3(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$;

г) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1-(-1)^n\right)\sin n\pi x\right)$.

1.5. а) $-\frac{3}{2}\pi+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$;

б) $-1+\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$;

в) $\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2+1}(2\cos nx+4n\sin x)\right)$.

1.6. а) $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n/2}{n}\right)^2\cos nx\right)$.

Занятие 2

Классификация и приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка

Аудиторные задания

2.1. Привести к каноническому виду следующие дифференциальные уравнения:

2.1.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-21\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}+5u=x^2$;

2.1.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=xy$;

2.1.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}-3u=x+y^2$;

2.1.4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-3u=0$;

2.1.5. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}-3u=x^2$;

2.1.6. $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}-u=0$;

2.1.7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}-5u=0$;

2.1.8. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-5u=0$;

2.1.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}-7u=0$;

2.1.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}-3u=0$.

Домашние задания

2.2. Привести к канонической виду следующие дифференциальные уравнения:

2.2.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$;

2.2.2. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2u=0$;

2.2.3. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$;

2.2.4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

2.2.5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

2.2.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

2.2.7. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

2.2.8. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

2.2.9. $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

2.2.10. $\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Ответы:

2.1.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\dfrac{10}{112}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{11}{112}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+\dfrac{5}{112}u-\dfrac{1}{112}\left(\dfrac{\eta-\xi}{10}\right)^2$, где $\xi=y-3x$ и $\eta=y+7x$.

2.1.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\dfrac{\partial u}{\partial\eta}-u+(\xi-\eta)\eta$, где $\xi=y+x$ и $\eta=y$.

2.1.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\xi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\dfrac{\partial u}{\partial\eta}-u+\eta+(\xi-\eta)^2$, где $\xi=y-x$ и $\eta=x$.

2.1.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\left(3u-\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-9\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/16$, где $\xi=y-3x$ и $\eta=y+x$.

2.1.5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\left(-3u+\sqrt{3}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\sqrt{3}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/12$, где $\xi=y+\left((1-\sqrt{3})/2\right)x$ и $\eta=y+(1+\sqrt{3}/2)x$.

2.1.6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\left(-8u-(27-\sqrt{17})\dfrac{\partial u}{\partial\xi})-(27+\sqrt{17})\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/68$, где $\xi=y+\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{\sqrt{17}}{8}\right)x,\quad \eta=y+\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{\sqrt{17}}{8}\right)x$.

2.1.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=5u-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$, где $\xi=y+x$ и $\eta=y$.

2.1.8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\left(5u+2\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/8$, где $\eta=y$, $\xi=y-2x$.

2.1.9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\left(74-9\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+3\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/9$, где $\xi=y+3x$ и $\eta=y$.

2.1.10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\left(34+9\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+9\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/4$, где $\xi=y+2x$ и $\eta=y$.

2.2.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\xi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\left(4u-7\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\sqrt{7}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/7$, где $\xi=y-3x/2$ и $\eta=\sqrt{7}x/2$.

2.2.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\xi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\left(-6u-9\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-3\sqrt{5}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/5$, где $\xi=y+4x/3$, $\eta=\sqrt{5}x/3$.

2.2.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\xi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\eta}=\left(6u+9\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-3\sqrt{2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big/2$, где $\xi=y-4x/3$, $\eta=\sqrt{2}x/3$.

2.2.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0$, где $\xi=x+y$ и $\eta=3x-y$.

2.2.5. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$, где $\xi=2x-y$ и $\eta=x$.

2.2.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\eta-\xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$, где $\xi=2x+\sin x+y$.

2.2.7. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\xi-\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{22}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$, где $\xi=x^2-y^2$, $\eta=x^2$.

2.2.8. $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$, где $\xi=x, \eta=\frac{2}{3}y^{3/2}$ $(y>0)$.

2.2.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$, где $\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

2.2.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{25}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$, где $\xi=y\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \eta=y$.

