

Ю. М. Плескачевский
Ю. А. Чигарева
П. И. Ширвель

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ
В УСЛОВИЯХ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ**

Минск
БНТУ
2018

УДК 539.3+621.039.5

Плескачевский, Ю. М. Деформирование и разрушение элементов конструкций из неоднородных материалов в условиях термосилового нагружения / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева, П. И. Ширвель. – Минск: БНТУ, 2018. – 228 с. – ISBN 978-985-583-335-3.

Изложены вопросы прочности сферических и цилиндрических элементов конструкций в условиях неравномерного нагрева и разработки численно-аналитических методов решения задач предельного состояния в термомеханике деформируемого твердого тела для конструктивных элементов: пластины с разрезами, двухслойных и полых цилиндров и сфер из композитных материалов.

Представлены методики расчета предельных состояний в элементах конструкций из композитных материалов

Издание рассчитано на научных и инженерно-технических работников в области прочности и прогнозирования ресурса экстремально нагруженных конструктивных элементов в машиностроении и энергетике. Будет полезна специалистам при разработке новых типов ядерных реакторов и профессорско-преподавательскому составу в подготовке студентов энергетических и машиностроительных специальностей.

Ил. 62. Библиогр. 155 назв.

Рекомендовано научно-техническим советом
Белорусского национального технического университета
(протокол № 1 от 28 сентября 2018 г.)

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *В. А. Кукареко*;
д-р техн. наук, доцент *А. И. Дудяк*

ISBN 978-985-583-335-3

© Плескачевский Ю. М., Чигарева Ю. А.,
Ширвель П. И., 2018

© Белорусский национальный
технический университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1. ТЕРМОМЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД	9
1.1 Анализ состояния проблемы и систематизация методов исследования	9
1.2 Основные соотношения термодинамики сплошных сред	15
1.3 Уравнения термоупругости для микронеоднородной изотропной и ортотропной сред	20
1.4 Модель эффективной анизотропной микронеоднородной термоупругой среды	22
1.5 Плоская задача термоупругости для слоя с разрезами	27
1.6 Концентрация температурных напряжений в неоднородных анизотропных телах с разрезами	32
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В МИКРО- И МАКРОСЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ	42
2.1 Определение термоупругого напряженно-деформированного состояния в ортотропной микрослоистой пластине градиентного типа	42
2.1.1 Температурное поле в микрослоистой ортотропной пластине с разрезами	42
2.1.2 Граничные условия для температурного поля в слое	45
2.1.3 Определение термических напряжений и деформаций в слое	49
2.1.4 Вычисление распределения температуры в слоях	58
2.2 Вычисление коэффициентов концентрации напряжений в пластине с разрезами	61
2.3 Предельное состояние в пластине с разрезами под действием температурного поля	67
2.4 Термопластическое напряженно-деформированное состояние в двухслойном цилиндре, установившееся после резкого изменения температуры	69
2.4.1 Двумерная постановка задачи термоупругости для двухслойного цилиндрического стержня	70
2.4.2 Упругопластическое установившееся состояние во внешнем цилиндре после резкого изменения температуры	72

2.4.3 Упругопластическое деформированное состояние в соосных цилиндрических телах	75
2.4.4 Численные примеры решения задач о распределении напряжений в композитных цилиндрах	78
2.5 Термопластическое напряженно-деформированное состояние в композитной сфере и распределение остаточных напряжений	82
2.5.1 Термоупругое стационарное состояние в соцентрированных шаровых областях	83
2.5.2 Термоупругопластическое состояние в соцентрированных шаровых областях	85
2.5.3 Упругопластическое напряженное состояние в композитной сфере	90
2.5.4 Численные результаты вычисления распределения напряжений в композитной сфере	92
2.5.4.1 Модель с упрочняющим наполнителем	92
2.5.4.2 Модель с менее жестким сердечником, чем матрица	94
2.6 Некоторые замечания и обсуждение результатов	95

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ СВОЙСТВ МИКРОКОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ ПЕРКОЛЯЦИИ

97

3.1 Расчет эффективных коэффициентов теплопроводности поликристаллических и аморфных материалов методом замены полевых величин	98
3.2 Перколяция в поликристаллических материалах	102
3.3 Перколяция в аморфных микрокомпозитных материалах	106
3.4. Вычисление оценки порога перколяции 10ϕ на основе дискретных моделей	108
3.5 Моделирование кластеров перколяции в структуре микрокомпозитных материалов методом рандомизации	112
3.6 Вычисление вероятности перколяции в структуре микрокомпозитных материалов на основе марковской модели	115
3.6.1 Моделирование образования кластера перколяции как вероятности достижения границы области $\Lambda \times C$	115
3.6.2 Вычисление вероятности и плотности вероятности Перколяции	119
3.7 Нелокальность определяющих соотношений в моделях квази-континуума для микро- и нанокомпозитных материалов	125
3.8. Некоторые обобщения	134

**ГЛАВА 4. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕРМОУПРУГОГО И ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
МИКРОКОМПОЗИТНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ И СФЕР** 136

4.1 Термоупругое деформирование полого микрокомпозитного цилиндра конечной длины	136
4.2 Квазистационарное упругопластическое деформирование бесконечно длинного полого цилиндра с эффективными свойствами	148
4.3 Моделирование пластического деформирования полых микрокомпозитной сферы под действием резкого уменьшения температуры	153
4.4 Общие замечания по определению НДС	161

**ГЛАВА 5. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ
И РАДИАЦИОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ**..... 162

5.1 Влияние терморadiационного воздействия на физико-механические свойства твердых тел	163
5.1.1 Теплофизические характеристики материалов при терморadiационном воздействии	164
5.1.2 Изменение упругих свойств в результате нагрева и облучения	170
5.1.3 Кратковременные и длительные механические свойства при интенсивном терморadiационном воздействии	174
5.2 Радиационное распухание	183
5.2.1 Радиационное распухание конструкционных материалов	185
5.2.2 Радиационное распухание делящихся материалов	192
5.3 Радиационная и тепловая ползучесть в элементах конструкций	197
5.4 Краткое обобщение влияния радиационных сред на механические характеристики материалов и поведение конструкций	208

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ..... 211

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 213

ПРЕДИСЛОВИЕ

Процессы деформирования и разрушения неоднородных тел под действием резких изменений температуры широко распространены в природе и технике, а технологии, основанные на них, издавна используются для термоупрочнения металлических изделий и при дроблении каменных пород.

Создание и производство новых композитных материалов, номенклатура, производство и применение которых неуклонно растет, расширяющаяся сеть высокоэнергетических установок типа ядерных и химических реакторов, природные геотермические процессы ставят новые задачи изучения деформирования и разрушения неоднородных сред при термосиловых воздействиях, в том числе, резком изменении температурных режимов.

Математическое моделирование этих процессов приводит к необходимости построения связанных систем дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, которые описывают термоупругопластическое деформирование и разрушение неоднородных сред при термосиловых воздействиях. Разработанные методы решения граничных и начальных задач термоупругости, термопластичности и терморазрушения даже для однородных изотропных тел являются приближенными, а для более реальных неоднородных моделей не существует общих правил получения аналитических решений. На современном этапе удастся получать решения для детерминированно неоднородных сред с кусочно-гладкими свойствами и конкретными типами распределения неоднородности, а также для микрон неоднородных сред, используя варианты метода осреднения. С другой стороны, решение конкретных начальных и граничных задач, возникающих в практике, стимулирует создание теории, что актуально для приложений в технике и природных процессах.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение композитных материалов в различных областях обусловлено возможностями проектирования их функциональных свойств за счет управления структурой. Термином «микронеоднородные среды» обозначается широкий спектр материалов – от естественных, типа горных пород, до микрокомпозитов, получаемых с помощью различных технологий, например, методами порошковой металлургии, смешивания компонентов, армированием; микрослоистых деталей, получаемых методом намотки, эпитаксии.

Математические проблемы для моделей микронеоднородных сред вытекают из того, что их деформирование описывается дифференциальными уравнениями с коэффициентами, зависящими от пространственных координат. Как известно, в математической физике не существует общих аналитических методов решения таких уравнений, однако различных приближенных методов решения задач для неоднородных сред разработано достаточно. В частности, для решения задач термоупругости микронеоднородных сред широкое распространение получил метод эффективной среды, согласно которому исходная задача сводится к последовательному решению задач вычисления эффективных термоупругих коэффициентов и решению исходной граничной задачи с вычисленными эффективными коэффициентами.

Микрослоистые композиты представляют собой широкий класс материалов, для которых в некоторых случаях распределения неоднородности дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами удастся свести к уравнениям с постоянными коэффициентами и использовать широкий спектр методов решения задач термоупругости. Важный класс микрослоистых материалов составляют градиентные среды, в которых существуют поверхности внутри среды, на которых функции материальных коэффициентов непрерывны, а их градиенты терпят разрывы. Поверхности (линии) слабого разрыва являются концентраторами напряжений и инициируют развитие трещин и пластических зон.

Слоистые композиты с кусочно-гладкими (дифференцируемыми) коэффициентами позволяют решать разнообразные граничные задачи упругого и пластического деформирования при термосиловых нагрузках. Задачи вычисления коэффициентов концентрации напряжений в слоистых композитах и оценка предельных состояний требуют последовательного применения методов интегральных преобразований, методов функций комплексной переменной, приближенных методов численного анализа и т.д.

Таким образом, учет неоднородности элементов конструкций сводится к проблемам решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в случае микронеоднородных композитов или к решению сложных систем дисперсионных уравнений, часто трансцендентных, – в случае деталей из макрокомпозитных материалов.

В монографии рассмотрено решение задач упругопластического деформирования и разрушения микро- и макрокомпозитных материалов под воздействием резкого изменения (400–500°C) температуры на внешних границах и возникновения в элементе конструкции предельного состояния. Такого рода задачи издавна возникали в практической деятельности, например, в технологиях упрочнения металлических изделий, разрушения крупных каменных блоков. В современных технологиях проблемы термоупрочнения остаются актуальными также в случаях аварийных ситуаций на ядерных и химических реакторах, когда важным является характер предельного состояния и разрушения: пластически или хрупко, что, как показывают последствия известных аварий последних лет, ведет к масштабным экологическим катастрофам.

ГЛАВА 1

ТЕРМОМЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

1.1 Анализ состояния проблемы и систематизация методов исследования

Анализу поведения различных конструктивных элементов в температурных полях посвящено большое количество публикаций, среди которых особый интерес представляют исследования для композитных материалов и изделий из них. Механическое поведение материалов в температурных полях обычно подразделяют на состояния: термоупругое, термовязкоупругое, термопластическое, термохрупкое и процессы: стационарные, квазистатические, и нестационарные, для исследования которых создано большое количество моделей и методов их описания. Для решения уравнений, описывающих математические модели, разработаны различные методы, из которых отметим методы интегральных преобразований, методы теории функций комплексной переменной, методы эффективных полей, методы обращения и численные методы.

В термоупругости линейных неоднородных анизотропных сред решение связанной системы динамических уравнений представляет наибольшие трудности. В случае однородной изотропной среды общие решения задач находятся с помощью метода фундаментальных решений [1]. Однако в случае неоднородных и анизотропных сред метод может применяться только совместно с методом эффективных полей [2, 3]. Проблеме вычисления термоупругих коэффициентов микрокомпозитных материалов посвящено большое число работ, в которых освещены различные методы, из которых отметим аналитические (самосогласованные методы) [2–4], статистического моделирования (Монте-Карло) [4], численные (метод конечных элементов) [3,4]. В случае неоднородных материалов кусочно-постоянного типа

прямые задачи вычисления термоупругих полей напряжений и деформаций [5] и обратные задачи оптимального проектирования [6, 11] могут быть достаточно эффективно решены. Термоупругое поведение материалы проявляют, как правило, в некотором диапазоне температур [12–20], причем при температурах, близких к критическим или выходящим за них, в теле возникает предельное состояние, которое для пластических материалов реализуется в виде пластического формоизменения, а в хрупких материалах возникают трещины, которые могут приводить к разрушению [21–29].

Стационарные и нестационарные задачи термоупругости для тел с трещинами под действием тепловых полей решаются методами, сочетающими интегральные преобразования с методами функций комплексной переменной. Установлено, что поля температурных напряжений около вершины трещины адекватны полям упругих напряжений, возникающих под действием только силовых нагрузок. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин основывается на том, что локальный характер тепловых напряжений аналогичен тому, который имеют механические напряжения [30–32]. Учет неоднородности и анизотропии значительно усложняет решение задач. Для микрокомпозитных материалов проблема состоит в том, что уравнения термоупругости в этом случае являются дифференциальными уравнениями в частных производных с коэффициентами, зависящими от пространственных координат, что в общем случае не позволяет применять методы интегральных преобразований, интегральных сингулярных уравнений. Задача в этом случае распадается на ряд последовательно решаемых подзадач. На первом шаге решается задача вычисления эффективных термоупругих операторов, которые имеют вид интегральных операторов, ядра которых зависят от композиции функции Грина и корреляционного (структурного) тензора термоупругих коэффициентов [2,3]. Операторный вид определяющих соотношений характеризует нелокальную термоупругую среду (квазиконтинуум) [2–4]. В приближении

квазиизотропии и квазиоднородности эффективной среды операторы переходят в коэффициенты теплопроводности, теплоемкости, упругости локальной термоупругой эффективной среды [2, 3].

Неоднородные среды, для которых возможно сведение уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от пространственных координат, к уравнениям с постоянными коэффициентами, для решения которых возможно применение методов интегральных преобразований, сингулярных уравнений, дают возможность получать решения в достаточно общем аналитическом виде. Важный класс неоднородных сред составляют материалы типа микрослоистых композитов, у которых термоупругие коэффициенты изменяются непрерывно по объему, а их градиенты испытывают разрывы на некоторых внутренних поверхностях [8]. Такие среды называются градиентными, а границы, на которых разрывны производные (градиенты), могут инициировать развитие вдоль них трещин [37–39]. Решению задач предельного равновесия для однородных изотропных конструктивных элементов посвящено большое число работ [9, 11, 14]. Значительно меньше работ посвящено вычислению коэффициентов концентрации напряжений около трещин в неоднородных анизотропных материалах и определению предельного состояния под воздействием температурных полей [26, 40–45].

Неоднородность существенно влияет на направление роста трещин, что необходимо знать при проектировании физико-механических свойств конструктивных элементов, обладающих необходимыми прочностными свойствами [5–7, 39, 46–50]. Важный класс задач составляют задачи деформирования и разрушения неоднородных материалов под действием температурных нагрузок, резко изменяющихся в некоторый момент времени. Процессы разрушения, реализующиеся в виде трещин, являются нежелательными во многих технологиях, связанных с термическим упрочнением конструктивных элементов. С экологической точки зрения хрупкое растрескивание деталей промышленных установок, которое может

возникнуть в аварийных ситуациях, в случае резкого изменения температуры, является опасным. В известных авариях на атомных станциях, химических реакторах резкое охлаждение твэлов, конструктивных элементов реакторов ведет к их растрескиванию, диспергации, загрязнению окружающей среды. Необходимо проектировать материалы, обладающие свойством переходить при резком изменении температуры в пластическое состояние [51–59]. Знание распределений остаточных напряжений, которые возникают в композитных материалах после температурной разгрузки, представляет интерес с точки зрения их дальнейшей эксплуатации.

Отметим возможности эффективной локализации деформаций при аргонодуговой сварке аустенитной стали с помощью технологии принудительного охлаждения высокотемпературной области. Проблемы изгиба и коробления пластины во время сварки и резания исследовались в ряде работ [60–63], что позволило определить влияние геометрических параметров пластины на ее деформируемость. Проектирование композитных материалов с заданными свойствами основано на использовании элементарных структур и их синтезом с помощью различных технологий, например, порошковой металлургии, армирования волокнами, кристаллизации и т.д. Синтез поликристаллических материалов и аморфных сред характеризуется случайными отклонениями от запланированной структуры вследствие того, что одновременно идут два процесса: 1) агрегатирования компонентов с возможным образованием кластеров из компонентов одного материала; 2) диффузии компонента из области (кластера) с большей концентрацией в области с меньшей концентрацией [4, 64–68]. В случае преобладания агрегации над диффузией возможно образование кластера перколяции (протекания), что существенно влияет на эффективные (макроскопические) свойства композита, такие как квазиизотропия, квазиоднородность. В случае преобладания процессов диффузии над агрегацией формируется квазиизотропная квазиоднородная микрокомпозитная среда [2, 3, 65–68].

С другой стороны, известно, что в процессе эксплуатации в материалах конструктивных элементов идут процессы старения, в результате которых меняются физико-механические характеристики и структура материала. Например, может происходить образование микротрещин и их слияние (агрегация) в макротрещину (кластер), что существенно влияет на предельное состояние тела. В случае если фаза накопления повреждений имеет диффузионный характер, то накопление повреждений имеет рассеянный по объему характер. Предельное состояние в этом случае может возникнуть за счет снижения пределов пластичности вследствие термического размягчения или предела прочности за счет термического накопления повреждений.

При формировании структуры композитных материалов в качестве важнейших физико-механических характеристик компонентов должны учитываться коэффициенты теплопроводности и теплоемкости компонентов, их сочетание в агрегатированном состоянии. Показательным примером здесь является проблема создания эффективных твэлов, представляющих собой композицию гранулированных материалов и материалов, получаемых методами порошковой металлургии [69–71]. Под эффективным твэлом понимается композит, например, диоксид урана и силумина, в котором объемная концентрация диоксида урана достигает порядка 75%, однако гранулы тепловыделяющего элемента должны быть равномерно распределены по объему, и между ними должны быть прослойки силумина. Это обеспечивает более полное выгорание топлива, так как в случае кластеризации зерен диоксида урана теплопроводность снижается, а в случае образования макрокластера (перколяции) процесс передачи тепла становится менее эффективным [72].

Другим важным критерием при создании твэлов является их экологическая безопасность в аварийных ситуациях. Резкое охлаждение твэлов с помощью воды может привести к их растрескиванию и дисперсации до пылевого состояния, что способствует расширению областей загрязнения воздуха и воды. Создание твэлов, пластически

деформирующихся при резком изменении температуры, существенно повысит экологическую безопасность окружающей среды. Для современных твэлов характерны процессы упрочнения [29–32], а значит и охрупчивания при их выгорании, результатом чего является серьезное экологическое загрязнение среды.

Таким образом, существует значительное количество работ, посвященных разработке разнообразных численных и аналитических подходов к построению решений задач. Сложность физико-химических и механических процессов деформирования и разрушения определяет математическую сложность моделей, изучаемых в термоупругости, термопластичности, терморазрушении. Как известно, хотя использование линейных уравнений параболического типа для описания явлений теплопереноса в начальных и граничных задачах некорректно и приводит к бесконечной скорости распространения термоупругих возмущений, тем не менее модели параболической теплопроводности широко используются в термомеханике, теплофизике [74–82].