Занятие 3

Нахождение общего решения уравнений с частными производными второго порядка

Аудиторные задания

3.1. Найти общее решение гиперболического уравнения:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3.2. Найти общее решение параболического уравнения:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

3.3. Найти общее решение эллиптического уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Домашние задания

3.4. Найти общее решение гиперболического уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-21\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3.5. Найти общее решение параболического уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}-6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}-12\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

3.6. Найти общее решение эллиптического уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-24\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+26\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+13\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+18\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Ответы:

3.1. а) $u(x,y)=C_1(y-5x)+C_2(y+x)$;

б) $u(x,y)=C_1(y-5x)+C_2(y+3x)$;

в) $u(x,y)=C_1(y-x)+C_2(y+3x)$;

г) $u(x,y)=C_1(y-2x)+C_2(y+6x)$.

3.2. а) $u(x,y)=C_1(y-x)+C_2(y-x)\mathrm{e}^{-y}$;

б) $u(x,y)=C_1(y-2x)+C_2(y-2x)\mathrm{e}^{-y/2}$;

в) $u(x,y) = C_1(y-2x) + C_2(y-2x)\mathrm{e}^{-y^2}$;

г) $u(x,y) = C_1(y-3x) + C_2(y-3x)\mathrm{e}^{-2y/3}$.

3.3. **а)** $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y-2x+xi)$, где $f(z)$ − произвольная аналитическая функция;

б) $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y-x+2xi)$;

в) $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y+x+\sqrt{2}xi)$;

г) $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y-x+3xi)$.

3.4. **а)** $u(x,y) = C_1(y-3x) + C_2(y-x)$;

б) $u(x,y) = C_1(y-5x) + C_2(y-x)$;

в) $u(x,y) = C_1(y+2x) + C_2(y+4x)$;

г) $u(x,y) = C_1(y-7x) + C_2(y+3x)$.

3.5. **а)** $u(x,y) = C_1(y+3x) + C_2(y+3x)\mathrm{e}^{2y/3}$;

б) $u(x,y) = C_1(y-x) + C_2(y-x)\mathrm{e}^{y}$;

в) $u(x,y) = C_1(y-4x) + C_2(y-4x)\mathrm{e}^{-3y/4}$;

г) $u(x,y) = C_1(y+4x) + C_2(y+4x)\mathrm{e}^{-y/4}$.

3.6. **а)** $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y+x+5xi)$;

б) $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y+2x+2xi)$,

в) $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y-3x+2xi)$,

г) $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(y+3x+3xi)$.

Занятие 4

Решение задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка

Аудиторные задания

4.1. Решить задачу Коши для гиперболического уравнения второго порядка:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t \in (0,\infty), x \in (-\infty,\infty)$, удовлетворяющую начальным условиям $u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dfrac{1}{1+x^2}$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$;

в) $\dfrac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

Домашние задания

4.2. Решить задачу Коши для гиперболического уравнения второго порядка:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = 0, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = 0, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$,

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dfrac{x^2}{1+x^6}$.

Ответы:

4.1. а) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+2t)^2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}(x+2t) + C_1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-2t)^2} -$
$- \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}(x-2t) + C_2$;

б) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(x+t)^2} + C_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(x-t)^2} + C_2$;

в) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+\sqrt{3}t)^2} + C_1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-\sqrt{3}t)^2} + C_2$;

г) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+\sqrt{2}t) + C_1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-\sqrt{2}t) - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1+\sqrt{2}t) -$
$- \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1-\sqrt{2}t) + C_2$.

4.2. а) $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{x+\sqrt{3}t} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{x-\sqrt{3}t}$;

б) $u(x,t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-(x+\sqrt{2}\,t)^2/2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-(x-\sqrt{2}\,t)^2/2}$;

в) $u(x,t) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+t)^2} + -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-t)^2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+t)^2/2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-t)^2/2}$;

г) $u(x,t)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(x+\sqrt{2}t)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+(x-\sqrt{2}t)^2}+\frac{\sqrt{2}}{12}\operatorname{arctg}(x+\sqrt{2}t)^3-$
$-\frac{\sqrt{2}}{12}\operatorname{arctg}(x-\sqrt{2}t)^3$.

Занятие 5

Решение задачи Коши для параболических уравнений второго порядка

Аудиторные задания

5.1. Решить задачу Коши для параболического уравнения второго порядка:

а) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-x}, x\in(-\infty,+\infty)$;

б) $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2-2x}$;

в) $\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-2x^2+x}$;

г) $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-4x^2-3x}$.

Домашние задания

5.2. Решить задачу Коши для параболического уравнения второго порядка:

а) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-2x^2+5x}$;

б) $\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2+3x}$;

в) $\frac{\partial u}{\partial t}=5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-3x^2-x}$;

г) $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), u(x,0)=\mathrm{e}^{-4x^2+x}$.

Ответы:

5.1. **а)** $u(x,t)=\mathrm{e}^{t-x}$;

б) $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\mathrm{e}^{\frac{t(2x-2)^2}{1+4t}-x^2-2x}$;

в) $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+24t}}\,\mathrm{e}^{\frac{t(2x-2)^2}{1+4t}-x^2-2x}$;

г) $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+64t}}\,\mathrm{e}^{\frac{4t(8x-3)^2}{1+64t}-4x^2-3x}$.

5.2. **а)** $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+8t}}\,\mathrm{e}^{\frac{t(4x+5)^2}{1+8t}-2x^2+5x}$;

б) $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+12t}}\,\mathrm{e}^{\frac{3t(2x+3)^2}{1+12t}-x^2+3x}$;

в) $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+60t}}\,\mathrm{e}^{\frac{5t(6x-1)^2}{1+60t}-3x^2-x}$;

г) $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+32t}}\,\mathrm{e}^{\frac{2t(8x+1)^2}{1+32t}-4x^2+x}$.

Занятие 6

Задача Штурма-Лиувилля

Аудиторные задания

6.1. Решить задачу Штурма-Лиувилля уравнения, удовлетворяющего однородным краевым условиям:

а) $y''-\lambda y=0,\ y(0)=y(l)=0$; б) $y''-\lambda y=0,\ y'(0)=y'(l)=0$;

в) $-y''+2y=\lambda y,\ y'(0)-y(0)=0,\ y'(1)+y(1)=0$;

г) В прямоугольнике решить задачу Штурма-Лиувилля

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\lambda u,\quad 0\le x\le a,\quad 0\le y\le b,\quad u(0,0)=u(a,b)=0.$$

Домашние задания

6.2. Решить задачу Штурма-Лиувилля уравнения, удовлетворяющего однородным краевым условиям:

а) $y''-\lambda y=0,\ y(0)=y'(0)=0$;

б) $y''-\lambda y=0,\ y'(0)=y(l)=0$;

в) $y''(r)+\dfrac{1}{r}y'(r)+\omega^2 y(r)=0,\ y(R)=0$;

г) в круге решить задачу Штурма-Лиувилля

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\lambda u=0, \quad x^2+y^2<r_0^2, \quad (1); \quad u(x',y')=0, \quad x^{12}+y^{12}=r_0^2, \quad (2).$$

Ответы:

6.1. а) $\lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{l}\right), \quad y_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad k\in N$;

б) $\lambda_0=0, \quad y_0(x)=1, \quad \lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad y_k(x)=\cos\frac{k\pi x}{l} \quad k\in N$;

в) – если $\lambda<2$, то двум действительным различным характеристическим корням $\eta_{1,2}=\pm\sqrt{2-\lambda}$ соответствует действительное общее решение $y(x)=C_1e^{\sqrt{2-\lambda x}}+C_2e^{\sqrt{2-\lambda x}}, \quad \forall C_1,C_2\in R$;

– если $\lambda=2$, то одному корню $\eta_1=\eta_2=0$ кратности 2 соответствует действительное общее решение $y(x)=C_1x+C_2, \quad \forall C_1,C_2\in R$;

– если $\lambda>2$, то двум комплексно-сопряженным корням $\eta_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda-2}$ соответствует действительное общее решение $y(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda-2}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda-2x}, \quad \forall C_1,C_2\in R$;