Разработаны разные методы решения стационарных, квазистационарных и нестационарных задач термоупругости, в которой развито большое число подходов для решения конкретных задач. Применение численных методов, основанных на пакетах программ, позволяет существенно интенсифицировать процессы моделирования и расчета температурных задач. Сочетание аналитических методов с численными дает результаты, имеющие, как правило, теоретический и практический интерес [1, 7, 15, 18–20, 83–85].

1.2 Основные соотношения термодинамики сплошных сред

Обозначим через $U(S, e_{ij})$ плотность внутренней энергии, $F(T, e_{ij})$ – плотность свободной энергии, $G(T, \sigma_{ij})$ – плотность термодинамического потенциала Гиббса, которые связаны между собой соотношениями [1, 5, 34, 42]

$$F = U - T \cdot S ; \quad (1.1)$$

$$G = F - \sigma_{ij} e_{ij} , \quad (1.2)$$

где S – энтропия; T – температура; σ_{ij} – тензор напряжений; e_{ij} – тензор деформаций.

Потенциалы U , F , G являются функциями состояния деформируемого тела и содержат информацию о модели и её свойствах.

Они являются полными дифференциалами, которые записываются в виде

$$dU = TdS + \sigma_{ij} de_{ij} ; \quad (1.3)$$

$$dF = -SdT + \sigma_{ij} de_{ij} ; \quad (1.4)$$

$$dG = -SdT - e_{ij} d\sigma_{ij} . \quad (1.5)$$

Из того, что dU , dF , dG являются полными дифференциалами, следует [1, 2, 5, 18–20]

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T ; \quad \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} ; \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S ; \quad \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} ; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = -S; \quad \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = -e_{ij}; \quad (1.8)$$

Определяющие соотношения (уравнения состояния) формально получаются путем разложения свободной энергии в ряд по T , e_{ij} в окрестности естественного состояния ($e_{ij} = 0, T = T_0$).

Обозначим

$$\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = c_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial e_{ij} \partial T} = -\beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial T^2} = m \quad (1.9)$$

и полагаем, что

$$F(0, T_0) = 0, \quad \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial T} = -S(0, T_0) = 0,$$

тогда свободная энергия имеет вид

$$F(e_{ij}, T) = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - \beta_{ij} e_{ij} \theta + \frac{m}{2} \theta^2 \quad (1.10)$$

где θ — приращение температуры, коэффициент $m = -C_V / T_0$.

Из (1.7) с учетом (1.9) получим

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial e_{ij} \partial T} \theta. \quad (1.11)$$

Учитывая (1.9), обобщим соотношения Дюамеля–Неймана [1, 2, 5, 18, 20] для неоднородной анизотропной среды

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta = \frac{dF}{de_{ij}}, \quad (1.12)$$

где $T = \text{const}$;

c_{ijkl} – компоненты тензора упругой жесткости анизотропного неоднородного тела, удовлетворяющие условиям симметрии

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{jilk} = c_{klij}. \quad (1.13)$$

Решая систему (1.12) относительно деформаций e_{ij} , получим

$$e_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij}^T \theta, \quad (1.14)$$

где s_{ijkl} — модули упругой податливости, удовлетворяющие условиям симметрии:

$$s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk} = s_{klij}. \quad (1.15)$$

Из соотношений (1.12), (1.14) следует

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right) = -\beta_{ij} = -\alpha_{kl}^T c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma = \alpha_{ij}^T. \quad (1.16)$$

Выражения для внутренней энергии U и энтропии S имеют вид:

$$U = \frac{c_{ijkl}}{2} e_{ij} e_{kl} + t_0 \beta_{ij} e_{ij} + c_v \theta; \quad (1.17)$$

$$S = \beta_{ij} e_{kl} + c_v \ln(1 + \theta / T_0), \quad (1.18)$$

где c_v — объёмная теплоемкость при постоянной деформации.

Подставляя (1.17), (1.18) в выражение для свободной энергии $F = U - S \cdot T$ и раскладывая $\ln(1 + T / T_0)$ в ряд с точностью до второго члена, получим

$$F = \frac{c_{ijk}^e}{2} e_{ij} e_k e - \beta_{ij} e_{ij} \theta - \frac{c_v}{2T_0} \theta^2. \quad (1.19)$$

Из сравнения выражений для F (1.19) с (1.10) находим, что

$$m = -c_v / T_0. \quad (1.20)$$

Для $|\theta / T_0| \ll 1$ выражение (1.18) примет вид

$$S = \beta_{ij} e_{ij} + (c_v / T_0) \theta. \quad (1.21)$$

Используя выражения

$$T \frac{dS}{dt} = -q_{i,i} + W_T; \quad (1.22)$$

$$q_i = -\lambda_{ij}^T T_{,j}, \quad (1.23)$$

где q_i — компоненты вектора теплового потока.

И подставляя (1.23) в (1.22), получим

$$T \frac{dS}{dt} = \lambda_{ij,ij}^T + \lambda_{ij,i}^T T_{,j} + W_T. \quad (1.24)$$

Дифференцируя (1.21), получим

$$T \frac{dS}{dt} = T \beta_{ij} \dot{e}_{ij} + \frac{c_v}{T_0} T \dot{\theta}. \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.24) с (1.25), получаем

$$\lambda_{ij}^T T_{,ij} + \lambda_{ij,i}^T T_{,i} - T \beta_{ij} \dot{e}_{ij} = c_v \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - W_T. \quad (1.26)$$

Положим в (1.26) $T \approx T_0$, тогда получим

$$\lambda_{ij}^T T_{,ij} + \lambda_{ij,i}^T T_{,i} - T_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} = c_v \dot{\theta} - W_T \quad (1.27)$$

или, так как $T_{,ij} = \theta_{,ij}$, $T_{,j} = \theta_{,j}$, $\beta_{ij} = c_{ijke} \alpha_{ke}^T$

$$\lambda_{ij}^T \theta_{,ij} + \lambda_{ij,i}^T \theta_{,j} - \varepsilon_{ij} \dot{e}_{i,ij} = c_v \dot{\theta} - W_T, \quad E_{ij} = T_{0ke}^t c_{ijke}. \quad (1.28)$$

Подставим (1.12) в уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i - x_i, \quad (1.29)$$

получим уравнение динамической термоупругости в перемещениях

$$c_{ijke} u_{k,ej} + c_{ijke,j} u_{k,e} = \rho \ddot{u}_i + \beta_{ij} \theta_{,j} + \beta_{ij,j} \theta - X_i, \quad (1.30)$$

которые совместно с уравнением теплопроводности (1.28) образуют замкнутую связанную систему уравнений.

Связанная система уравнений (1.28), (1.30) описывает деформирование анизотропного неоднородного тела под действием нестационарных механических и тепловых воздействий, а также изменение его температурного поля, обусловленное деформированием упругого тела.

Начальные условия для системы уравнений (1.28), (1.30) задаются в виде

$$\begin{aligned} \theta(\bar{x}, 0) = \theta_0(\bar{x}), \quad u_i(x, 0) = g_i(\bar{x}), \quad \dot{u}_i(\bar{x}, 0) = f_i(\bar{x}) \\ \text{для } \bar{x} \in V, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\theta_0(\bar{x})$, $g_i(\bar{x})$, $f_i(\bar{x})$ — функции, заданные по всему объему тела в начальный момент времени (при $t = 0$).

Силовые граничные условия задаются в виде

$$\sigma_{ij} n_j = P_i(\bar{x}_S, t) \quad \text{для } \bar{x}_S \in S, \quad t > 0. \quad (1.32)$$

Кинематические граничные условия имеют вид

$$u_i = u_i^S(x_S, t) \quad \text{для } \bar{x}_S \in S, \quad t > 0. \quad (1.33)$$

Условия теплообмена на границе задаются в форме Ньютона:

$$n_i \lambda_{ij}^T T_{,j}(\bar{x}, t) + \alpha_S \left[T(\bar{x}, t) - T_c^S(\bar{x}, t) \right] = 0 \text{ для } \bar{x} \in S, \quad (1.34)$$

где n_i – компонента внешней нормали к поверхности S ; α_S – коэффициент теплоотдачи с поверхности S тела.

Если $X_i = 0$ и $-\varepsilon_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$, то система уравнений (1.28), (1.30) оказывается несвязанной и имеет вид

$$\lambda_{ij}^T T_{,ij} + \lambda_{ij,i}^T T_{,j} = c_v \dot{T} - W_T; \quad (1.35)$$

$$c_{ijke} u_{k,ej} + c_{ijke,j} u_{k,e} = \rho \dot{u}_i + (\beta_{ij} \theta)_{,j}. \quad (1.36)$$

Квазистатическая задача получается из (1.35), (1.36), если пренебречь инерционными эффектами, обуславливающими волновые явления. Для этого необходимо в (1.36) пренебречь силами инерции $\rho \dot{u}_i$; тогда (1.36) преобразуется в уравнение статики вида

$$c_{ijke} u_{k,ej} + c_{ijke,j} u_{k,e} = (\beta_{ij} \theta)_{,j}, \quad (1.37)$$

где θ зависит от времени.

Уравнения (1.35), (1.37) представляют собой уравнения термовязистатики анизотропного микронеоднородного тела.

1.3 Уравнения термоупругости для микронеоднородной изотропной и ортотропной сред

Для изотропного тела полагаем

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^T(\bar{x}) &= \delta_{ij} \lambda_T^{(x)}(\bar{x}), \quad \alpha_{ij}^T(\bar{x}) = \delta_{ij} \alpha_T(\bar{x}), \quad \beta_{ij}^T(\bar{x}) = \beta(\bar{x}) \delta_{ij}; \\ c_{ijkl}(\bar{x}) &= \mu(\bar{x}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda(\bar{x}) \delta_{ij} \delta_{kl}; \\ S_{ijkl}(\bar{x}) &= \mu'(\bar{x}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda(\bar{x}) \delta_{ij} \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

В этом случае для несвязанной динамической термоупругости изотропного микронеоднородного тела закон Дюгамеля–Неймана имеет вид

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\bar{x})e_{ij} + (\lambda(\bar{x})e - \beta(x)\Theta)\delta_{ij}. \quad (1.39)$$

Уравнения динамической теории термоупругости имеют вид

$$\begin{aligned} & \mu(\bar{x})u_{i,jj} + (\lambda(\bar{x}) + \mu(\bar{x})u)i_{j,jl} - (\beta\Theta)_{,i} - \rho\ddot{u}_i = \\ & = \mu(\bar{x})_{,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \lambda(\bar{x})_{,i}u_{j,j}; \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\left(\lambda_T^{(\bar{x})}(\bar{x})T_{,i}\right)_{,i} = \rho c \dot{T} - W_T. \quad (1.41)$$

Граничное условие теплообмена на поверхности S записывается в виде

$$\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_S (T - T_c^S) = 0 \text{ на } S \quad (1.42)$$

В случае квазистатики в уравнении (1.40) силами инерции $\rho\ddot{u}_i$ можно пренебречь.

Для случая ортотропной неоднородной среды рассмотрим уравнения, описывающие деформирование ортотропной неоднородной пластины под действием внешних источников. Пластина ограничена плоскостями $z = \pm\delta$ и боковой цилиндрической поверхностью S , на которых условия теплообмена задаются по закону Ньютона. Если задача теплопроводности симметрична относительно серединной плоскости $z = 0$ пластинки $(T_c^+ = T_c^- = T_c)\alpha_z^+ = \alpha_z^- = \alpha_z, W_T^* = 0, T^* = 0$ то уравнение теплопроводности имеет вид [1, 5, 12, 18, 20]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda_{11}(x) \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{12}(x) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \Lambda_{12}(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \Lambda_{22}(x) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \\ - 2\alpha_z(x) [T - T_c(x, y)] = c(x)T - W_T(x, y, t). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Динамические уравнения для перемещений записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_{11}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} + c_{12}(x) \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} + c_{16}(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) \right] + \\ c_{16}(x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + c_{26}(x) \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial y^2} + c_{66}(x) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2} \right) - \\ - \frac{\partial S_{11}}{\partial x} - \frac{\partial S_{12}}{\partial y} = c_i(x) \ddot{u}_0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Уравнения квазистатики получим, пренебрегая в (1.44) силами инерции $c_p(x)\ddot{u}_0, c_p(x)\ddot{\vartheta}_0$ и в уравнениях (1.43), (1.44) полагая, что

$$\begin{aligned} \lambda_{12}^T = 0, \quad a_{16}^{c16} = 0, \quad a_{26}^{c26} = 0, \quad \alpha_{12}^T = 0, \quad a_{11}^{c11} = E_x^{-1}, \\ a_{12}^{c12} = -\vartheta_x E_x^{-1}, \quad a_{22}^{c22} = E_y^{-1}, \quad a_{66}^{c66} = G^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай микрослоистой ортотропной неограниченной толстой пластины, материальные коэффициенты в которой зависят от одной координаты z перпендикулярной слоям параллельным плоскости OXY .

1.4 Модель эффективной анизотропной микронеоднородной термоупругой среды

В уравнениях термоупругости (1.35), (1.36) содержатся коэффициенты теплопроводности $\lambda_{ij}(\bar{x})$, теплоёмкости $\alpha(\bar{x})$, упругости (жёсткости) $c_{ijkl}(\bar{x})$, вследствие чего они являются уравнениями в

частных производных с переменными коэффициентами, для которых не существует методов получения точных решений в аналитическом виде.

Рассмотрим получение уравнений для средних полей температуры, напряжений, деформаций, перемещений и эффективных коэффициентов операторов теплопроводности и упругости методом функций Грина.

Классическая функция Грина уравнения теплопроводности анизотропной однородной среды удовлетворяет уравнению [1, 2]

$$\left(\lambda_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t} \right) G(\bar{r}, t) = -\delta(\bar{r})\delta(t), \quad (1.45)$$

где $G(\bar{r}, t)$ — функция Грина, которая при $t < 0$ равна нулю.

Вычисление нестационарной функции Грина, удовлетворяющей уравнению (1.45), обычно проводится с помощью интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье — по пространственным коэффициентам в случае неограниченной среды. Тогда находим

$$\bar{G}(\bar{k}, p) = \int \int_V G(\bar{r}, t) e^{-i\bar{k}\bar{r} - pt} d\bar{r} dt, \quad (1.46)$$

где $\bar{G}(\bar{k}, p)$ — Лаплас–Фурье преобразование от $G(\bar{x}, t)$.

Применяя к (1.46) обратные преобразования Лапласа и Фурье, находим

$$\begin{aligned} G(\bar{x}, t) &= \frac{1}{8\pi^3} \int \int_V \bar{G}(\bar{k}, p) e^{-i\bar{k}\bar{r} - pt} d\bar{k} dp = \\ &= \frac{1}{8} \left(\pi^3 t^3 x_1 x_2 x_3 \right)^{-1/2} \exp \left(-\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{4x_i t} \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Рассмотрим вычисление функции Грина для связанной системы термоупругости в перемещениях.

Связанная система уравнений термоупругости в перемещениях для анизотропной однородной среды в случаях квазистатических процессов имеет вид [5]

$$c_{ijkl}e_{kl,j} - \beta_{ij}\Theta_{,j} = -f_i \quad (1.48)$$

$$\lambda_{ij}\Theta_{,ij} - c\Theta - T_0\beta_{ij}e_{ij} = -W \quad (1.49)$$

Здесь в уравнениях (1.48) пренебрегли инерционными силами $\rho\ddot{u}_i$.

В дальнейшем систему уравнений (1.48), (1.49) удобно записать в матричном виде:

$$L_{\alpha\beta}U_\beta = -f_\alpha; \quad \alpha = 1, 2, 3, 4; \quad (1.50)$$

$$U_\beta = \{U_i, \Theta\}; \quad f_\alpha = \{f_i, W\}; \quad (1.51)$$

$$L_{ik} = \frac{c_{ijkl}\partial^2}{\partial_j\partial_l}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \quad L_{i4} = -\frac{\beta_{ik}\partial}{\partial x_k}, \quad (1.52)$$

Функция (тензор) Грина оператора $L_{\alpha\beta}$ для неограниченной среды удовлетворяет уравнению

$$L_{\alpha\beta}G_{\beta\gamma} = -\delta(r)\delta_{\alpha\gamma}. \quad (1.53)$$

Тогда функция $G_{\beta\gamma}$ записывается в виде, зависящем от r и ω — $G_{\beta\gamma}(r, \omega)$, а её преобразование Фурье имеет вид

$$\tilde{G}_{\beta\gamma}(\bar{k}, \omega) = \int e^{i\bar{k}\bar{r}} \tilde{G}_{\beta\gamma}(\bar{r}, \omega) d\bar{r}, \quad (1.54)$$

а обратное преобразование даёт

$$G_{\beta\gamma}(\bar{r}, \omega) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\bar{k}\bar{r}} \tilde{G}_{\beta\gamma}(\bar{k}, \omega) dk. \quad (1.55)$$

Подставляя (1.54) в (1.53), получим

$$\tilde{L}_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\gamma} = -\delta_{\beta\gamma}; \quad (1.56)$$

$$\tilde{L}_{ik} = -c_{ijkl}k_jk_l; \quad \tilde{L}_{4k} = -\omega T_0\beta_{ik}k_i; \quad \tilde{L}_{44} = -\lambda_{ik}k_ik_k - ikx_\varepsilon. \quad (1.57)$$

С помощью функции Грина поле смещений и температур, записываются в виде свертки

$$U_\alpha = \int G_{\alpha\beta}(\bar{r} - \bar{r}_1, \omega) f_\beta(\bar{r}_1, \omega) d\bar{r}_1 = G_{\alpha\beta} * f_\beta. \quad (1.58)$$

Подставляя (1.58) в (1.53) непосредственно проверяем, что (1.58) является решением уравнения (1.53).

Выпишем выражения для компонент тензора Грина связанной системы уравнений квазистатической упругости в Фурье пространстве векторов \bar{k} :

$$\bar{G}_{il} = \frac{1}{\mu k^2} \left(\delta_{il} - \frac{\Lambda + \mu}{\Lambda + 2\mu} \vartheta_{il} \right); \quad (1.59)$$

$$\bar{G}_{i4} = \frac{i\beta k_i}{k^2 (\Lambda + 2\mu) (\lambda k^2 + i\omega c_\varepsilon)}; \quad (1.60)$$

$$\bar{G}_{4i} = \frac{ik_i (\Lambda - \lambda)}{\beta k^2 (\Lambda + 2\mu)}; \quad \bar{G}_{44} = \frac{(\Lambda + \lambda)(\lambda + 2\mu)}{i\omega T_0 \beta^2 (\Lambda + 2\mu)}; \quad (1.61)$$

Нахождение оригинала (обратного преобразования) в общем случае анизотропной среды пока не получено. Эффективные коэффициенты (операторы) теплопроводности и упругости определены формулами [2]

$$\langle \bar{g}_{ij} \rangle = \langle c_{ijkl}(x) e_{kl} \rangle = c_{ijkl}^* \langle l_{kl} \rangle; \quad (1.62)$$

$$\langle \bar{q}_i \rangle = \langle \lambda_{ij}(x) T_{,j} \rangle = \lambda_{ij}^* \langle T \rangle_{,ij}. \quad (1.63)$$

Для случая изотропной неоднородной среды эффективные коэффициенты в корреляционном приближении имеют вид [2]

$$K^* = \langle K \rangle \left[1 - \left(1 + \frac{4\langle \mu \rangle}{3\langle K \rangle} \right) D_k^0 + \frac{\Delta K}{\langle K \rangle} D_{k-\beta}^0 \gamma(x) \right]; \quad (1.64)$$

$$\mu^* = \langle \mu \rangle \left[1 - \left(1 + \frac{6\langle K + 2\mu \rangle}{5\langle 3K + 4\mu \rangle} \right) D_k^0 + \frac{4\Delta K \langle \mu \rangle}{5\langle 3K + 4\mu \rangle} D_{\frac{\mu}{\beta}}^0 \gamma(x) \right]; \quad (1.65)$$

$$\lambda^* = \langle \lambda \rangle \left\{ 1 - \frac{1}{3} D_\lambda^0 [1 - \gamma(x)] \right\}; \quad (1.66)$$

$$c_\varepsilon^* = \langle c_\varepsilon \rangle [1 - D_c^0 \gamma(x)]; \quad \beta^* = \langle \beta \rangle [1 - D_{k\beta}^0 + D_{c(k-\beta)}^0 \gamma(x)]; \quad (1.67)$$

$$\text{где } D_{xy}^0 = \langle x_0 y_0 \rangle; \quad x = \frac{a^2}{\rho^2}; \quad \rho^2 = \frac{\lambda}{\omega c_\varepsilon}; \quad \Delta K = \frac{T_0 \langle \beta \rangle^2}{\langle c_\varepsilon \rangle};$$

$$K_0 = \frac{K}{\left(K + \frac{3}{4}\mu \right)}; \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\langle \mu \rangle}; \quad \beta_0 = \frac{\beta}{\langle \beta \rangle};$$

$$c_0 = \frac{c_\varepsilon}{\langle c_\varepsilon \rangle}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda}{\langle \lambda \rangle}; \quad (1.68)$$

$$R_{e\gamma}(x) = \frac{x(x + \sqrt{2x})}{(1 + \lambda + \sqrt{2x})^2}; \quad Z_{m\gamma}(x) = \frac{x(x + \sqrt{2x})}{(1 + x + \sqrt{2x})^2}. \quad (1.69)$$

Теплообмен между участками растяжения и сжатия протекать не успевает, поэтому для описания межзеренной релаксации следует использовать не изотермические коэффициенты (1.64)–(1.69), а адиабатические, которые связаны с изотермическими формулами

$$\Delta K^* = K_S^* - K_T^* = \frac{T_0 \beta^{*2}}{c_\varepsilon^2}. \quad (1.70)$$

В первом приближении по ΔK из (1.64)–(1.70) получим [2]

$$K_S^* = \langle K_S \rangle - \langle K + 4/3 \mu \rangle D_k^0 + \Delta K D_{k+c}^0. \quad (1.71)$$

Изотермическое деформирование получаем при $\omega \rightarrow 0$, причём и $\gamma(x) \rightarrow 0$, тогда из (1.64) – (1.69) находим

$$K_T^* = \langle K_T \rangle - \langle K_T + 4/3 \mu \rangle D_{1k}^0 \quad K_S = \langle K_S \rangle - \langle K_T + 4/3 \mu \rangle D_k^0; \quad (1.72)$$

$$\mu^* = \langle \mu \rangle \left[1 - \frac{6 \langle K_T + 2\mu \rangle}{5 \langle 3K_T + 4\mu \rangle} D_\mu^0 \right];$$

$$\lambda^* = \langle \lambda \rangle \left[1 - \frac{1}{3} D_\lambda^0 \right]; \quad c_\varepsilon^* = \langle c_\varepsilon \rangle, \beta^* = \langle \beta \rangle \left(1 - D_{k\beta}^0 \right).$$

В случае высоких частот $\omega \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 0$, тогда для модулей упругостей получим те же выражения, а параметры температуропроводности имеют вид

$$\lambda^* = \langle \lambda \rangle, \quad c_\varepsilon^* = \langle c_\varepsilon \rangle \left(1 - D_c^0 \right);$$

$$\beta^* = \langle \beta \rangle \left[1 - D_{k\beta}^0 + D_{c(k-\beta)}^0 \right] = \left[1 - D_{(k+c)\beta}^0 + D_{kc}^0 \right].$$

1.5 Плоская задача термоупругости для слоя с разрезами

Задача термоупругости решается в два этапа [21–26, 38–45]:

1) определение термоупругого состояния тела без разрезов, обусловленного температурным полем, воздействующим на тело извне (решение задачи теплопроводности);

2) решение силовой задачи для тела с разрезами, к берегам которых приложены нагрузки, равные по величине и противоположные по знаку напряжениям, найденным при решении задачи термоупругости на первом этапе $T_0(x, y)$ и $T^{(1)}(x, y)$.

Деформации и напряжения связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \vartheta(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha_t T &= E \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \sigma_y - \vartheta(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha_t T &= E \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \sigma_z - \vartheta(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha_t T &= 0; \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.73)$$

где α_t — температурный коэффициент линейного расширения

Напряжения выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексной переменной z [5, 12, 17–20, 26]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)]; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)]; \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$2\mu(n + i\vartheta) = \lambda\phi(z) - z\bar{\phi}(z) - \Psi(z) + \beta + \int f(z) dz, \quad \lambda = 3 - 4\vartheta, \quad \beta_t = \alpha_t E$$

В случае однородной изотропной упругой плоскости с термоизолированным разрезом $|x| \leq l, y = 0$, берега которого контактируют и свободны от нагрузки и находящейся под действием стационарного температурного поля $T^{(1)}(x, y)$, граничные условия на берегах разреза записываются в виде

$$\sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ = \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- = 0, |x| < l \quad (1.75)$$

Для перемещений u, v вводится функция

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[u^+ - u^- + i(v^+ - v^-) \right] = \frac{i(\lambda + 1)}{2\mu} g'(x). \quad (1.76)$$

Продифференцировав последнее соотношение в (1.74), получим

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \lambda \Phi(z) - \bar{\Phi}(z) - z \bar{\Phi}'(z) - \bar{\Psi}(z) + \beta_t f(z); \quad (1.77)$$

$$\Phi(z) = \phi'(z), \Psi(z) = \psi'(z).$$

Подставляя в (1.75) выражение (1.74) и складывая полученные выражения, приходим к задаче сопряжения на отрезке $|x| \leq l$ для функции $\Phi(z)$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \sigma(x), |x| \leq l; \quad (1.78)$$

$$\sigma(x) - g'(x) - 2i\delta\gamma(x) = 0. \quad (1.79)$$

где $\delta = \beta_t / (\lambda + 1)$, $\gamma(x)$ – функция, найденная ранее из решения задачи теплопроводности.

Для краевой задачи (1.78), (1.79) получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-e}^e \frac{\sigma(t) dt}{t - z}; \quad (1.80)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-e}^e \left[\frac{\sigma(t)}{t - z} - \frac{t\sigma(t)}{(t - z)^2} \right] dt; \quad (1.81)$$

$$\sigma(x) = g'(x) + 2i\delta\gamma(x), \quad |x| < l, \quad (1.82)$$

где функция $\gamma(x)$ известна из решения задачи теплопроводности.

В случае прямолинейной трещины $|x| < l$, берега которой свободны от нагрузки имеем уравнение

$$\int_{-e}^e \frac{\sigma(t) dt}{t-x} = 0, \quad |x| < l. \quad (1.83)$$

Решение уравнения (1.83) имеет вид [36–39]

$$\sigma(x) = \frac{iA}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}. \quad (1.84)$$

Проинтегрировав (1.84) в пределах от $-l$ до l , найдём неизвестную постоянную A :

$$A = 2\delta \int_{-e}^e \gamma(x) dx = -\delta \int_{-e}^e x\gamma'(x) dx. \quad (1.85)$$

Подставив значение γ' , найденное ранее, получим

$$A = -2\delta \int_{-e}^e \sqrt{l^2 - t^2} g(t) dt. \quad (1.86)$$

При известной функции $\sigma(x)$ по формулам (1.80), (1.81) определяются функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, т. е. находится полное решение задачи термоупругости.

Коэффициенты интенсивности напряжений у вершины разреза находятся по формуле [26]

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \pm \lim_{x \rightarrow \pm l} \left[\sqrt{\frac{l^2 - x^2}{l}} \sigma(x) \right]. \quad (1.87)$$

С учётом формул (1.85), (1.86), (1.87) получаем

$$K_2^\pm = \pm \frac{2\delta}{\pi\sqrt{l}} \int_{-e}^e g(t) \sqrt{l^2 - t^2} dt, K_1^\pm = 0. \quad (1.88)$$

Формула (1.88) даёт лишь ту составляющую коэффициентов интенсивности напряжений, которая обусловлена возмущённым температурным полем $T^{(1)}(x, y)$.

В случае, когда тело находится под действием однородного теплового потока на бесконечности, направленного перпендикулярно линии трещины, температурное поле имеет вид

$$T_0(x, y) = gy \quad (1.89)$$

и не вызывает напряжений в сплошной плоскости.

Из формул (1.87), (1.88) с учётом (1.89) получим

$$K_2^\pm = \pm g\delta l\sqrt{l}, K_1^\pm = 0. \quad (1.90)$$

Для стационарной задачи термоупругости в случае бесконечной плоскости с термоизолированными разрезами на лучах $|x| \geq l, y = 0$, берега которых свободны от напряжений, интегральное уравнение задачи имеет вид

$$\int_{-\infty}^e \frac{\sigma(t) dt}{t-x} + \int_e^{\infty} \frac{\sigma(t) dt}{t-x} = 0, |x| > l. \quad (1.91)$$

Уравнение (1.91) имеет только нулевое решение. Следовательно, возмущённое температурное поле $T_1(x, y)$ не вызывает неограниченных напряжений в бесконечной плоскости с термоизолированной трещиной $|x| \geq l, y = 0$, а коэффициенты интенсивности будут иметь только слагаемые, обусловленные основным температурным полем $T_0(x, y)$.

1.6 Концентрация температурных напряжений в неоднородных анизотропных телах с разрезами

Коэффициенты интенсивности напряжений K_i ($i = I, II, III$) определяются следующим образом [26]

-для трещин нормального разрыва

$$K_I = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0}; \quad (1.92)$$

-для трещины поперечного сдвига

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0}; \quad (1.93)$$

-для трещины продольного сдвига (антиплоская деформация)

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz}(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0}. \quad (1.94)$$

Для прямолинейной трещины, расположенной в области $a \leq x \leq b, y = 0$, к берегам которой приложены нормальная $p(x)$ и касательная $\tau(x)$ нагрузки (рис. 1.1) коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах $x = a, x = b$ имеют вид [21–27]

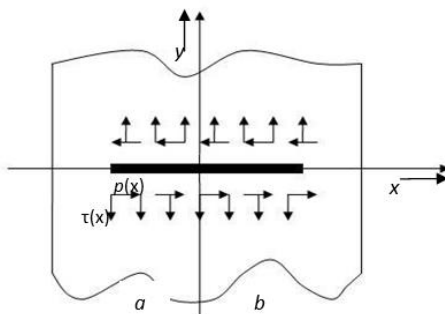


Рис. 1.1. Трещина под действием распределенных нагрузок $p(x)$ и $\tau(x)$

$$K_{I,II}(a) = \sqrt{\frac{2}{p(b-a)}} \int_a^b \left\{ \begin{matrix} p(x) \\ t(x) \end{matrix} \right\} \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx; \quad (1.95)$$

$$K_{I,II}(b) = \sqrt{\frac{2}{p(b-a)}} \int_a^b \left\{ \begin{matrix} p(x) \\ t(x) \end{matrix} \right\} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

В случае, если трещина полубесконечная, то имеем

$$K_{I,II}(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{matrix} p(x) \\ \tau(x) \end{matrix} \right\} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (1.96)$$

Из (1.95), (1.96) видно, что для того, чтобы определить коэффициенты интенсивности, необходимо знать нагрузку на берегах разреза.

Рассмотрим вначале постановку задач теплопроводности для полосы с разрезами, рисунок 1.2. Полоса занимает область $|x| < \infty, 0 \leq y \leq h, |z| \leq \delta$.

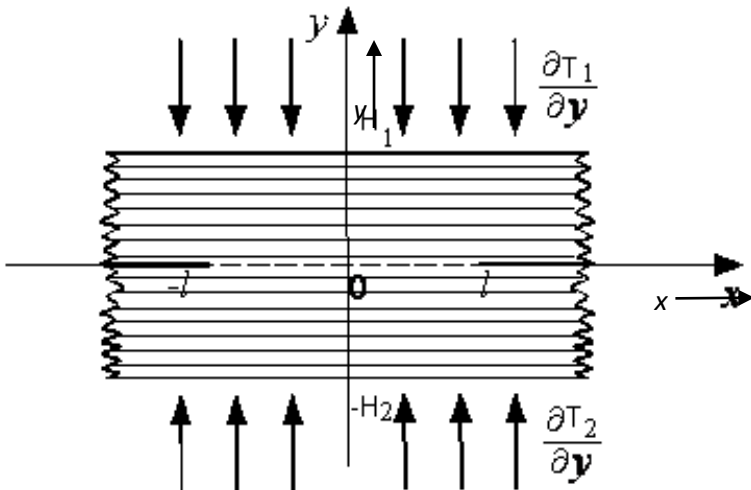


Рис. 1.2. Трещины в микрослоистой ортотропной среде

Пусть между боковыми поверхностями и окружающей средой происходит симметричный относительно плоскости $z=0$ теплообмен по закону Ньютона в среду с температурой T_c . В полосе имеются 2 разреза, $H_1 = H_2 = h$.

Нахождение распределения температурного поля $T(x, y, t)$ в полосе сводится к решению уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \lambda^2 \Theta - \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \quad (1.97)$$

$$\Theta = T - T_c, \quad \lambda^2 = \frac{\alpha}{\lambda h}, \quad \chi = \frac{\lambda}{c\rho},$$

где α — коэффициент теплообмена с боковых поверхностей полосы;

$2h$ — толщина полосы;

c — удельная теплоёмкость;

ρ — плотность полосы.

Граничные условия на гранях полосы могут быть трёх видов:

$$1. \quad T(x, 0, t) = T^{(1)}(x, t), \quad T(x, h, t) = T^{(2)}(x, t); \quad (1.98)$$

$$2. \quad \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = q^{(1)}(x, t), \quad \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=h} = q^{(2)}(x, t); \quad (1.99)$$

$$3. \quad \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = q^{(1)}(x, t), \quad T(x, h, t) = T^{(2)}(x, t). \quad (1.100)$$

Условия на разрезах L_i ($i=1, \dots, N$)

$$T^\pm(\xi_0, t) = T_{(1)}^\pm(\xi_0, t); \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial T_0(\xi_0, t)}{\partial n^0} = q^\pm(\xi_0, t); \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial T^+(\xi_0, t)}{\partial n^0} = \frac{\partial T^-(\xi_0, t)}{\partial n^0}, \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial T(\xi_0, t)}{\partial n^0} - \frac{\delta_i}{\lambda} [T^+(\xi_0, t) - T^-(\xi_0, t)] = 0,$$

где ξ, ξ_0 – дуговые координаты точек разрезом;

δ_i – коэффициенты теплопроводности i -й трещины.

Начальное условие

$$T(x, y, t) = 0 \text{ при } t = 0, \quad (1.104)$$

где $T^{(1)}(x, t), T^{(2)}(x, t), q^{(1)}(x, t), q^{(2)}(x, t), T_{(1)}^\pm(\xi_0, t), q_{(1)}^\pm(\xi_0, t)$ – заданные функции на берегах разрезом,

\bar{n}^0 – нормаль к разрезам, индексы «+», «-» означают предельное значение величины при подходе к разрезам со стороны положительного и отрицательного направлений нормали n^0 .

Температурное поле $T(x, y, t)$ в полосе предоставляется в виде суперпозиции двух полей: $T_0(x, y, t)$ — распределение температуры в полосе без трещин. Второе поле $T_*(x, y, t)$ ищется как решение однородного уравнения теплопроводности (1.97) при $\lambda = 0$ и с одним из граничных условий

$$1. T_*(x, 0, t) = T_*(x, h, t) = 0; \quad (1.105)$$

$$2. \left. \frac{\partial T_*(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial T_*(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=h} = 0; \quad (1.106)$$

$$3. \left. \frac{\partial T_*(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, T_*(x, y, t) = 0. \quad (1.107)$$

На разрезах выполняются условия

$$T_*^\pm(\xi_0, t) = f^\pm(\xi_0, t); \quad (1.108)$$

$$\frac{\partial T_*^\pm(\xi_0, t)}{\partial n^0} = q^\pm(\xi_0, t); \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial T_*^+(\xi_0, t)}{\partial n^0} = \frac{\partial T_*^-(\xi_0, t)}{\partial n^0}; \quad (1.110)$$

$$\frac{\partial T_*^\pm(\xi_0, t)}{\partial n^0} - \frac{h}{t} [T_*^+(\xi_0, t) - T_*^-(\xi_0, t)] = g(\xi_0, t).$$

Здесь используются обозначения

$$\begin{aligned} f^*(\xi_0, t) &= T_1^\pm(\xi_0, t) - T_0(\xi_0, t); \\ g^\pm(\xi_0, t) &= \frac{1}{\lambda} g^\pm(\xi_0, t) - \frac{\partial T_0(\xi_0, t)}{\partial n_0}; \\ g(\xi_0, t) &= -\frac{\partial T_0(\xi_0, t)}{\partial n_0}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Таким образом, нахождение температурного поля в полосе с разрезами сводится к нахождению функции $T_*(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 T_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial y^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1.112)$$

граничным условиям (1.108) – (1.109) и начальному условию

$$T_*(x, y, 0) = 0 \text{ при } t = 0. \quad (1.113)$$

Суперпозиция функций $T_0(x, y, t)$ и $T_*(x, y, t)$ в виде суммы

$$T(x, y, t) = T_0(x, y, t) + T_*(x, y, t) \quad (1.114)$$

даёт решение уравнений (1.97) с соответствующими условиями на внешних и внутренних границах и начальным условием.