г) собственные значения $\mu=(\pi k/a)^2, \quad k=1,2,...$ из общего решения $\mathrm{X}(x)=C_1\cos\sqrt{\mu}\,x+C_2\sin\sqrt{\mu}\,x, \quad C_1,C_2\in R$ при $C_1=0, \ C_1=1$ находим собственные функции: $x_k(x)=\sin\frac{\pi k}{a}x, \quad k=1,2,...$ задачи Штурма-Лиувилля $\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}(a)=0, \quad Y(0)=Y(b)=0$. Собственные значения и собственные функции для задачи Штурма-Лиувилля – $Y''(y)=\eta Y(y), \quad \eta\in R, \quad 0<y<b, \quad Y(0)=Y(b)$. Собственные значения и собственные функции для задачи Штурма-Лиувилля $-Y''(y)-\eta Y(y)=0, \quad \eta\in R, \quad 0<y<b, \quad Y(0)=Y(b)=0$ являются $\eta_m=(\pi m/b)^2$ и $Y_m(y)=\sin\frac{\pi m}{b}y, \quad m=1,2,...$. Следовательно, собственные значения и собственные функции исходной задачи Штурма-Лиувилля равны $\lambda_{k_1m}=\mu_k+\eta_m=\pi^2\left(\left(\frac{k}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2\right)$ и $u_{k,m}=\sin\frac{\pi k}{a}x\cdot\sin\frac{\pi m}{b}y, \quad k,m\in N$.

6.2. а) $\lambda_k=-\left(\frac{2k-1/\pi}{2l}\right)^2, \quad y_k(x)=\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \quad k\in N$;

б) $\lambda_k=-\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2, \quad y_k(x)=\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l} \quad k\in N$;

в) $\lambda_k = \left(\dfrac{\mu_r^{(0)}}{R}\right)^2$, $y_k(r) = J_0\left(\dfrac{\mu_k^{(0)}}{R} r\right)$, где $J_0(r)$ – функция Бесселя порядка нуль, а $\mu_k^{(0)}, \quad k \in N$ – ее нули, т.е. $J_0\left(\mu_k^{(0)}\right) = 0$;

г) – при $\eta < 0$ характеристические корни $\tau_{1,2} = \pm\sqrt{-\eta} < 0$ дают общее решение $\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-n}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{n}\varphi}, \quad \forall C_1, C_2 \in R$ для которого выполняется условие периодичности только при $C_1 = C_2 = 0$, т.е. $\Phi = 0$ и нет собственных значений и собственных функций;

– при $\eta = 0$ имеем общее решение $\Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2 \quad \forall C_1 C_2 \in R$, удовлетворяющее условию $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad \varphi \in R$ при $C_1 = 0$ и любом $C_2 \in R$. Таким образом, $\eta_0 = 0$ – собственное значение и собственная функция $\Phi_0(\varphi) = 1$;

– при $\eta > 0$ характеристическим корням $\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\eta}$ соответствует действительное общее решение $\Phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{n}\,\varphi + C_2 \sin\sqrt{n}\,\varphi, \quad \forall C_1, C_2 \in R$, которое будет периодической функцией с периодом 2π только тогда, когда $\sin\sqrt{\eta}\,\pi = 0$, т.е. $\eta_k = k^2, \quad k = 1,2,\ldots$ Этому каждому собственному значению $\eta_k = k^2$ соответствуют две собственные функции: $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi \quad k = 1,2,\ldots$. В итоге решениями исходной задачи Штурма-Лиувилля (1), (2) являются собственные значения $\lambda_{k,m} = \left(\mu_m^{(k)} / r_0\right)^2, \quad k = 1,2,\ldots, \; m = 1,2,\ldots$ и соответствующие им функции $\upsilon_{k,m}^{(1)} = J_k \dfrac{\mu_m^{(k)}}{r_0} r \cos\varphi, \; \upsilon_{k,m}^{(2)} = J_k \dfrac{\mu_m^{(k)}}{r_0} \sin\varphi \neq 1, \quad k = 1,2,\ldots, \; m = 1,2,\ldots$

Занятие 7

Метод разделения переменных для гиперболических уравнений второго порядка

Аудиторные задания

7.1. Найти отклонение $u(x,t)$ от положения равновесия закрепленной на конце $x = 0$ однородной горизонтальной струны, правый конец которой при $x = l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент времени струна имела форму $\dfrac{1}{15}\sin\dfrac{11\pi x}{2l}\cos\dfrac{4\pi x}{2l}$, начальные скорости отсутствовали.