Для стационарного температурного поля $T(x, y)$ имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \Delta T = 0. \quad (1.115)$$

На границе S области V функция $T(x, y)$ должна удовлетворять одному из граничных условий, которые записываются в виде:

$$1) \quad T(x, y) = f_1(x_S, y_S), (x, y) \in S, \quad (1.116)$$

когда на границе известна температура;

$$2) \quad \frac{\partial T}{\partial n} = f_2(x_S, y_S), (x, y) \in S, \quad (1.117)$$

если на границе известна плотность тѐплового потока, n — внешняя нормаль;

$$3) \quad \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \alpha T_c, (x, y) \in S, \quad (1.118)$$

когда на границе известна температура окружающей среды T_c , теплообмен, с которой совершается по закону Ньютона (α – коэффициент теплообмена).

В случае неограниченной плоскости (x, y) , в которой вдоль оси x имеется конечный симметричный разрез $|x| \leq l, y = 0$, который моделирует термоизолированную трещину, решение уравнения (1.115) ищется в виде

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T^{(1)}(x, y), \quad (1.119)$$

где $T_0(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.115), т. е. описывает распределение температуры в области без разреза, а $T^{(1)}(x, y)$, описывает возмущённое поле, вызванное наличием трещины.

На берегах термоизолированной трещины выполняется условие

$$\frac{\partial T^+}{\partial y} = \frac{\partial T^-}{\partial y} = 0, |x| < l, y = 0 \quad (1.120)$$

Здесь знак «+» относится к верхнему, а «-» — нижнему берегам разреза. Подставляя (1.119) в (1.120) получим

$$\frac{\partial T^{(1)+}}{\partial y} = \frac{\partial T^{(1)-}}{\partial y} = \frac{\partial T_0}{\partial y} = q(x), \quad |x| < l, y = 0 \quad (1.121)$$

В концах разреза $x = \pm l$ температура непрерывна

$$T^{(1)+}(x, 0) = T^{(1)-}(x, 0) \text{ при } x = \pm l. \quad (1.122)$$

Температура $T^{(1)}(x, y)$ записывается в виде

$$T^{(1)}(x, y) = R_e f(z), \quad (1.123)$$

где $f(z)$ — произвольная кусочно-голоморфная функция комплексного переменного z .

Вычисляя производные $T^{(1)}(x, y)$, получим

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} = R_e F(z), \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} = -J_m F(z), \quad F(z) = f'(z). \quad (1.124)$$

Введём функцию действительного аргумента $\gamma(x)$, с помощью которой скачок температуры $T^{(1)}(x, y)$ при переходе через разрез представим в виде

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} \left[T_{(x,0)}^{(1)+} - T_{(x,0)}^{(1)-} \right], \quad |x| < l. \quad (1.125)$$

Продифференцировав (1.125), получим

$$2\gamma'(x) = \frac{\partial T^{(1)+}}{\partial x} - \frac{\partial T^{(1)-}}{\partial x}, \quad |x| < l. \quad (1.126)$$

Используя формулы (1.124), из условий (1.121), (1.126) получим

$$\begin{aligned} F^+(x) - \bar{F}^+(x) - F^-(x) + \bar{F}^-(x) &= 0; \\ F^+(x) + \bar{F}^+(x) - F^-(x) - \bar{F}^-(x) &= 4\gamma'(x). \end{aligned} \quad (1.127)$$

Складывая равенства (1.127) приходим к задаче сопряжения, которая позволяет найти кусочно-голоморфную функцию $F(z)$ по её скачку, заданному на разрезе $|x| < l$:

$$F^+(x) - F^-(x) = 2\gamma'(x), \quad |x| < l. \quad (1.128)$$

Выражения для $F^+(x), F^-(x)$ определяются формулами Сохоцкого-Племеля [5, 12, 17–20, 22, 23]:

$$F^+(x) = \frac{1}{2}\gamma'(x) + \frac{1}{2\pi_i} \int_{-e}^e \frac{\gamma'(t)dt}{t-x}; \quad (1.129)$$

$$F^-(x) = -\frac{1}{2}\gamma'(x) + \frac{1}{2\pi_i} \int_{-e}^e \frac{\gamma'(t)dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения интеграла,

$$\int_{-e}^e \frac{\gamma'(t)dt}{t-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-e}^{0-\varepsilon} \frac{\gamma'(t)dt}{t-x} + \int_{0+\varepsilon}^e \frac{\gamma'(t)dt}{t-x} \right]. \quad (1.130)$$

Согласно вышесказанному функция $F(z)$ определяется интегралом

$$F(z) = \frac{1}{\pi_i} \int_{-e}^e \frac{\gamma'(t)dt}{t-z}. \quad (1.131)$$

Интегрируя (1.131) по z , получим

$$f(z) = \frac{1}{\pi_i} \int_{-e}^e \frac{\gamma(t)dt}{t-z}. \quad (1.132)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как на бесконечности $f(z)$ стремится к нулю. Из формул (1.121) и (1.131) получается интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\gamma'(x)$.

$$\int_{-e}^e \frac{\gamma'(t)dt}{t-x} = \pi g(x), \quad |x| < l, \quad (1.133)$$

причём $\gamma'(t)$ ещё должна удовлетворять условию

$$\int_{-e}^e \gamma'(t)dt = 0 \quad (1.134)$$

которое следует из соотношений (1.132), (1.125).

Для задачи теплопроводности в случае бесконечной плоскости с двумя разрезами на лучах $|x| \geq l$ от $x(y) > l$, которые теплоизолированы, интегральное уравнение для плоской задачи теплопроводности имеет вид

$$\int_{-\infty}^{-e} \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt + \int_e^{+\infty} \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = \pi g(x), \quad |x| > l. \quad (1.135)$$

Уравнения (1.133), (1.135) могут быть решены для различных случаев задания $g(x)$ [21–23, 26].

ГЛАВА 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В МИКРО И МАКРОСЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

2.1 Определение термоупругого напряжённо-деформированного состояния в ортотропной микрослоистой пластине градиентного типа

2.1.1 Температурное поле в микрослоистой ортотропной пластине с разрезами

Рассмотрим пластину толщиной $H = H_1 + H_2$ ($-H_2 \leq y \leq H_1$), размеры которой по z и x неограниченные $-\infty < x, z < \infty$. Вдоль оси y пластина сверху и снизу подвергается действию тепловых потоков так, что плоскости $y = h_1$, $y = -h_2$ перпендикулярны вектору потока тепла. Между верхней частью пластины $0 \leq y \leq H_1$ и нижней $H_2 \leq y \leq 0$ имеются разрезы $l < x < \infty$, $-\infty < x < -l$, $-\infty < z < \infty$ и перемычка $|x| \leq l$. На рисунке 2.1 в плоскости OXY изображена схема задачи.

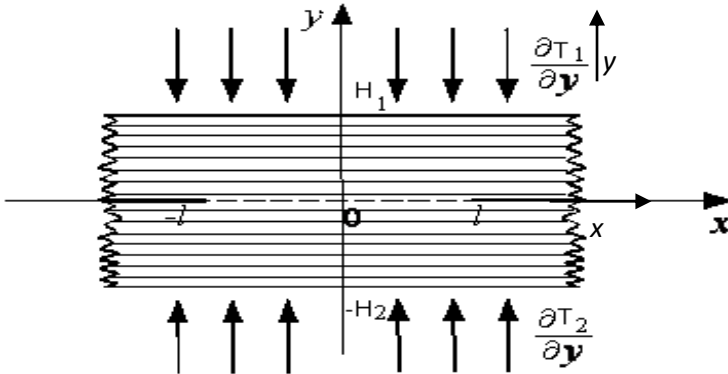
Верхний слой толщины H_1 жестко скреплен с нижним слоем толщины H_2 по плоскости $y = 0$; $-l \leq x \leq l$.

Уравнения, описывающие стационарные температурные поля $T^{(\tau)}(x, y)$ в среде, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\Lambda_{11}^{(\tau)}(y) \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} \right] + \Lambda_{22}^{(\tau)}(y) \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, \quad \tau = 1, 2, \quad (2.1)$$

где $\tau = 1$ соответствует верхнему слою, $\tau = 2$ – нижнему.

В дальнейшем также будем использовать вместо $\tau = 1$ знак «+»,
вместо $\tau = 2$ — знак «-».



H_i ($i=1, 2$) толщины слоев, l — расстояние между концами разрезов
в плоскости OXY ($y=0$).

Рис. 2.1. Микронеоднородный слой под действием тепловых потоков

Наиболее общий вид экспоненциальной зависимости можно предста-
вить в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y) = \Lambda_{ij}^{(0)(\tau)} \exp\left(\delta^{(\tau)} y / l\right), \quad i, j = 1, 2, \quad (2.2)$$

где учтены микрослоистость, ортотропность и макроскопическая
двухслойность. Разрезы моделируют слабое расслоение двух пла-
стин из разных композиционных микрослоистых материалов таких,
что на границе сопряжения $y = 0$ градиенты коэффициентов меня-
ются скачком.

Таким образом, можно рассмотреть класс микрослоистых сред,
описываемых функциями экспоненциального типа, причем уравне-
ние (2.1) является уравнением с постоянными коэффициентами, ко-
торое можно записать в виде

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0; \quad (2.3)$$

здесь $k_0^{(\tau)} = \frac{\Lambda_{22}^{0(\tau)}}{\Lambda_{11}^{0(\tau)}}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $\tau = 1, 2$,

где константа $c_{(\alpha)}^{(\tau)}$ меняется в зависимости от α -типа неоднородности в нижнем и верхнем слоях и в зависимости от $\tau = 1, 2$ при переходе от верхнего слоя к нижнему слою.

Решение уравнения теплопроводности (2.3), исходя из симметрии задачи, будем искать в виде [13, 14]

$$T^{(\tau)}(x, y) = T_{(0)}^{(\tau)}(y) + T_{(1)}^{(\tau)}(x, y), \quad \tau = 1, 2, \quad (2.4)$$

где $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$ — решения задач теплопроводности для пластины без разрезов, без расслоения с граничными условиями, заданными на плоскостях $y = H_1$, $y = -H_2$, не зависящими от координаты x ;

$T_{(1)}^{(\tau)}(x, y)$ — решения задач теплопроводности при нулевых граничных условиях при $y = H_1$, $y = -H_2$ и краевых условиях на разрезах, полученных из решения задачи для $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$.

Подставляя (2.4) в (2.30) и разделяя уравнения для $T_{(0)}^{(\tau)}$, $T_{(1)}^{(\tau)}$, получим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{dT_{(0)}^{(\tau)}}{dy} + k_0^{(\tau)} \frac{d^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{dy^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) запишем в виде

$$T_{y(0)}^{(\tau)} = \theta^{(\tau)}(y), \quad \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \theta^{(\tau)}(y) + \theta^{(\tau)}(y) = 0. \quad (2.7)$$

Тогда имеем

$$\theta^{(\tau)}(y) = e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y + a^{(\tau)}} = T_{(0)}^{(\tau)}(y), \quad T_{(0)}^{(\tau)}(y) = b^{(\tau)} - \frac{e^{a^{(\tau)}}}{c_{(\alpha)}^{(\tau)}} e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y} \quad (2.8)$$

В (2.8) константы $a^{(\tau)}$, $b^{(\tau)}$ должны быть определены из граничных условий при $y = H_1$, $y = -H_2$.

Применим преобразование Фурье по x и находим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{d\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - k_0^{(\tau)} \lambda^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) + \frac{d^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} = 0, \quad (2.9)$$

$$\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} T^{(1)(\tau)}(x, y) e^{-i\lambda x} dx.$$

Решение уравнения (2.9) можно получить методом характеристического уравнения, которое в данном случае имеет вид

$$p^2 + \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} p - k_0^{(\tau)} \lambda^2 = 0. \quad (2.10)$$

Решение (2.9) запишется в виде

$$\tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y) = A^{(\tau)}(\lambda)e^{\lambda_1 y} + B^{(\tau)}(\lambda)e^{\lambda_2 y}; \quad (2.11)$$

$$\lambda_{1,2}^{(\tau)} = -\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{2} \pm \sqrt{\frac{c_{(\alpha)}^{2(\tau)}}{2} + k_0^{(\tau)}\lambda^2}.$$

В (2.11) произвольные неизвестные $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны быть определены из граничных условий. Решение уравнения (2.6) с учетом (2.11) с помощью обратного преобразования Фурье запишется в виде

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_{(1)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{ix\lambda} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A^{(\tau)}(\lambda) e^{p_1^{(\alpha)} y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{p_2^{(\alpha)} y} \right) e^{ix\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.2 Граничные условия для температурного поля в слое

В двумерной задаче стационарной теплопроводности, которая рассматривается в данной работе, необходимо сформулировать граничные условия при $y = H_1$, $y = -H_2$ и на разрезах $l \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq -l$ [19, 21–26, 4–А, 11–А].

На верхней и нижней плоскостях пластины могут быть сформулированы три типа граничных условий для $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$ и соответственно нулевые условия для $T_{(1)}^{(\tau)}(x, y)$.

Согласно [8, 10, 11] эти условия можно записать в виде

$$1. T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = T_{H_1}(x), \quad T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = T_{H_2}(x); \quad (2.13)$$

$$2. \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = q_{H_1}(x), \quad \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = q_{H_2}(x); \quad (2.14)$$

$$3. \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = q_{H_1}(x), \quad T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = T_{H_2}(x) \quad (2.15)$$

или

$$T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = T_{H_1}(x), \quad \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = q_{H_2}(x).$$

В формулах (2.13)–(2.15) при $y = H_1$ берется $\tau = 1$, при $z = -H_2$ берется $\tau = 2$.

Граничные условия на разрезах формулируются в виде

$$T^+(x, y) \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} = T^-(x, y) \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T^\pm(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} = q_{(=)}^\pm(x, 0), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial T^+(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} = \frac{\partial T^-(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} - \frac{h_i}{\Lambda_{22}^0} [T^+(x, y) - T^-(x, y)] \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty}. \quad (2.19)$$

Здесь h_i – коэффициент теплопроницаемости трещины $l \leq |x| < \infty$, $i = 1, 2$, индексы «+», «-» означают предельные значения величин при подходе к разрезам со стороны положительных и отрицательных y или из слоя с индексом $\tau = 1$ и из слоя с индексом

$\tau = 2$. В области $|x| \leq l$ перемычки имеет место идеальный тепловой контакт, $q_{(=)}^{\pm}$ – потоки тепла на разрезах.

Рассмотрим подробнее условия (2.14). Согласно представлению (2.4) для нулевого приближения имеем

$$\frac{\partial T_{(1)}^{(0)}(y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1} = q_{H_1}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial T_{(2)}^{(0)}(y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2} = q_{H_2}.$$

Подставляя (2.8) в (2.20), получим систему двух уравнений для нахождения произвольных констант $a^{(\tau)}$ и $b^{(\tau)}$ $\tau = 1, 2$:

$$-\frac{e^{a^{(1)}}}{c_{(\alpha)}^{(1)}} \left(-c_{(\alpha)}^{(1)} \right) e^{-c_{(\alpha)}^{(1)} H_1} = q_{H_1}; \quad -\frac{e^{a^{(2)}}}{c_{(\alpha)}^{(2)}} \left(c_{(\alpha)}^{(2)} \right) e^{c_{(\alpha)}^{(2)} H_2} = -q_{H_2}. \quad (2.21)$$

Сформулируем граничные условия для первого приближения согласно [19, 21–26, 4–А, 11–А]:

$$1. T_{(\tau)}^{(1)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = 0, \quad T_{(\tau)}^{(1)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = 0; \quad (2.22)$$

$$2. \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = 0, \quad \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = 0; \quad (2.23)$$

$$3. \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = 0, \quad \partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = 0, \quad (2.24)$$

где $\tau = 1$ при $y = H_1$ и $\tau = 2$ при $y = -H_2$.

Граничные условия на разрезах

$$T^{(1)\pm}(x, 0^\pm) \Big|_{l \leq |x| < \infty} = T_{(=)}^{(1)\pm}(x) - T^{(0)\pm}(0); \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial T^{(1)\pm}(x, 0^\pm)}{\partial y} \Big|_{l \leq |x| < \infty} = \Lambda_{22}^0 q_{(=)}^\pm(x, 0^\pm) - \frac{\partial T^{(0)\pm}(y)}{\partial y} \Big|_{y=0}; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T^{(1)+}}{\partial y} \Big|_{y=0^+, l \leq |x| < \infty} = \frac{\partial T^{(1)-}}{\partial y} \Big|_{y=0^-, l \leq |x| < \infty}; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0, l < |x| < \infty} - \frac{h_i}{\Lambda_{22}^0} \left[T_{(x,y)}^{(1)+} - T_{(x,y)}^{(1)-} \right] = - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=0, l < |x| < \infty}; \quad (2.28)$$

$$T^{(1)+}(x, y) \Big|_{y=0, |x| \leq l} = T^{(1)-}(x, y) \Big|_{y=0, |x| \leq l};$$

$$\frac{\partial T^{(1)+}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, |x| \leq l} = \frac{\partial T^{(1)-}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, |x| \leq l},$$

где $T_{(=)}^\pm$ – температура на разрезах.

Здесь символ «+» соответствует $\tau = 1$ при подходе к $y = 0$ сверху, символ «-» соответствует $\tau = 2$ при подходе к $y = 0$ снизу.

2.1.3 Определение термонапряжений и деформаций в слое

Напряженно-деформированное состояние среды в приближении квазистатики описывается уравнениями связи между напряжениями, деформациями и температурой для ортотропной микрослоистой среды с помощью соотношений Коши (связи тензора деформаций и вектора еремещений) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = c_{11}(y)e_x + c_{12}(y)e_y + \alpha_1(y)T(x, y); \\ \sigma_y = c_{12}(y)e_x + c_{22}(y)e_y + \alpha_2(y)T(x, y); \\ \tau_{xy} = c_{66}(y)e_{xy}, \\ e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

где u , ϑ – компоненты вектора перемещения .

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.47) в (2.46), получим уравнения равновесия в перемещениях в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{66}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (c_{12}(y) + c_{66}(y)) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial c_{11}(y)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) - \alpha_1(y) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ c_{66}(y) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + c_{22}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{66}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_{12}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial c_{22}(y)}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial c_{12}(y)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_2(y)}{\partial y} T(x, y) - \alpha_2(y) \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Здесь $c_{ij}(y)$, $\alpha_j(y)$ коэффициенты упругости и теплоемкости соответственно.

Аналогично (2.2) представим $c_{ij}(y)$, $\alpha_j(y)$ в виде

$$c_{ij}^{(\tau)}(y) = c_{ij}^{0(\tau)} \exp\left(\beta^{(\tau)} y / l\right), \quad i, j = 1, 2, 6; \quad (2.32)$$

$$\alpha_j(y) = \alpha_j^0 \exp\left(\gamma^{(\tau)} y / l\right), \quad k=1, 2. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.32) и (2.33) в (2.32), получим

$$\begin{aligned} & c_{11}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 u^{(\tau)}}{\partial x^2} + c_{66}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 u^{(\tau)}}{\partial y^2} + \left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}\right) \frac{\partial^2 v^{(\tau)}}{\partial x \partial y} + \\ & + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \left(\frac{\partial u^{(\tau)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial x} \right) - \alpha_1^{0(\tau)} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial x} = 0, \\ & c_{66}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 v^{(\tau)}}{\partial x^2} + c_{22}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 v^{(\tau)}}{\partial y^2} + \left(c_{66}^{0(\tau)} + c_{12}^{0(\tau)}\right) \frac{\partial^2 u^{(\tau)}}{\partial x \partial y} + \\ & + c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial y} + c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \frac{\partial u^{(\tau)}}{\partial x} - \alpha_2^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} T^{(\tau)} - \alpha_2^{0(\tau)} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $c_{(\alpha)}^{(\tau)}$ – константы, зависящие, как было показано в первом разделе, от характера распределения неоднородности и от номера макрослоя.

Применяя преобразование Фурье по x к уравнениям (2.34), получим систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} & -c_{11}^{0(\tau)} p^2 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) + c_{66}^{0(\tau)} \frac{d^2 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} - \\ & - ip \left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) \frac{d\tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} + \\ & + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \left(\frac{d\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - ip v^{(\tau)}(\lambda, y) \right) + \\ & + \alpha_1^{0(\tau)} ip \tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y) = 0; \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned}
& -c_{11}^{0(\tau)} p^2 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) + c_{66}^{0(\tau)} \frac{d^2 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} - \\
& -ip \left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) \frac{d\mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} + \\
& + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \left(\frac{d\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - ip\mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y) \right) + \\
& + \alpha_1^{0(\tau)} ip \tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y) = 0;
\end{aligned} \tag{2.35б}$$

$$\begin{aligned}
& -c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 \mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y) + c_{22}^{0(\tau)} \frac{d^2 \mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} - \\
& -ip \left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) \frac{d\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} + \\
& + c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \frac{d\mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} ip \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) - \\
& - \alpha_2^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y) - \alpha_2^{0(\tau)} \frac{d\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} = 0;
\end{aligned} \tag{2.35в}$$

$$\left[\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y), \mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u^{(\tau)}(x, y), \mathbf{v}^{(\tau)}(x, y) \right] e^{i\lambda x} dx \tag{2.35г}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)$, $\mathbf{v}^{(\tau)}(\lambda, y)$ является неоднородной за счет температурных членов $\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y)$, $d\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y)/dy$, которые были найдены в предыдущих разделах. Представляя решение уравнений (2.35 а-г) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, берем решение однородного уравнения представим в виде

$$\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) = \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) \exp(\eta y), \quad \tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y) = \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) \exp(\eta y). \quad (2.36)$$

Характеристическое уравнение для однородного уравнения получим в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_{11}^{0(\tau)} \lambda^2 \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) + c_{66}^{0(\tau)} \eta^2 \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) - \left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) i \lambda \eta \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) + \\ + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \mu \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) - i \lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) = 0; \\ -c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) + c_{22}^{0(\tau)} \eta^2 \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) - \left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) i \lambda \eta \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) + \\ + c_{22}^{(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \eta \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) - c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} i \lambda \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) = 0. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Линейная однородная система алгебраических уравнений относительно $\tilde{U}^{(\tau)}(\lambda)$, $\tilde{V}^{(\tau)}(\lambda)$ имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\left| \begin{array}{cc} -c_{11}^{0(\tau)} \lambda^2 + c_{66}^{0(\tau)} \eta^2 + c_{66}^{(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \eta & -\left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) i \lambda \eta - i \lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \\ -\left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) i \lambda \eta - i \lambda c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} & -c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 + c_{22}^{0(\tau)} \eta^2 + \eta c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \end{array} \right| = 0. \quad (2.38)$$

Определитель (2.1.3.10) приводится к виду

$$\left(c_{66}^{0(\tau)} \eta^2 + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \eta - c_{11}^{0(\tau)} \lambda^2 \right) \left(c_{22}^{0(\tau)} \eta^2 + \mu c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} - c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 \right) + \\ + \left[\left(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)} \right) \lambda \eta + \lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \right] \left[\left(c_{66}^{0(\tau)} + c_{12}^{0(\tau)} \right) \lambda \mu + c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \lambda \right] = 0. \quad (2.39)$$

Уравнение (2.56) относительно η запишем в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^4 + A^{(\tau)}\eta^3 + B^{(\tau)}\eta^2 + C^{(\tau)}\eta + D^{(\tau)} = 0; \\ A^{(\tau)} = 2c_{(\alpha)}^{2(\tau)}, \quad B = c_{(\alpha)}^{2(\tau)} + N; \\ N^{(\tau)} = \lambda^2 \left(c_{12}^{02(\tau)} + 2c_{66}^{0(\tau)}c_{12}^{0(\tau)} - c_{11}^{0(\tau)}c_{22}^{0(\tau)} \right) \left(c_{22}^{0(\tau)}c_{66}^{0(\tau)} \right)^{-1}, \quad (2.40) \\ c^{(\tau)} = c_{(\alpha)}^{(\tau)}N; \\ D^{(\tau)} = \lambda^2 \left(c_{11}^{0(\tau)2} + c_{12}^{0(\tau)} \right) \left(c_{22}^{0(\tau)} \right)^{-1}. \end{array} \right.$$

Корни характеристического уравнения (2.57) имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_{1,2}^{(\tau)} &= -\frac{A^{(\tau)}}{4} + \\ &+ \frac{1}{4} \sqrt{c_{(\alpha)}^{2(\tau)} - 2 \left(B^{(\tau)} - C_{(\alpha)}^{2(\tau)} \right) \pm 2 \sqrt{\frac{1}{4} A^{2(\tau)} - 2 \left(B^{(\tau)} - c_{(\alpha)}^{(\tau)} \right) - 4D^{(\tau)}(p)}}; \quad (2.41) \\ \eta_{3,4}^{(\tau)} &= -\frac{A^{(\tau)}}{4} - \\ &- \frac{1}{4} \sqrt{c_{(\alpha)}^{2(\tau)} - 2 \left(B^{(\tau)} - C_{(\alpha)}^{2(\tau)} \right) \pm 2 \sqrt{\frac{1}{4} A^{2(\tau)} - 2 \left(B - c_{(\alpha)}^{(\tau)} \right) - 4D^{(\tau)}(p)}}. \end{aligned}$$

Представим решения неоднородных дифференциальных уравнений (2.35) и (2.36) в виде суммы общих решений однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений, в которых правая часть зависит от температуры:

$$\left\{ \begin{aligned} u^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} \right) e^{i\lambda x} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{(1)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda; \\ v^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^4 S_k^{(\tau)}(\lambda) M_k^{(1)(\tau)}(\lambda) \eta_k^{(\tau)} e^{\eta_k^{(\tau)} y} \right) e^{i\lambda x} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{(2)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right. \quad (2.42)$$

Неизвестные константы $S_k^{(\tau)}(\lambda)$, $\eta_k^{(\tau)}(\lambda)$ находятся из силовых граничных условий. Выражения для $T_{(j)}^{(\tau)}(\lambda, y)$ получены на основе решений для уравнения теплопроводности (2.1). На основе формул (2.41), (2.42) вычислим деформации и напряжения

$$\begin{aligned} e_y^{(\tau)} &= \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \mu_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) \eta_k^{(\tau)} e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \right] e^{i\lambda x} d\lambda; \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$\begin{aligned} e_{xy}^{(\tau)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \right] e^{i\lambda x} d\lambda + \\ &+ ip \left[V_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + V_{(1)}^{(\tau)}(x, y) \right]; \end{aligned}$$

$$e_x^{(\tau)} = \frac{\partial U^{(\tau)}}{\partial x} = ip \left[U_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + u_{(1)}^{(\tau)}(x, y) \right]. \quad (2.43б)$$

Подставляя (2.43) в соотношения (2.29) получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(\tau)} &= c_{11}^{(\tau)}(y)e_x^{(\tau)} + c_{12}^{(\tau)}(y)e_y^{(\tau)} + \alpha_1^{(\tau)}(y)T^{(\tau)}; \\ \sigma_y^{(\tau)} &= c_{12}^{(\tau)}(y)e_x^{(\tau)} + c_{22}^{(\tau)}(y)e_y^{(\tau)} + \alpha_2^{(\tau)}(y)T^{(\tau)}; \\ \tau_{xy}^{(\tau)} &= c_{66}^{(\tau)}(y)e_{xy}^{(\tau)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Граничные условия в напряжениях рассмотрим для случая, когда границы $y = H_1$, $y = -H_2$ свободны от силовых нагрузок и подвергаются только действию потоков тепла

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{\substack{y=H_1 \\ |x| < \infty}}^{\tau=1} &= \sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{\substack{y=H_2 \\ |x| < \infty}}^{\tau=2} = \\ &= \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{\substack{y=H_1 \\ |x| < \infty}}^{\tau=1} = \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{\substack{y=H_2 \\ |x| < \infty}}^{\tau=2} = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Граничные условия на разрезах

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^+(x, y) \Big|_{\substack{y=0^+, \\ -\infty < |x| \leq -l, \infty \leq |x| < \infty}} &= \tau_{xy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_1(x); \\ \sigma_{yy}^+(x, y) \Big|_{\substack{y=0^+, \\ -\infty < |x| \leq -l, \infty \leq |x| < \infty}} &= \sigma_{yy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_2(x). \end{aligned} \quad (2.46)$$

В области перемычки $y = 0$, $-l \leq x \leq l$ для производных полевых величин u , v имеем соотношения

$$\frac{\partial u^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u^-(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v^-(x, y)}{\partial x}. \quad (2.47)$$

В соотношениях (2.46), (2.47) знак «+» соответствует $\tau = 1$, знак «-» соответствует $\tau = 2$. Для дальнейшего рассмотрения целесообразно перейти к безразмерным величинам, по формулам

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(\tau)} &= \hat{T}^{(\tau)} / (-Q_0 l / \Lambda_{22}^0), \\ \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x^{(\tau)} \\ \hat{\sigma}_y^{(\tau)} \\ \hat{\tau}_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma_x^{(\tau)} \\ \sigma_y^{(\tau)} \\ \tau_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} \left(-E_0 Q_0 \alpha_0 l / \Lambda_{22}^0 \right)^{-1}, \\ \begin{pmatrix} \hat{u}^{(\tau)} \\ \hat{g}^{(\tau)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u^{(\tau)} \\ g^{(\tau)} \end{pmatrix} \left(-Q_0 \alpha_0 l^2 / \Lambda_{22} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь верхний символ « $\hat{}$ », которым обозначены безразмерные величины, в дальнейших рассмотрениях опускаем, имея в виду, что все величины являются безразмерными. В безразмерных величинах перемычка в пластине будет расположена в плоскости $y = 0$ для $-1 < x < 1$, а разрезы простираются в плоскости $y = 0$ для $-\infty < x \leq -1$, $1 \leq x < \infty$. В дальнейшем будем рассматривать случай микрослоистой среды, в которой теплофизические и упругие коэффициенты в зависимости от y изменяются непрерывно, а их градиенты (производные) терпят скачок при $y = 0$. Это означает, что $\Lambda_{ij}^{0(1)} = \Lambda_{ij}^{0(2)}$, $\alpha_1^{0(1)} = \alpha_2^{0(2)}$, $c_{ij}^{0(1)} = c_{ij}^{0(2)}$, $\delta^{(2)} - \delta^{(1)} \neq 0$, $\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)} \neq 0$, $\beta^{(2)} - \beta^{(1)} \neq 0$, $k_0^{(1)} = k_0^{(2)}$.

2.1.4 Вычисление распределения температуры в слоях

Стационарное распределение температуры, описываемое уравнением (2.3) и его решение, представляется в виде суперпозиции (2.4), где $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$ дается выражением (2.25), а $T_{(1)}^{(\tau)}(x, y)$ записывается в виде обратного преобразования Фурье (2.12). Рассмотрим случай задания потоков тепла на внешних границах слоя $y = H_1$, $y = -H_2$. На разрезах $y = 0$, $l \leq |x| < \infty$ используем условия в форме (2.15), а на перемычке $|x| < l$ – условия идеального контакта (2.19). Подставляя в граничные условия выражения для $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$, $T_{(1)}^{(\tau)}(x, y)$, получим уравнения для нахождения неизвестных $A^{(\tau)}(\lambda)$, $B^{(\tau)}(\lambda)$. Полученные соотношения представляют собой интегральные уравнения относительно неизвестных $A^{(\tau)}(\lambda)$, $B^{(\tau)}(\lambda)$, решение которых обычно получают с использованием метода интеграла Коши. Согласно методу [12, 19, 21–26, 4–А, 11–А] введем функцию

$$\gamma(x) = \frac{\partial}{\partial x} [T(x, 0^+) - T(x, 0^-)] = \frac{\partial}{\partial x} [T^{(1)}(x, 0^+) - T^{(1)}(x, 0^-)]; \quad (2.49)$$

$$\int_{-l}^l \gamma(x) dx = 0, \quad \gamma(x) = 0, \quad |x| > l. \quad (2.50)$$

Для теплоизолированных трещин выполняются условия

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial y} \right|_{\substack{y=0^+ \\ |x|<l}} = \left. \frac{\partial T^-}{\partial y} \right|_{\substack{y=0^- \\ |x|<l}} = 0, \quad (2.51)$$

которые с учетом представления (2.4) дают соотношение

$$\frac{\partial T^{(1)+}}{\partial y} = \frac{\partial T^{(1)-}}{\partial y} = -\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y} = q(x), \quad |x| < 1, \quad y = 0. \quad (2.52)$$

Условие непрерывности температуры в вершине трещины имеет вид

$$T^{(1)+}(x, 0^+) = T^{(1)-}(x, 0^-) \quad \text{при } x = \pm 1. \quad (2.53)$$

Тогда для нахождения функции $\gamma(x)$ получаем интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(K(x, t) + \frac{1}{t-x} \right) \gamma(t) dt = \frac{2}{\sqrt{k_0}} (q-1). \quad (2.54)$$

$$N_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} e^{(\mu_2 - \mu_1)H_1}, \quad N_2 = \frac{\mu_2 \left(1 - e^{(\mu_2 - \mu_1)H_1} \right)}{\mu_3 \left(1 - e^{(\mu_4 - \mu_3)H_2} \right)};$$

$$N_3 = \frac{\mu_2 \left(1 - e^{(\mu_2 - \mu_1)H_1} \right)}{\mu_4 \left(1 - e^{(\mu_4 - \mu_3)H_2} \right)}, \quad N_4 = N_1 + N_2 - N_3 + 1; \quad N_5 = \frac{2(\mu_1 N_1 + \mu_2)}{\mu N_4 \sqrt{k_0}}.$$

Выражения для коэффициентов $A^{(\tau)}$, $B^{(\tau)}$ имеют вид

$$A^{(1)} = \frac{N_1}{N_4} \beta, \quad B^{(1)} = \frac{1}{N_4} \beta, \quad A^{(2)} = \frac{N_2}{N_4} \beta, \quad B^{(2)} = \frac{N_3}{N_4} \beta, \quad (2.55)$$

$$\beta = \frac{1}{i\mu_{-1}} \int_{-1}^1 \gamma(x) e^{i\mu x} dx.$$

Решение уравнения (2.71) ищем в виде

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T_j(x), \quad (2.56)$$

где $T_j(x)$ — полиномы Чебышева первого рода;

Константы α_j должны быть найдены из системы алгебраических уравнений, которая получается после подстановки (2.73) в (2.71) и использования формулы Гаусса–Чебышева [21–26].

Из условия (2.54) следует, что $\alpha_0 = 0$, а для нахождения коэффициентов $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$ получается система уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j V_{j-1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j K(x) = \frac{2}{\sqrt{k_0}}(q-1), \quad |x| < 1. \quad (2.54)$$

Здесь $K_j(x)$ — полиномы Чебышева второго рода:

$$K_j(x) = (-1)^{k+1} \int_0^{\infty} (N_5(\mu) - 1) J_j(\mu) \sin(\mu x) d\mu,$$

для четных $j = 2k, k = 1, 2, \dots$

$$K_j(x) = -(-1)^k \int_0^{\infty} (N_5(\mu) - 1) J_j(\mu) \cos(\mu x) d\mu; \quad (2.58)$$

для нечетных $j = 2k + 1, k = 1, 2, \dots$,

где $J_j(\mu)$ — функции Бесселя.

Разобьем интервал $|x| < 1$ на части точками

$$x_l = \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right), \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (2.59)$$

тогда подставляя (2.57) в (2.56) получим систему алгебраических уравнений, удобную для численного счета

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\sin\left(\frac{j l \pi}{N+1}\right)}{\sin\left(\frac{l \pi}{N+1}\right)} + \sum_{j=1}^N \alpha_j K_j(x_l) = \frac{2}{\sqrt{k_0}}(q_l - 1);$$

(2.60)

$$q_l = q(x_l), \quad j, l = 1, 2, \dots, N.$$

Вычисляя коэффициенты α_j из (2.77) и подставляя в (2.73), получим приближенное выражение $\gamma(x)$ через значения $q(x)$, а затем — представление для распределения температуры в слое.

2.2 Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в пластине с разрезами

Рассмотрим влияние характера микронеоднородности коэффициентов теплопроводности, упругости, теплоемкости на коэффициенты интенсивности напряжений.

Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формулам [21–27]

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \left[\sqrt{1-x^2} \left(\sigma_y^\pm(x) - i\tau_{xy}^\pm(x) \right) \right], \quad (2.61)$$

где для данного раздела знак «+» принято относить к правой трещине ($x > 0$), знак «-» относится к левой ($x < 0$).

Коэффициенты K_I^\pm и K_{II}^\pm выражаются непосредственно через функции $G_i(i=1, 2)$, вычисляемые в точках $x = \pm 1$

$$K_I^\pm \leftarrow (\pm 1) = G_1(\pm 1); \quad K_{II}^\pm \leftarrow (\pm 1) = G_2(\pm 1). \quad (2.62)$$

Подставляя $G_i(\pm 1)$ в (2.75), получим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений. Предельные случаи изотропной

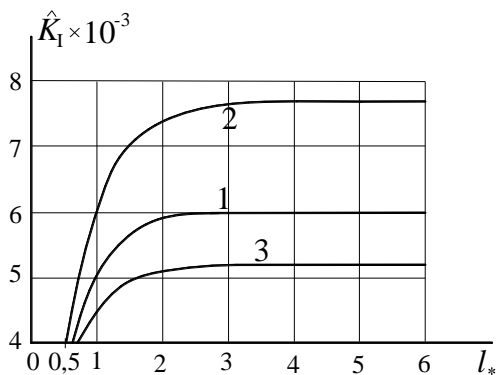
однородной неограниченной пластины с двумя разрезами находим, полагая в полученных формулах параметры $\delta^{(\tau)} = \beta^{(\tau)} = \gamma^{(\tau)} = 1$, $\Lambda_{11} = \Lambda_{22}$, $c_{11} = c_{66}$, $\alpha_1 = \alpha_2$ [8–10, 41].