7.2. Труба, открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью v. В момент времени $t = 0$ труба мгновенно останавливается. Определить смещение воздуха внутри трубы на расстоянии x от закрытого конца трубы.

7.3. Один конец стержня закреплен упруго, а другой свободен. Найти произвольные колебания стержня при произвольных начальных данных.

7.4. Найти колебания однородной струны $0 \le x \le l$ с закрепленными концами и сосредоточенной массой *M*, прикрепленной в точке $x = c$ струны, вызванные начальным смещением

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} h\dfrac{x}{c} \text{ при } 0 \le x \le c, \\ h\dfrac{l-x}{l-c} \text{ при } 0 \le x \le l, \end{cases}$$

где h – малое число. Начальные скорости точек струны равны нулю.

Домашние задания

7.5. Однородная струна длиной *l*, закрепленная на обоих концах, находится в прямолинейном положении равновесия. В некоторый момент времени, принимаемый за начальный, она получает в точке $x = c$ удар от молоточка, который сообщает этой точке постоянную скорость v_0. Найти отклонение $u(x,t)$ струны для любого момента времени.

Рассмотреть два случая:

а) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0, \text{если} \left|x - c\right| < \dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, \quad \text{если} \left|x - c\right| > \dfrac{\pi}{2h}. \end{cases}$$

Этот случай соответствует плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину $\dfrac{\pi}{h}$ и ударяющему в точке $x = c$.

б) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0 \cosh(x - c), \text{если} \left|x - c\right| < \dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{если} \left|x - c\right| > \dfrac{\pi}{2h}. \end{cases}$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку шириной $\dfrac{\pi}{h}$. Такой молоточек в центре интервала возбуждает наибольшую скорость.

7.6. Один конец стержня закреплен, а на второй действует сила *Q*. Найти продольные колебания стержня, если в начальный момент сила перестает действовать.

7.7. Найти свободные продольные колебания однородного цилиндрического стержня длиной *l*, у которого оба конца свободны.

7.8. Крутильными колебаниями стержня называются такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Вывести уравнение малых крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня и проинтегрировать его при условии, что один из концов стержня заделан, а на другой прикреплен диск.

Ответы.

7.1. $u(x,t)=\dfrac{1}{30}\left(\cos\dfrac{7\pi at}{2l}\sin\dfrac{7\pi x}{2l}+\cos\dfrac{15\pi at}{2l}\sin\dfrac{15\pi x}{2l}\right);$

7.2. $u(x,t)=\dfrac{8vl}{a\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

7.3. $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\mu_n at}{l}+b_n\dfrac{\mu_n at}{l}\right)\cdot\cos\dfrac{\mu_n x}{l},$

$$a_n=\frac{2}{l}\frac{\mu_n^2+\beta^2}{\mu_n^2+\beta^2+\beta}\int\limits_0^l\varphi_0(x)\cos\frac{\mu_n x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{2\left(\mu_n^2+\beta^2\right)}{a\mu_n\left(\mu_n^2+\beta^2+\beta\right)}\int\limits_0^l\varphi_1(x)\cos\frac{\mu_n x}{l}dx,$$

где $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_n$ – положительные корни уравнения $\mu\operatorname{tg}\mu=\beta$ $(\beta=hl)$.

7.4. $u(x,t)=\dfrac{8vl}{a\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{X}_n(x)\cos a\lambda_n t$, где $\mathrm{X}_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n c} & (0\le x<c),\\ \dfrac{\sin\lambda_n(l-x)}{\sin\lambda_n(l-c)} & (c<x\le l).\end{cases}$

где λ_n – корни уравнения $\operatorname{ctg}\lambda c+\operatorname{ctg}(l-c)=\dfrac{M\lambda}{\rho}.$

7.5. $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nX_n(x)\cdot\cos a\lambda_n t,$ где $\mathrm{X}_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n c} & (0\le x<c),\\ \sin\lambda_n(l-x) & (c<x\le l),\end{cases}$

где λ_n – корни уравнения $\operatorname{ctg}\lambda c+\operatorname{ctg}(l-c)=\dfrac{M\lambda}{\rho}.$

7.6. $u(x,t)=\dfrac{8Ql}{E\sigma\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cos\dfrac{(2n+1)\pi at}{2l}\cdot\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l},$

где σ – площадь поперечного сечения.

7.7. $a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_0^l(\varphi_0(x)+t\varphi_1(x))dx+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi at}{l\,l}+b_n\sin\dfrac{n\pi at}{l}\right)\cos\dfrac{n\pi x}{l\,l},$

где $a_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l(\varphi_0(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\dfrac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l(\varphi_1(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx.$

7.8. $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\mu_n at}{l}+b_n\sin\dfrac{\mu_n at}{l}\right)\cdot\sin\dfrac{\mu_n x}{l},$

где $a_n = \dfrac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \cdot \int\limits_0^l \varphi_0'(x) \cos \dfrac{\mu_n x}{l} dx,\;\; b_n = \dfrac{4l}{a\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \cdot \int\limits_0^l \varphi'(x) \cos \dfrac{\mu_n x}{l} dx,$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$– положительные корни трансцендентного уравнения

$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma \quad \left(\gamma = I \dfrac{k}{k_1}\right),$

k – момент инерции части стержня, имеющей единицу длины;

k_1 – момент инерции диска относительно оси вала;

I – полярный момент инерции поперечного сечения;

u – угол поворота сечения с абсциссой x.

Занятие 8

Метод разделения переменных для параболических уравнений второго порядка

Аудиторные задания

8.1. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l,\quad t>0)$, удовлетворяющее условиям $u(0,t)=u(l,t)=0\quad t>0$ и $u(x,0)=\begin{cases} x \text{ при } 0<x\le\frac{l}{2}, \\ l\text{-}x \text{ при } \frac{l}{2}<x<l. \end{cases}$

8.2. Дан тонкий однородный стержень длиной l, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x)=\frac{Cx(l-x)}{l^2}$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

8.3. Растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0=const$ диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x=0$ и $x=h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x=h$ и $x=l$. Определить процесс выравнивания концентрации, предполагая, что границы $x=0$ и $x=l$ непроницаемы для вещества.

8.4. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна нулю. На конце $x=l$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x=0$ она растет линейно со временем, так что $u(0,t)=At$, где A – постоянная. Найти распределение температур вдоль стержня при $t>0$.

Домашние задания

8.5. Решить задачу об остывании однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x,0)=\varphi(x)$, считая, что один конец теплоизолирован, а другой поддерживается при постоянной температуре u_0.

8.6. Дан однородный шар радиуса R, центр которого расположен в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t>0$.

8.7. Найти распределение температуры в однородном шаре радиуса R, внутри которого, начиная с момента времени $t=0$, действует источник тепла с постоянной плотностью Q, а поверхность поддерживается при температуре, равной нулю. Начальная температура шара равна нулю.

8.8. Сфера радиуса R содержит растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 = const$. Концентрация на поверхности сферы поддерживается постоянной, равной $C_1 > C_0$. Найти количество абсорбированного вещества в момент времени $t > 0$.

Ответы.

8.1. $u(x,t) = \dfrac{4l}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$.

8.2. $u(x,t) = \dfrac{8C}{\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^3} \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$.

8.3. $C(x,t) = C_0 \left(\dfrac{h}{l} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{n\pi h}{l}}{n} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt} \cdot \cos \dfrac{n\pi x}{l} \right)$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ при условиях $\left.\dfrac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l} = 0,\ C(x,0) = \begin{cases} C_0 & \text{при } 0 < x < h, \\ 0 & \text{при } h < x < l. \end{cases}$

8.4.

$$u(x,t) = At\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{l^2 A}{6a^2}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right) + \frac{2l^2 A}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-n^2\pi^2 a^2}{l^2}}{n^3} t \Big/ n^3 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Указание. Решение следует искать в виде суммы $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где u_1 есть решение уравнения

$\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $u_1(0,t) = At; u_1(l,t) = 0$, а u_2 есть решение того же уравнения при условиях:

$u_2(0,t) = 0; u_2(l,t) = 0, u_2(x,0) = -u_1(x,0)$.