Зависимости безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений $K_i^\pm = K_i^\pm / K_0$, $i = I, II$, $(K_0 = -E_0 \alpha_0 l q_H / \Lambda_{22}^0)$ от безразмерной величины H_1 / l , характеризующей толщину слоя (H_1), и расстояние между трещинами (l) изображены на рисунках 2.2–2.7. Здесь учитывается влияние безразмерных параметров $\delta_2 \delta_1^{-1}$, $\gamma_2 \gamma_1^{-1}$, $\beta_2 \beta_1^{-1}$, характеризующих изменение теплопроводных, теплоемкостных, упругих свойств при переходе от одного слоя к другому.

В случае равенства этих параметров единице неоднородность от слоя к слою, имеет один и тот же тип. Меняя распределение неоднородных свойств по слою, а также от слоя к слою получаем возможность влиять на величину коэффициентов концентрации напряжений.

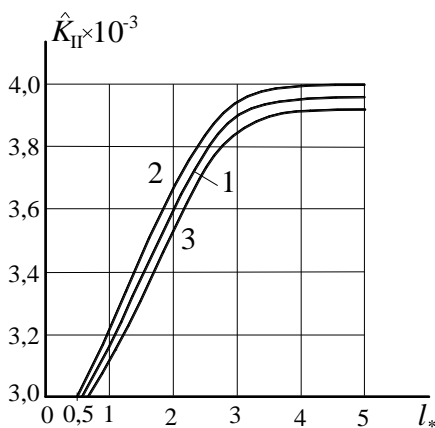
Изменение неоднородности от слоя к слою учитывается на уровне изменения градиента неоднородности при $y = 0$. Как следует из (2.19) и (2.49) сами коэффициенты при переходе через $y = 0$ непрерывны, а скачок, равный разностям $|\beta_2 - \beta_1| l^{-1}$, $|\gamma_2 - \gamma_1| l^{-1}$, $|\delta_2 - \delta_1| l^{-1}$, испытывают их производные. Таким образом, микрослоистость имеет кусочно-гладкий характер (слабо разрывная), когда на разрыве не требуется ставить граничные условия.

На рисунках 2.2 и 2.3 изображены зависимости K_I , K_{II} от $l_* = H_1 / l$ для случая, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент упругих свойств, а градиенты теплопроводности и теплоемкости непрерывны.



при $\gamma_2 / \gamma_1 = \delta_2 / \delta_1 = 1$ 1- $\beta_2 / \beta_1 = 1$; 2- $\beta_2 / \beta_1 = 0,5$; 3- $\beta_2 / \beta_1 = 2$

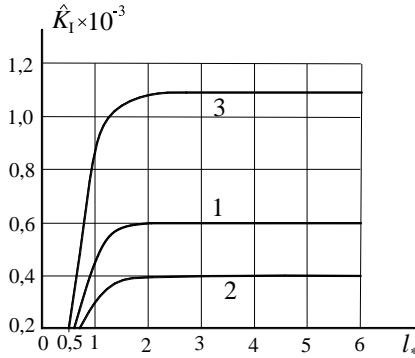
Рис. 2.2. Зависимость \hat{K}_I от l_*



при $\gamma_2 / \gamma_1 = \delta_2 / \delta_1 = 1$ 1- $\beta_2 / \beta_1 = 1$; 2- $\beta_2 / \beta_1 = 0,5$; 3- $\beta_2 / \beta_1 = 2$

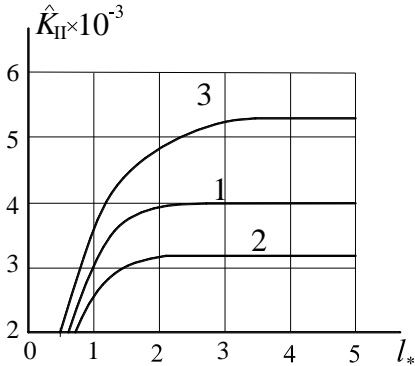
Рис. 2.3. Зависимость \hat{K}_{II} от l_*

На рисунках. 2.4 и 2.5 изображены зависимости K_I , K_{II} от $l_* = H_1 / l$ для случая, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент теплопроводных свойств, а градиенты упругости и теплоемкости непрерывны.



при $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$ 1- $\delta_2/\delta_1 = 1$; 2- $\delta_2/\delta_1 = 0,5$; 3- $\delta_2/\delta_1 = 2$

Рис. 2.4. Зависимость \hat{K}_I от l_*

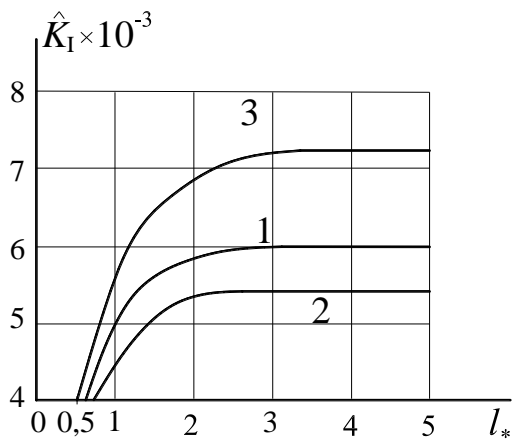


при $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$ 1- $\delta_2/\delta_1 = 1$; 2- $\delta_2/\delta_1 = 0,5$;

3- $\delta_2/\delta_1 = 2$

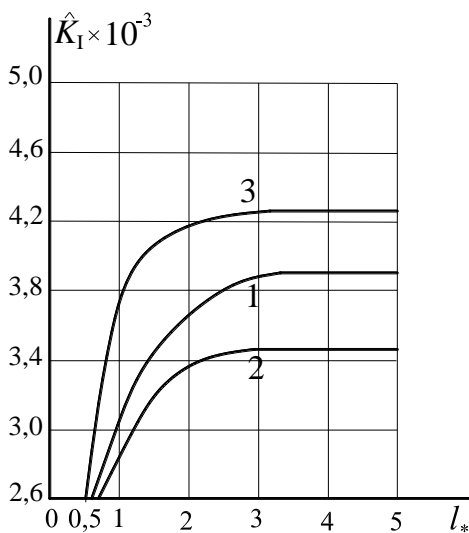
Рис. 2.5. Зависимость \hat{K}_{II} от l_*

На рисунках 2.6 и 2.7 изображены зависимости K_I , K_{II} от $l_* = H_1/l$ для случая, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент теплоемкости, а градиенты упругих и теплопроводных свойств непрерывны.



при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ 1- $\gamma_2/\gamma_1 = 1$; 2- $\gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; 3- $\gamma_2/\gamma_1 = 2$

Рис. 2.6. Зависимость \hat{K}_I от l_*



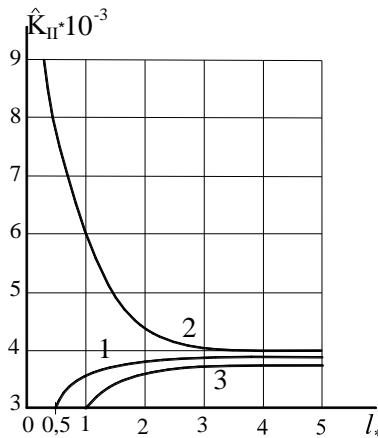
при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ 1- $\gamma_2/\gamma_1 = 1$; 2- $\gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; 3- $\gamma_2/\gamma_1 = 2$

Рис. 2.7. Зависимость \hat{K}_{II} от l_*

Из рисунков 2.2–2.7 следует, что зависимости K_I и K_{II} от отношения толщины верхнего слоя к расстоянию между трещинами качественно выглядят одинаково, однако есть различия. Если жесткость верхнего слоя больше, чем нижнего, то коэффициенты K_I , K_{II} больше по сравнению со средой, в которой градиент упругости непрерывен (рисунки 2.2 и 2.3).

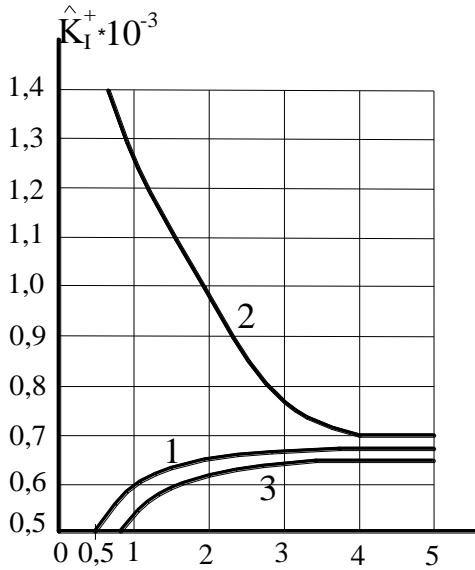
Если теплопроводность верхнего слоя выше теплопроводности нижнего, то это ведет к снижению величин K_I , K_{II} по сравнению с гладким изменением градиента теплопроводности при переходе через границу $y = 0$.

Представляет интерес оценить влияние отношения H_2 / H_1 на зависимость K_I , K_{II} от l_* , т.е. от глубины, на которой происходит расслоение полосы. На рисунках 2.8 и 2.9 изображены зависимости K_I , K_{II} от l_* для случаев $H_1 \geq H_2$. Неоднородность физико-механических параметров гладкая.



при $\gamma_1 / \gamma_2 = \delta_2 / \delta_1 = \beta_2 / \beta_1 = 1$ 1 - $H_2 / H_1 = 1$; 2 - $H_2 / H_1 = 0,5$;
3 - $H_2 / H_1 = 2$

Рис. 2.8. Зависимость \hat{K}_{II} от \hat{l}_*



при $\gamma_1 / \gamma_2 = \delta_2 / \delta_1 = \beta_2 / \beta_1 = 1$ 1- $H_2 / H_1 = 1$; 2- $H_2 / H_1 = 0,5$;
 3- $H_2 / H_1 = 2$

Рис.2.9. Зависимость \hat{K}_I от l_*

Из рисунков 2.8 и 2.9 следует, что если верхний слой толще нижнего, то величина концентрации напряжений возрастает по сравнению с полосой, для которой $H_1 = H_2$.

2.3 Предельное состояние в пластине с разрезами под действием температурного поля

Вычислению коэффициентов интенсивности термических напряжений посвящено достаточно много работ [21–28, 38–45]. Учет анизотропии оказывает существенное влияние на распределение напряжений в пластинах с разрезами. Учет неоднородности на макроуровне обычно проводится на основе моделей кусочно-

однородных пластин и оболочек, а на микроуровне — с помощью функциональных зависимостей физико-механических параметров среды от пространственных координат. В последние годы интерес к неоднородным средам градиентного типа стимулируется проблемами, возникающими в практике использования различных композитных материалов в машинах и технологических процессах, связанных с температурным воздействием на них. Многопараметричность проблемы, обусловленная учетом анизотропии, неоднородности сильно усложняет задачу, но позволяет ставить задачи управления процессами деформирования и разрушения.

Как известно, в общем случае сложного трехмерного напряженно-деформированного состояния твердого тела с трещинами условия предельного равновесия могут быть записаны в виде

$$f(K_1, K_2, K_3) = 0. \quad (2.63)$$

В рассматриваемом случае неоднородной ортотропной полосы воздействие несимметричных тепловых потоков эквивалентно силовым нагрузкам, создающим сложное двумерное состояние, следствием чего является непрямолинейное распространение трещины между разрезами. Из кончиков разрезов трещины будут расти не вдоль оси y (симметричный случай), как это было бы в случае, если бы линия $y = 0$ была линией разрыва материальных коэффициентов. В этом случае разрез является трещиной расслоения.

В случае когда на линии $y = 0$ материальные коэффициенты непрерывны, а их первые производные терпят разрыв (слабый разрыв), направление распространения трещины зависит от градиента неоднородности тепловых потоков.

Условия предельного равновесия записывается в виде [44]

$$K_c = \sqrt{\pi} \left(K_1 - 3K_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{3\varphi}{2}, \quad (2.64)$$

где K_c — постоянная материала, характеризующая сопротивление данного материала разрушению и определяемая экспериментально; φ — угол начального распространения трещины из кончика разреза, вычисляемый по формуле

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{K_1 - \sqrt{K_1^2 + 8K_2^2}}{4K_2}. \quad (2.65)$$

2.4 Термоупругопластическое напряженно-деформированное состояние в двухслойном цилиндре, установившееся после резкого изменения температуры

Рассмотрим длинный цилиндрический стержень, имеющий радиус $R^{(i)}$, модули упругости $\lambda_{ijke}^{(i)}$, коэффициенты теплопроводности $\alpha_{ij}^{(i)}$, рисунок 2.10.

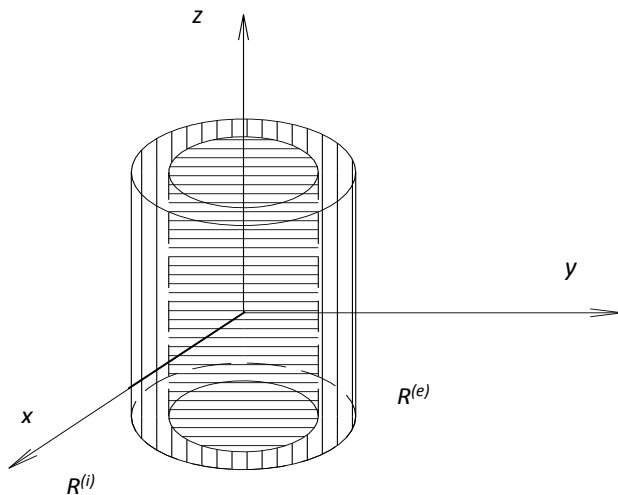


Рис. 2.10. Композитный цилиндр с кусочно-постоянными свойствами

2.4.1 Двумерная постановка задачи термоупругости для двухслойного цилиндрического стержня

Стержень заключен во внешний цилиндр, соосный, жесткоза-креплённый с ним, внешнего радиуса $R^{(e)}$, с модулями упругости $\lambda_{ijke}^{(e)}$, коэффициентами теплопроводности $\alpha_{ij}^{(e)}$. Боковая поверх-ность внешнего стержня свободна от напряжений и находится в осесимметричном температурном поле, неизменном вдоль стержня. Тогда перемещения, деформации, напряжения в произ-вольном сечении композитного стержня зависят только от теку-щего радиуса R .

Перейдем к безразмерным величинам во внутреннем и внешнем цилиндрах:

$$r = \frac{R}{R^{(i)}}, \quad u^{(\alpha)} = \frac{u^{(\alpha)}}{R^{(i)}}, \quad \sigma_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)}}, \quad \alpha = i, e, \quad (2.66)$$

где индекс $\alpha = i$ для внутреннего и $\alpha = e$ для внешнего цилиндра. Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [5, 12–14].

$$\sigma_{rr}^{(\alpha)} = \frac{du^{(\alpha)}}{dr} + \beta^{(\alpha)} \frac{u^{(\alpha)}}{r} - \alpha_r^{(\alpha)} \theta; \quad \sigma_{\phi\phi}^{(\alpha)} = \beta \frac{du^{(\alpha)}}{dr} + \frac{u^{(\alpha)}}{r} - \alpha_\phi^{(\alpha)} \theta, \quad (2.67)$$

где $\alpha_r^{(\alpha)}$, $\alpha_\phi^{(\alpha)}$ — коэффициенты теплопроводности в радиальном и окружном направлениях; θ — скачок температуры.

Уравнение равновесия в цилиндрической системе координат имеет вид [5, 12–14]

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(\alpha)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(\alpha)} - \sigma_{\phi\phi}^{(\alpha)}}{r} = 0, \quad \alpha = i, e. \quad (2.68)$$

Подставляя (2.57) в (2.68), получим уравнения равновесия в перемещениях

$$\frac{d^2 u^{(\alpha)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(\alpha)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(\alpha)} - \frac{\delta_{r\phi}^{(\alpha)}}{r} \theta = 0. \quad (2.69)$$

где θ — скачок температуры.

Решение (2.69) представляется в виде

$$u^{(\alpha)} = c_1^{(\alpha)} r + c_2^{(\alpha)} r^{-1} + \delta_{r\phi}^{(\alpha)} r \theta. \quad (2.70)$$

Произвольные константы $c_1^{(\alpha)}$, $c_2^{(\alpha)}$ определяются из граничных условий, которые запишем в виде:

на боковой поверхности внешнего цилиндра при $r = r^*$

$$\sigma_{rr}^{(e)} = 0, \quad r^* = R^{(e)} / R^{(i)}; \quad (2.71)$$

на границе внешнего и внутреннего цилиндров при $r = 1$

$$u^{(i)} = u^{(e)}, \quad \sigma_{rr}^{(e)} = \gamma \sigma_{rr}^{(i)}, \quad \gamma = \left(\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)} \right) \left(\lambda^{(e)} + 2\mu^{(e)} \right)^{-1}; \quad (2.72)$$

при $r = 0$ перемещение $u^{(i)}$ должно быть конечным, следовательно

$$c_2^{(i)} = 0. \quad (2.73)$$

Подставляя (2.70) в первое условие (2.72), закон Гука (2.67) и затем полученное выражение в (2.71), (2.72), получим три уравнения для нахождения констант $c_1^{(i)}$, $c_1^{(e)}$, $c_2^{(e)}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^{(i)} = c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \delta_{r\phi}^{(ie)}\theta; \\ A_1 c_1^{(e)} + B_1 c_2^{(e)} = D_1; \\ A_2 c_1^{(e)} + B_2 c_2^{(e)} = D_2; \\ A_1 = \beta^{(e)} - \beta^{(i)}, \quad B_1 = 2 + \beta^{(i)} - \beta^{(e)}; \\ A_2 = 1 + \beta^{(e)}, \quad B_2 = r^{-2}(\beta^{(e)} 1); \\ D_1 = \left[\beta^{(e)} \delta_{r\phi}^{(e)} - 2\delta_{r\phi}^{(i)} + \alpha_r^{(i)} - \alpha_r^{(e)} - \delta_{r\phi}^{(ie)}(1 + \beta^{(i)}) \right] \theta; \\ D_2 = \alpha_r^{(e)} - \beta^{(e)} - \delta_{r\phi}^{(e)}. \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Решение системы (2.74) записывается в виде

$$c_1^{(e)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2^{(e)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c_1^{(i)} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta} + \delta_{r\phi}^{(ie)}\theta \quad (2.75)$$

Подставляя (2.75) в (2.70) и затем в (2.67), получим выражения для напряжений в композитном цилиндре, боковая поверхность которого подвергается скачку температуры и свободна от силовых нагрузок.

2.4.2 Уругопластическое установившееся состояние во внешнем цилиндре после резкого изменения температуры

При большой величине скачка температуры (400–500 °С) в среде, в которой находится цилиндр, пластическое состояние может возникнуть, если выполняется условие пластичности

$$\sigma_{rr}^{(e)} - \sigma_{\phi\phi}^{(e)} = 2 \text{sign} \sigma_{rr}^{(e)} Y_0^{(e)}, \quad (2.76)$$

где $\text{sign} \sigma_{rr}^{(e)}$ – функция знака $\sigma_{rr}^{(e)}$; $Y_0^{(e)}$ – предел пластичности материала внешнего цилиндра.

Так как температура внешней среды, в которой находится цилиндр изменяется, то пластическое состояние при выполнении условия (2.76) реализуется на внешней поверхности при $r = r_*$, однако вследствие того, что эта поверхность свободна от силовых нагрузок, должна происходить разгрузка и, таким образом, пластичность будет развиваться на внутренней границе внешнего цилиндра, где концентрация напряжений максимальная. Пластическое состояние в рассматриваемом случае является статически определенным [13, 14, 20, 25, 29, 80], т. е. для его определения достаточно уравнения равновесия (2.68) и условия пластичности (2.76), в котором для определенности положим $\sigma_{rr}^{(e)} < 0$.

Подставляя (2.76) в (2.68), получим

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(e)}}{dr} - \frac{Y_0^{(e)}}{r} = 0. \quad (2.77)$$

Интегрируя (2.77), находим

$$\sigma_{rr}^{(e)} = Y_0^{(e)} \ln r + c^{(e)}. \quad (2.78)$$

Так как в рассматриваемой модели на внешней границе при $r = r_*$ имеем $\sigma_{rr}^{(e)} = 0$, то пластическое состояние реализуется в зоне, прилегающей к внутренней границе $r = 1$, на которой задано давление $\sigma_{rr}^{(i)}(1)$, полученное при решении термоупругой задачи в п. 2.1. Исходя из того, что напряжения $\sigma_{rr}^{(e)}$ в пластической зоне определяются формулой (2.78) с точностью до константы, определим ее из условия

$$\sigma_{rr}^{(e)}(1) = \sigma_{rr}^{(i)}(1) \quad (2.79)$$

Тогда $c^{(e)} = \sigma_{rr}^{(i)}(1)$, а выражения для напряжений в пластической зоне имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(e)} &= 2Y_0^{(e)} \ln r - \sigma_{rr}^{(i)}(1); \\ \sigma_{\phi\phi}^{(e)} &= 2Y_0^{(e)} \ln r - \sigma_{rr}^{(i)}(1) + 2Y_0^{(e)}.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Известно, что перемещения и деформации для статически определимых задач можно найти различными способами, используя предположение о несжимаемости или ассоциированные законы течения [13, 14, 80].

Рассмотрим соотношения Генки

$$\begin{aligned}e_{rr}^{(e)} &= \frac{du^{(e)}}{dr} = -\psi^{(e)}Y_0^{(e)} + K^{(e)}\sigma^{(e)}; \\ e_{\phi\phi}^{(e)} &= \frac{u^{(e)}}{dr} = -\psi^{(e)}Y_0^{(e)} + K^{(e)}\sigma^{(e)}; \\ K^{(e)} &= \frac{1 - 2\nu^{(e)}}{E^{(e)}}, \quad K^{(e)} = K^{(e)}\left(\lambda^{(e)} + 2\mu^{(e)}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (2.81)$$

Здесь функция $\psi^{(e)}(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi^{(e)}}{dr} + \frac{2}{r}\psi^{(e)} + \frac{2K^{(e)}}{r} = 0.\quad (2.82)$$

Интегрируя (2.96), получим

$$\psi^{(e)} = -K^{(e)} + \frac{c_2^{(e)}}{r^2}.\quad (2.83)$$

Константа интегрирования $c_2^{(e)}$ может быть найдена из условий, заданных на границе пластической и упругой зон во внешнем цилиндре, а именно, непрерывности смещений

$$u_{(p)}^{(e)}\left(r_1^{(e)}\right) = u_{(e)}^{(e)}\left(r_1^{(e)}\right), \quad (2.84)$$

где нижний индекс «*p*» означает пластичность, а «*e*» — упругость.

Условием непрерывного перехода пластического состояния в упругое является также [80]

$$\Psi\left(r_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2G^{(e)}}. \quad (2.85)$$

Условия (2.83), (2.84) будут выполнены, если

$$c_2^{(e)} = r_1^{(e)} \left(\frac{1}{2G^{(e)}} + K^{(e)} \right). \quad (2.86)$$

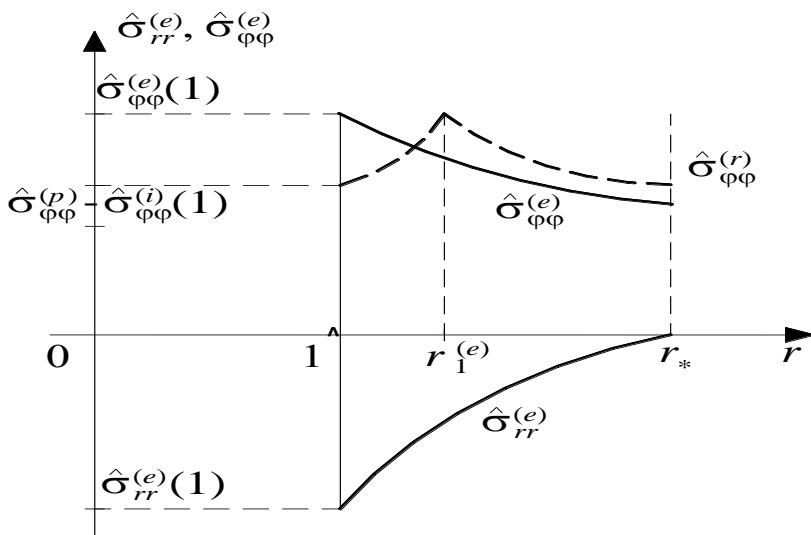


Рис. 2.11. Распределения напряжений $\sigma_{rr}^{(e)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(e)}$ (сплошные кривые) и остаточных напряжений $\sigma_{\phi\phi}^{(r)}$ (пунктирная кривая во внешнем цилиндре)

Во внешнем цилиндре вследствие пластических деформаций после снятия нагрузки возникнут остаточные напряжения, распределение которых описывается формулами, которые представляют собой разность между выражениями (2.67) и (2.69) в зоне $1 < r \leq r_1^{(e)}$, а для $r_1^{(e)} \leq r$ напряжения определяются формулами (2.67). На рисунке 2.11 изображено распределение напряжений $\sigma_{rr}^{(e)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(e)}$ и остаточных напряжений $\sigma_{\phi\phi}^{(r)}$, распределение которых показано пунктиром.

2.4.3 Уругопластическое деформированное состояние в соосных цилиндрических телах

Рассмотрим длинный цилиндр, состоящий из двух жестко скрепленных соосных цилиндров с разными физико-механическими свойствами, так что жесткость и предел пластичности внутреннего цилиндра не превосходят жесткость и предел пластичности внешнего цилиндра. Композитный цилиндр находится в среде, температура которой резко падает так, что в установившемся состоянии выполняется условие пластичности во внутреннем и внешнем цилиндрах:

$$\sigma_{\phi\phi}^{(\alpha)} - \sigma_{rr}^{(\alpha)} = Y_0^{(\alpha)}, \quad \alpha = i, e. \quad (2.87)$$

В пластических зонах внешнего и внутреннего цилиндров, прилегающих к внутренней границе контакта $r = 1$, используется уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(\alpha)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(\alpha)} - \sigma_{\phi\phi}^{(\alpha)}}{r} = 0. \quad (2.88)$$

Интегрируя (2.88), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(\alpha)} &= 2Y_0^{(\alpha)} \ln r + c_1^{(\alpha)}; \\ \sigma_{\phi\phi}^{(\alpha)} &= \sigma_{rr}^{(\alpha)} + 2Y_0.\end{aligned}\quad (2.89)$$

Константы $c_1^{(\alpha)}$, $\alpha = i, e$, могут быть определены из граничных условий. На границе контакта цилиндров при $r=1$ выполняются условия равенства напряжений (2.89) и перемещений:

$$\sigma_{rr}^{(i)} = \gamma \sigma_{rr}^{(e)}, \quad u^{(i)} = u^{(e)}, \quad \gamma \text{ при } r=1. \quad (2.90)$$

Из (2.90) следует

$$c_1^{(i)} = \gamma c_1^{(e)}. \quad (2.91)$$

Для нахождения деформаций в пластических зонах используем соотношения Генки [80], которые имеют вид

$$\begin{aligned}e_{rr}^{(\alpha)} &= \frac{du^{(\alpha)}}{dr} = -\psi^{(\alpha)} Y_0^{(\alpha)} + K^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)}; \\ e_{\phi\phi}^{(\alpha)} &= \frac{u^{(\alpha)}}{r} = -\psi^{(\alpha)} Y_0^{(\alpha)} + K^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)}.\end{aligned}\quad (2.92)$$

Используя условие сплошности [9, 13]

$$\frac{de_{\phi\phi}^{(\alpha)}}{dr} + \frac{e_{\phi\phi}^{(\alpha)} - e_{rr}^{(\alpha)}}{r} = 0, \quad (2.93)$$

подставляя (2.92) в (2.93), получим

$$\frac{d\psi^{(\alpha)}}{dr} + \frac{2}{r}\psi + \frac{2K^{(\alpha)}}{r} = 0. \quad (2.94)$$

Интегрируя (2.94), находим

$$\psi^{(\alpha)} = -K^{(\alpha)} + \frac{c_2^{(\alpha)}}{r^2}, \quad (2.95)$$

где произвольные константы $c_2^{(\alpha)}$ определяются на границах упругих и пластических зон во внешнем $r = r_2^{(e)}$ и внутреннем $r = r_2^{(i)}$ цилиндрах. Так как границы $r_2^{(e)}$ и $r_2^{(i)}$ неизвестны, то необходимо задать условия, которые бы позволили определить также и их.

Перемещения при переходе через $r = r_2^{(i)}$ и $r = r_2^{(e)}$ должны быть непрерывны, что позволяет получить

$$c_2^{(\alpha)} = r_2^{(\alpha)^2} \left(\frac{1}{2G^{(\alpha)}} + K^{(\alpha)} \right). \quad (2.96)$$

Используя (2.96), получим выражения для границ $r_2^{(\alpha)}$ между упругой и пластической зонами во внутреннем и внешнем цилиндрах

$$r_2^{(\alpha)^2} = \frac{2c_2^{(\alpha)}G^{(\alpha)}}{1 + 2K^{(\alpha)}G^{(\alpha)}}. \quad (2.97)$$

2.4.4 Численные примеры решения задач о распределении напряжений в композитных цилиндрах

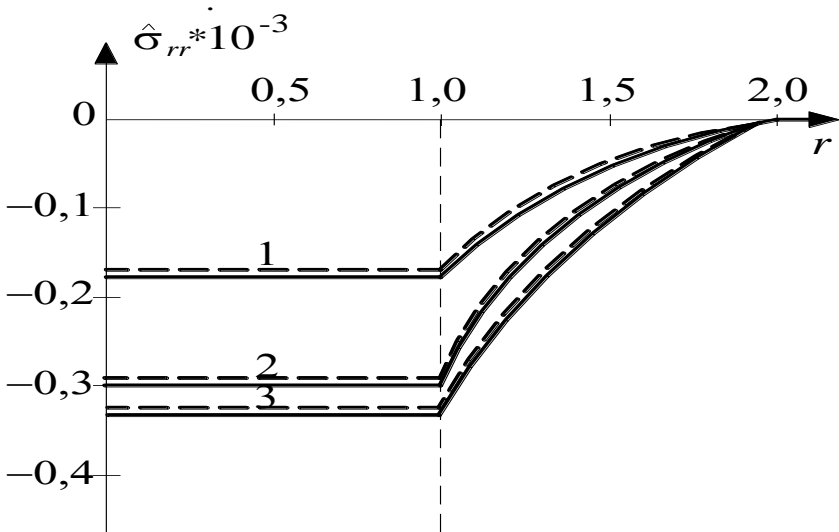
Рассмотрим две модели композитных цилиндров:

1. Модель представляет собой двухслойный цилиндр, у которого внутренний цилиндр имеет сердечник в четыре раза более жесткий, чем внешний, коэффициенты теплопроводности внутреннего цилиндра меньше коэффициентов теплопроводности внешнего в четыре раза, предел пластичности внешнего цилиндра в пять раз меньше предела пластичности внутреннего, скачок температуры

500 °С, радиусы внутреннего и внешнего цилиндров относятся как

1: 2, при различных значениях параметра $\eta = \frac{r_* - r_2^{(e)}}{r_* - 1}$. Эти данные

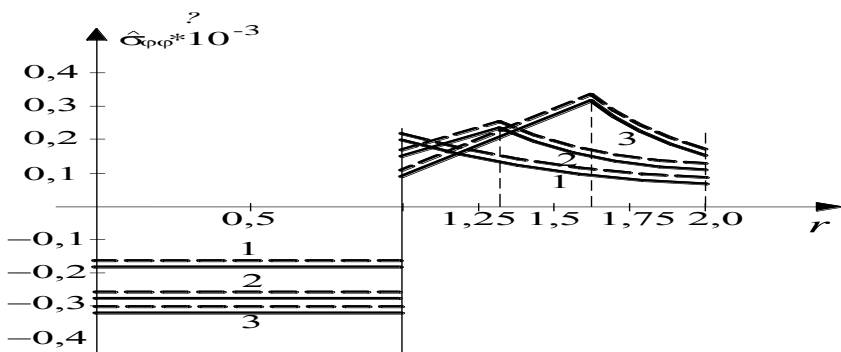
соответствуют внутреннему цилиндру из карбида кремния (SiC), внешнему — из алюминия (Al) [25, 31, 42]. Зависимость радиальных напряжений в зависимости от r показана на рисунке 2.12.



1 – $\eta = 1$; 2 – $\eta = 0,5$; 3 – $\eta = 0,8$, пунктир [25, 31, 42]

Рисунок 2.12. Зависимость радиальных напряжений для первой модели

На рисунке. 2.13 представлена зависимость окружных напряжений $\sigma_{\phi\phi}^{(a)}$ от радиуса r .

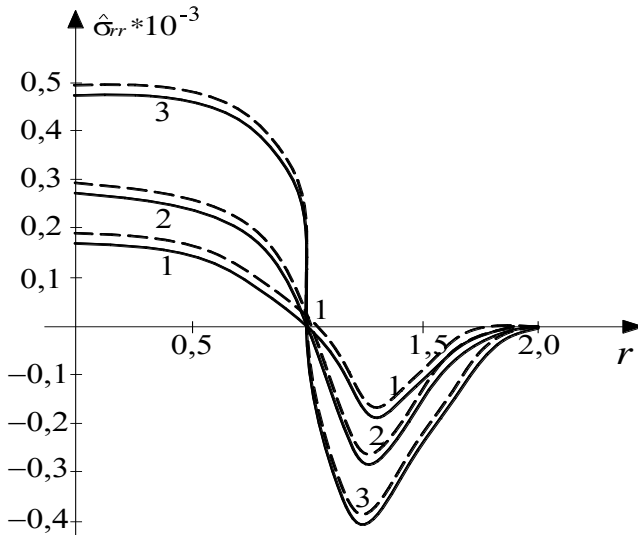


1 – $\eta = 0$; 2 – $\eta = 0,5$; 3 – $\eta = 0,9$, пунктир [25, 31, 42]

Рисунок 2.13. Зависимость окружных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ от радиуса r при значениях параметра η

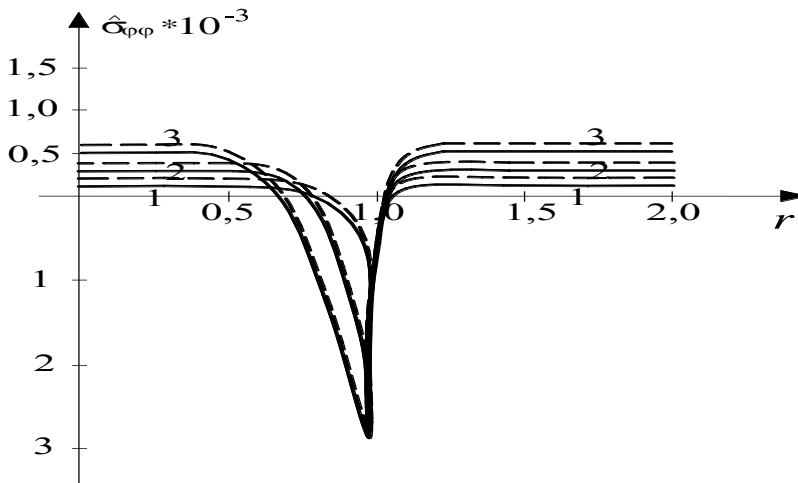
2. Рассмотрим случай, когда внутренний цилиндр имеет коэффициенты жесткости в три раза, предел пластичности в семь раз меньше, чем внешний цилиндр, коэффициенты теплопроводности равны. Этот пример соответствует цилиндру из графита (C) в алюминиевой оболочке (Al) [25, 31, 42]. Скачок температуры $500\text{ }^{\circ}\text{C}$. Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров относятся как $1 : 2$, значения параметра η брались те же, что и в первой модели. На рисунке 2.14 показано распределение радиального напряжения в зависимости от радиуса r при различных значениях параметра η .

На рис. 2.15. изображена зависимость окружных напряжений для второй модели при тех же значениях параметра η , что и для радиальных напряжений.



1 - $\eta = 0$; 2 - $\eta = 0,5$; 3 - $\eta = 0,9$, пунктир [25, 31, 42]

Рисунок 2.14. Зависимость радиальных напряжений σ_{rr} от радиуса r



1 - $\eta = 0$; 2 - $\eta = 0,5$; 3 - $\eta = 0,9$, пунктир [25, 31, 42]

Рисунок 2.15. Зависимость окружных напряжений от радиуса r

Из рассмотренного следует, что для модели двухслойного цилиндра, у которого модули упругости и предел пластичности внутреннего цилиндра больше, чем у внешнего, что соответствует композитам, упрочненным волокнами, упругопластическое состояние при резком изменении температуры наступает только во внешнем цилиндре, причем пластическая зона в случае, когда внешняя граница свободна от силовой нагрузки, примыкает к границе, по которой жестко связаны два цилиндра. В случае, когда модули упругости и предел пластичности внешнего цилиндра не меньше, чем у внутреннего пластическое состояние при резком изменении температуры возникает во внешнем и внутреннем цилиндрах в зонах, примыкающих к внутренней границе, по которой контактируют цилиндры.

2.5 Термопластическое напряженно-деформированное состояние в композитной сфере и распределение остаточных напряжений

Рассмотрим тело, представляющее собой шар, содержащий внутри шар, жестко связанный с ним и имеющий общий центр симметрии (рисунок 2.16).