8.5. $u(x,t) = At\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) - \dfrac{l^2 A}{6a^2}\left(\left(\dfrac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x}{l}\right)\right) + \dfrac{2l^2 A}{\pi^3 a^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin \dfrac{n\pi x}{l}$.

Указание. Решение следует искать в виде суммы $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где u_1 есть решение уравнения $\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $u_1(0,t) = At; u_1(l,t) = 0$, а u_2 есть решение того же уравнения при условиях:

$u_2(0,t) = 0; u_2(l,t) = 0, u_2(x,0) = -u_1(x,0)$.

8.6. $u(r,t)=\dfrac{2}{Rr}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{R^2}t}\cdot\sin\dfrac{n\pi r}{R}\cdot\int\limits_0^R\rho\, f(\rho)\sin\dfrac{n\pi\rho}{R}\,d\rho.$

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, где $v=ru,\ a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$ при условиях $v(0,t)=0, v(R,t)=0, v(r,t)=0=rf(r)$.

8.7. $u(r,t)=\dfrac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right)+\dfrac{2QR^3}{\pi^3 kr}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\cdot e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{R^2}t}\cdot\sin\dfrac{n\pi r}{R}.$

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{Q}{c\rho}$ при условиях $u(0,t)$ равно конечной величине $u(R,t)=0, u(r,0)=0$.

8.8. $Q(t)=4\pi\int\limits_0^R Cr^2dr-\dfrac{4\pi}{3}R^3C_0=\dfrac{4\pi}{3}R^3(C_1-C_0)\left(1-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\pi^2}e^{-\left(\frac{n\pi}{R}\right)Dt}\right).$

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\dfrac{\partial C}{\partial t}=D\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial C}{\partial r}\right)$ при условиях $C(R,t)=C_1, C(x,0)=C_0$. Ввести новую функцию v, положив $v=rC$
.

Занятие 9

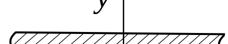
Метод разделения переменных для эллиптических уравнений второго порядка

Аудиторные задания

9.1. Найти решение уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в прямоугольнике $D:\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b$, если оно на контуре принимает заданные значения $u\big|_{x=0}=\varphi_0(y),\ u\big|_{x=a}=\varphi_1(y)\ \ (0\le y\le b)$, $u\big|_{y=0}=\psi_0(y),\ u\big|_{y=b}=\psi_1(x)\ \ (0\le x\le b)$, причем $\varphi_0(0)=\psi_0(0)\ \ \varphi_0(b)=\psi_1(0)$, $\varphi_1(0)=\psi_0(a)\ \ \varphi_1(b)=\psi_1(a)$.

Решить задачу для частного случая $\varphi_0(y)=Ay(b-y),\ \psi_0(x)=B\sin\dfrac{\pi x}{a},\ \varphi_1(y)=\psi_1(x)=0$.

9.2. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри прямоугольника $OACB$ (рис.1), у которого вдоль стороны OB потенциал равен



u, а три другие стороны заземлены. Электрические заряды внутри прямоугольника отсутствуют.

Рис.1.

9.3. Найти решение уравнения Лапласа в полуполосе $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \infty$, удовлетворяющее краевым условиям $u(0, y) = 0$, $u(x,0) = A\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$, $u(x,\infty) = 0$ $(0 \le x \le a)$.

9.4. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике $D\colon\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$, удовлетворяющее краевым условиям $u(0, y) = A$, $u(a, y) = Ay$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$.

Домашние задания

9.5. Найти решение уравнения Пуассона $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ в прямоугольнике $D\colon\ 0 \le x \le a,\ -\dfrac{b}{2} \le y \le \dfrac{b}{2}$, если оно на контуре этой области обращается в нуль.

9.6. Найти форму равновесия однородной прямоугольной мембраны *OACB* (рис.2), закрепленной по краям, если к мембране приложено нормальное давление p на единицу площади.

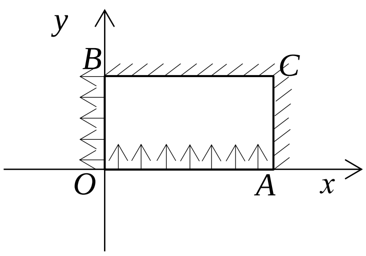


Рис.2

9.7. Найти стационарное распределение температуры в проводнике прямоугольного сечения, нагреваемом постоянным током, выделяющим в единице объема тепло Q, считая, что теплоотдача в среду нулевой температуры через поверхность проводника происходит по закону Ньютона.

9.8. Цилиндр, радиус основания которого R и высота h, имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю, а температура верхнего основания есть определенная функция от r. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

Ответы.

9.1.

$$u(x,y)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-x)}{b}\cdot\int_0^b\varphi_0(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy+\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\int_0^b\varphi_1(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy\right)\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}+$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sh}\frac{n\pi(b-y)}{a}\cdot\int_0^a\psi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx+\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\int_0^a\psi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx\right)\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}};$$

9.2. $$u(x,y)=\frac{4u}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b}}{(2n+1)}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

9.3. Указание. Задача сводится к решению уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ внутри прямоугольника при краевых условиях $u\big|_{x=0}=u,\ u\big|_{x=a}=u\big|_{y=0}=u\big|_{y=b}=0$.

9.4. $$u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{-\pi n}{a}y}\sin\frac{\pi nx}{a}.$$

9.5. $$u(x,y)=x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)^3}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.$$

Указание. Решение задачи следует в виде суммы $u=\nu+\omega$, где ν есть решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее условиям: $\nu(0,y)=0, \nu(a,y)=0$, причем ν следует искать в виде Ax^2+Bx+C, а ω есть решение уравнения Лапласа, принимающее на контуре прямоугольника значения

$$\omega(0,y)=0,\ \omega(a,y)=0,\ \omega(x,-\frac{b}{2})=-\nu(x),\ \omega(x,\frac{b}{2})=-\nu(x).$$

9.6.

$$u(x,y)=\frac{P}{T}\cdot\left(x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi(b-2y)}{2a}}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}\right).$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{P}{T}$ при нулевых граничных условиях на контуре прямоугольника.

9.7.

$$u(x,y)=\frac{4Qa^2}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n{}^2(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\cdot\left(1-\frac{\mathrm{hch}\frac{\mu_n y}{a}}{\frac{\mu_n}{a}\mathrm{sh}\frac{\mu_n b}{a}+h\,\mathrm{ch}\frac{\mu_n b}{a}}\right)\cdot\cos\frac{\mu_n x}{a},$$

где μ_n − положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu=\frac{ah}{\mu}$, h – коэффициент теплообмена.

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{Q}{h}$ при краевых условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right|_{x=-a}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right|_{x=a}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial y}-hu\right|_{x=-b}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}-hu\right|_{x=b}=0.$$

9.8. $u(r,z)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\mathrm{sh}\frac{\mu_n h}{R}}\cdot\frac{J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)}\cdot\int_0^R\rho\, f(\rho)J_0\left(\mu_n\frac{\rho}{R}\right)d\rho,$ где $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ − положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

Указание. Проинтегрировать уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ при условиях $u(0,z)$ равно конечной величине $u(R,z)=0, u(r,0)=0, u(r,h)=f(r).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учебной пособие для университетов / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – 4-е изд., испр.– Москва: Наука, 1972.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, Т.2: Учебное пособие для втузов, – 13-е изд. – Москва: Наука, 1985.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – 3-е изд. Стереотипное. – Москва, Наука, 1980.
4. Ломовцев Ф.Е. Уравнения математической физики: сборник задач для студентов мех.-мат. фак./ Ф.Е.Ломовцев. – Минск: БГУ, 2009.
5. Марцинкевич В.С. Уравнения математической физики: методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / В.С. Марцинкевич. – Минск: БНТУ, 2008.