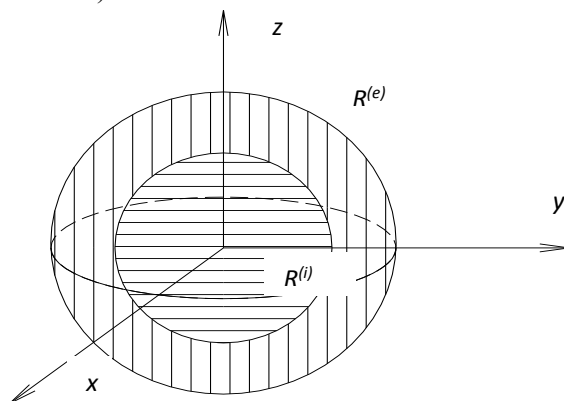


Рис. 2.16. Композитная сфера с кусочно-постоянными свойствами

2.5.1 Термоупругое стационарное состояние в соцентрированных шаровых областях

Материалы шаров, в общем случае, разные. Обозначим $R(\alpha)$ — радиусы шаров, где $\alpha = e$ для внешнего шара, $\alpha = i$ для внутреннего шара. Шаровое тело находится в стационарном температурном поле, которое скачком изменяет своё значение. Считаем, что релаксационные процессы закончились и установившееся состояние не меняется во времени, так что может быть использована математическая модель стационарной термоупругости. Тогда получаемые результаты можно рассматривать как верхние оценки действительного напряжённо-деформированного состояния, установившегося при скачкообразном изменении температуры во внешней среде [13, 14, 25].

В дальнейшем удобно проводить вычисления на основе уравнений, записанных в безразмерном виде в сферической системе координат, при условии центральной симметрии (см. рисунок 2.16).

Обозначим R — текущий радиус, тогда безразмерные величины вводятся следующим образом

$$r = \frac{R}{R^{(i)}}, \quad \tilde{u}^{(\alpha)} = \frac{u^{(\alpha)}}{R^{(i)}}, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)}}, \quad (\alpha = i, e). \quad (2.98)$$

Соотношения Дюамеля–Неймана в рассмотренном случае имеют вид [1, 5, 18–20]

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)} &= \frac{d\tilde{u}^{(\alpha)}}{dr} + 2\tilde{\beta}^{(\alpha)} \frac{\tilde{u}^{(\alpha)}}{r} - \tilde{\alpha}_r^{(\alpha)} \Theta, \quad \tilde{\beta}^{(\alpha)} = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{\lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)}}, \\ \tilde{\gamma}^{(\alpha)} &= \frac{\lambda^{(\alpha)} + \mu^{(\alpha)}}{\lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)}}, \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \tilde{\beta}^{(\alpha)} \frac{d\tilde{u}^{(\alpha)}}{dr} + \tilde{\gamma}^{(\alpha)} \frac{\tilde{u}^{(\alpha)}}{r} - \tilde{\alpha}_r^{(\alpha)} \Theta, \quad (2.99) \\ \tilde{\alpha}_\xi^{(\alpha)} &= \frac{\alpha_\xi^{(\alpha)}}{\lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)}}, \quad \xi = r, \varphi, \end{aligned}$$

где Θ — скачок температуры;

$\alpha_{\xi}^{(\alpha)}$ — коэффициенты теплопроводности шаров (в радиальном $\xi = r$ и окружном направлениях $\xi = \varphi$).

Для несвязанной статической термоупругости в случае центральной симметрии уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)}}{dr} + \frac{2(\tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(\alpha)})}{r} = 0, \quad \alpha = i, e. \quad (2.100)$$

Рассмотрим случай, когда на внешней поверхности наружной сферы не имеется силовой нагрузки:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} = 0 \text{ при } r = r_* = \frac{R^{(e)}}{R^{(i)}}. \quad (2.101)$$

На границе внутреннего и внешнего шаров выполняются условия

$$\tilde{u}^{(i)} = \tilde{u}^{(e)}, \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} = \gamma \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}, \quad \tilde{\gamma} = (\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})(\lambda^{(e)} + 2\mu^{(e)})^{-1}. \quad (2.102)$$

Подставляя соотношения (2.99) в (2.100) получим

$$\frac{d\tilde{u}^{(\alpha)}}{dr^2} + \frac{1 + \tilde{\beta}^{(\alpha)}}{r} \cdot \frac{d\tilde{u}^{(\alpha)}}{dr} - 2 \frac{u^{(\alpha)}}{r^2} - \frac{2}{r} (\tilde{\alpha}_r^{(\alpha)} - \tilde{\alpha}_{\varphi}^{(\alpha)}) \Theta = 0; \quad (2.103)$$

$$\tilde{\delta}_{r\varphi}^{(\alpha)} = \tilde{\alpha}_r^{(\alpha)} - \tilde{\alpha}_{\varphi}^{(\alpha)}.$$

Уравнение (2.103) относится к уравнению типа Эйлера, решение которого для внутренней сферы имеет вид [13, 14]

$$\tilde{u}^{(i)} = c_1^{(i)} r^{\alpha(i)} + c_2^{(i)} r^{\beta(i)} + \delta_{r\varphi}^{(i)} r \Theta, \quad (2.104)$$

и соответственно для внешней сферы имеем

$$\tilde{u}^{(e)} = c_1^{(i)} r^{\alpha(\beta)} + c_2^{(i)} r^{\beta(e)} + \delta_{r\varphi}^{(e)} r \Theta, \quad (2.105)$$

Решение (2.104) при $r = 0$ должно быть конечным, поэтому полагаем $c_2^{(i)} = 0$, т.к. $\tilde{\beta}^{(e)}$ является отрицательным корнем характеристического уравнения

$$\beta^2 + \beta^{(\alpha)}\beta + \beta^{(\alpha)} - \gamma^{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = i, e. \quad (2.106)$$

Для определения произвольных констант $c_1^{(i)}, c_1^{(e)}, c_2^{(e)}$ из условий (2.102), (2.116) получим систему алгебраических уравнений относительно

$$c_{(i)}^{(i)} = c_1^{(e)} + c_2^{(e)} - \delta_{(r\varphi)}^{(ie)} \Theta; \\ A_1 C_1^{(e)} + B_1 C_2^{(e)} = D_1; \quad A_2 C_1^{(e)} + B_2 C_2^{(e)} = D_2; \quad (2.107)$$

$$A_1 = \gamma(\alpha_2 + 2\beta^{(i)}) - (\alpha_1 + 2\beta^{(e)}); \quad B_1 = \gamma(\alpha_2 + 2\beta^{(i)}) - (\beta_1 + 2\beta).$$

Решение системы имеет вид

$$c_1^{(e)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2^{(e)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c_1^{(i)} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta} + \delta_{r\varphi}^{(ie)} \Theta, \quad (2.108) \\ \Delta = A_1 B_2 - A_2 B_1, \quad \Delta_1 = D_1 B_2 - D_2 B_1, \quad \Delta_2 = A_1 D_2 - A_2 D_1.$$

2.5.2 Термоупругопластическое состояние в соцентрированных шаровых областях

Области шаров, в которых выполняются условия

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)} = \delta \tilde{Y}^{(\alpha)}, \quad \alpha = i, e, \quad (2.109)$$

находятся в пластическом состоянии.

В (2.109) δ – функция знака $\tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)}$, $\delta = \text{sgn } \tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)}$,

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{если } \tilde{\delta}_{rr}(\alpha) < 0, \text{ сжатие} \\ -1 & \text{если } \tilde{\delta}_{rr}(\alpha) > 0, \text{ растяжение} \end{cases} \quad (2.110)$$

Предел пластичности $\tilde{Y}^{(\alpha)}$ в общем случае представляется в виде

$$\tilde{Y}^{(\alpha)} = \tilde{Y}_0^{(\alpha)} (1 - \tau^{(\alpha)} \Theta^{(\alpha)}) = \tilde{Y}_\varphi^{(\alpha)} \quad (2.111)$$

для областей, в которых имеет место температурное разупрочнение (размягчение) материала.

В формуле (2.111)

$$\tilde{Y}^{(\alpha)} = \tilde{Y}_0^{(\alpha)} (1 - \mu^{(\alpha)}) = \tilde{Y}_\varphi^{(\alpha)}; \quad (2.112)$$

$$\tau = \frac{\tilde{Y}_\varphi^{(\alpha)} - \tilde{Y}_0^{(\alpha)}}{\tilde{Y}_0^{(\alpha)} \Theta^{(\alpha)}}.$$

Здесь $\tilde{Y}_\varphi^{(\alpha)}$, $\tilde{Y}_0^{(\alpha)}$ конечное и начальное значения предела пластичности в процессе термического размягчения.

Для областей, в которых имеет место деформационное упрочнение условие пластичности можно записать в виде

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)} = \delta \tilde{Y}^{(\alpha)} (1 + h^{(\alpha)} \tilde{e}^p), \quad (2.113)$$

где $h^{(\alpha)}$ — безразмерный параметр упрочнения;

\tilde{e}^p — эквивалентная пластическая деформация, которая представляется в виде

$$\tilde{e}^p = -\delta e_{rr}^{(p)} = -\delta \left(\frac{du}{dx} - e_{rr}^{(e)} - \bar{\alpha}^{(\alpha)} \bar{\Theta}^{(\alpha)} \right), \quad (2.114)$$

где $e_{rr}^{(e)}$ — упругая часть полной деформации.

Выбор знака δ зависит от истории нагружения в упругой области.

Рассмотрим в первом примере состояние пластичности только во внешнем шаре, положив, что выполняется условие

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(\alpha)} = \tilde{Y}_0^{(\alpha)}. \quad (2.115)$$

Подставляя (2.115) в (2.100), получим

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}}{dr} - 2\frac{\tilde{Y}_0^{(e)}}{r} = 0. \quad (2.116)$$

Интегрируя (2.116), находим

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} = 2Y_0^{(e)} \ln r + c^{(e)}. \quad (2.117)$$

Приравнявая $\tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}$ из (2.108) и $\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}$ из (2.118), определим $c^{(e)}$ в виде

$$c^{(e)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(1). \quad (2.118)$$

Таким образом, в зоне пластичности внешнего шара напряжения вычисляются только на основе уравнения равновесия и условия пластичности без привлечения определяющих соотношений, т. е. задача является статически определимой, а напряжения записываются в виде [13, 14, 80]

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} = 2\tilde{Y}_0^{(e)} \ln r - \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}; \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(e)} = 2\tilde{Y}_0^{(e)} \ln r - \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} + \tilde{Y}_0^{(e)}. \quad (2.119)$$

Деформации и смещения в зоне текучести находятся в первом приближении на основе соотношений Генки [45, 61]

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} = \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dr} = \tilde{\psi}^{(e)} (\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} - \tilde{\sigma}^{(e)}) + \tilde{K}^{(e)} \tilde{\sigma}^{(e)}; \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(e)} = \frac{\tilde{u}^{(e)}}{r} = \tilde{\psi}^{(e)} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(e)} - \tilde{\sigma}^{(e)}) + \tilde{K}^{(e)} \tilde{\sigma}^{(e)}; \\ \tilde{K}^{(e)} = \frac{1 - 2\nu^{(e)}}{E^{(e)}}, \quad K^{(e)} = K^{(e)} (\lambda^{(e)} + 2\mu e)^{-1}. \end{array} \right. \quad (2.120)$$

Функция $\tilde{\psi}^{(e)}$ в (2.134) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{\psi}^{(e)}}{dr} + \frac{3}{r}\tilde{\psi}^{(e)} + \frac{6\tilde{K}^{(e)}}{r} = 0, \quad (2.121)$$

которое следует из условия сплошности среды [45,61]. Решение (2.121) имеет вид

$$\tilde{\psi}^{(e)} = -2\tilde{K}^{(e)} + \frac{c_2^{(e)}}{r^3}. \quad (2.122)$$

Установившееся (статическое) упруго-пластическое состояние во внешнем шаре найдём, считая, что оно реализуется по следующей схеме. Вторичная пластическая зона после разгрузки со сменой знака и с учётом закона Баушингера распространяется от внутренней границы $r = 1$ так, что в зоне $1 < r < c^{(e)}$ имеет место пластичность, а в зоне $c^{(e)} \leq r \leq r_*$ – упругость. Граница между упругой и пластической зонами, напряжение $\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(c^{(e)})$, константа $c_2^{(e)}$ должны быть определены из условия непрерывности состояния [13, 14, 80, 5–А], тогда

$$\tilde{\psi}^{(e)} = \frac{1}{2\sigma} \text{ при } r = r^*; \quad (2.123)$$

условия непрерывности радиального напряжения

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} \Big|_{r=c-0} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)} \Big|_{r=c+0}; \quad (2.124)$$

условия непрерывности перемещения

$$\tilde{u}_{rr}^{(e)} \Big|_{r=c-0} = \tilde{u}_{rr}^{(e)} \Big|_{r=c+0}. \quad (2.125)$$

Определив $c_2^{(e)}$ из (2.124) и подставив в (2.123), получим

$$\tilde{\psi}^{(e)} = -2\tilde{K}^{(e)} + \left(\frac{1}{2\sigma} + 2\tilde{K}^{(e)} \right) \left(\frac{c^{(e)}}{r} \right). \quad (2.126)$$

Выражение для $\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(c^{(e)})$ имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(c^{(e)}) = 2\tilde{Y}_0 \ln c^{(e)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(1). \quad (2.127)$$

Упругопластическая граница $c^{(e)}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{c^{(e)}}{r_*} \right) - 3 \ln c^{(e)} + 1 - \frac{3\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(1)}{2\tilde{Y}_0^{(e)}} = 0. \quad (2.128)$$

Остаточные напряжения во внешнем шаре вычисляются при условии, что внутренняя сфера не перешла в пластическое состояние. Тогда распределение напряжений определяется разностью между выражениями (2.119) и (2.120) при $1 < r < c^{(e)}$, а для $c^{(e)} \leq r$ напряжения определяются формулами (2.120).

На рисунке 2.17 изображено распределение напряжений по сечению внешнего шара: в области $1 < r < c^{(e)}$ — пунктир; сплошная линия — распределение напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(e)}$ в упругопластическом состоянии; распределение остаточных напряжений $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(r)}$ — в области $1 \leq r \leq r_*$ сплошная линия и вертикальная штриховка

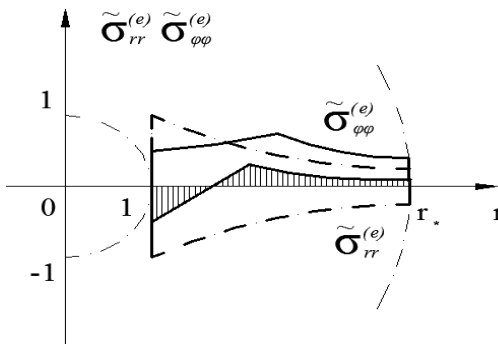


Рис. 2.17. Распределение упругих напряжений

2.5.3 Упругопластическое напряженное состояние в композитной сфере

Пусть в пластической области внутренней сферы выполняется условие пластичности

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(i)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} = \tilde{Y}_0^{(i)} \quad (2.129)$$

и уравнение равновесия

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}}{dr} + 2\frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(i)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}}{r} = 0. \quad (2.130)$$

Аналогично тому, как это было рассмотрено для внешнего шара получим формулы для напряжений в пластической области внутреннего шара

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} = 2\tilde{Y}^{(i)} \ln r - \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(1), \quad c^{(i)} < r \leq 1; \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(i)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} + \tilde{Y}_0^{(i)} \quad (2.131)$$

На границе между внутренним и внешним шарами при $r = 1$ должны выполняться условия непрерывности радиальных напряжений $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(i)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(1)$ и перемещений $\tilde{u}^{(i)}(1) = \tilde{u}^{(e)}(1)$ в случае, когда в пластическом состоянии находятся области во внутреннем и внешнем шарах в окрестности $r = 1$.

Для определения деформаций и смещений в зоне текучести внутреннего шара воспользуемся соотношениями Генки [13, 14, 25]

$$\tilde{\epsilon}_{rr}^{(i)} = \frac{d\tilde{u}^{(i)}}{dr} = \tilde{\Psi}^{(i)} \left(\tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} - \tilde{\sigma}^{(i)} \right) + \tilde{K}^{(i)} \tilde{\sigma}^{(i)}; \quad (2.132)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\tilde{u}^{(i)}}{r} = \tilde{\Psi}^{(i)} \left(\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(i)} - \tilde{\sigma}^{(i)} \right) + \tilde{K}^{(i)} \tilde{\sigma}^{(i)}$$

Из условия сплошности получается уравнение для $\tilde{\Psi}^{(i)}$:

$$\frac{d\tilde{\psi}^{(i)}}{dr} + \frac{3}{r}\tilde{\psi}^{(i)} + \frac{6\tilde{K}^{(i)}}{r} = 0. \quad (2.133)$$

Решение уравнения (2.133) имеет вид

$$\tilde{\psi}^{(i)} = -2\tilde{K}^{(i)} + \frac{c_2^{(i)}}{r^3}. \quad (2.134)$$

Константа $c_2^{(i)}$ определяется из условия конечности $\tilde{\psi}^{(i)}$ при $r = 0$, если внутренний шар полностью находится в пластическом состоянии. В случае, если пластическая зона заполняет область $c_2^{(i)} \leq r \leq c^{(e)}$, на границе $c^{(i)}$ упругой и пластической областей радиальные напряжения и перемещения непрерывны. Тогда для нахождения неизвестных $c_2^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(c^{(e)})$ имеем уравнение непрерывности состояния

$$\tilde{\psi}^{(i)} = \frac{1}{2\tilde{\sigma}^{(i)}} \text{ при } r = c^{(i)}, \quad (2.135)$$

а также уравнения непрерывности

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} \Big|_{r=c^{(i)}-0} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)} \Big|_{r=c^{(i)}+0}; \quad (2.136)$$

$$\tilde{u}_{rr}^{(i)} \Big|_{r=c^{(i)}-0} = \tilde{u}_{rr}^{(i)} \Big|_{r=c^{(i)}+0}. \quad (2.137)$$

Из (2.134), (2.135) получаем

$$\tilde{\psi}^{(i)} = -2\tilde{K}^{(i)} + \left(\frac{1}{2\tilde{\sigma}^{(i)}} + 2\tilde{K}^{(i)} \right) \left(\frac{c^{(i)}}{r} \right). \quad (2.138)$$

С учётом (2.136), (2.137) находим

$$\tilde{\sigma}_{rr} \left(c^{(i)} \right) = 2\tilde{Y}_0^{(e)} \ln c^{(i)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}(1). \quad (2.139)$$

$$\left(\frac{c^{(i)}}{r_*} \right) - 3 \ln c^{(i)} + \frac{3\tilde{\sigma}_{rr}^{(i)}(1)}{2\tilde{Y}_0^{(e)}} - 1 = 0. \quad (2.140)$$

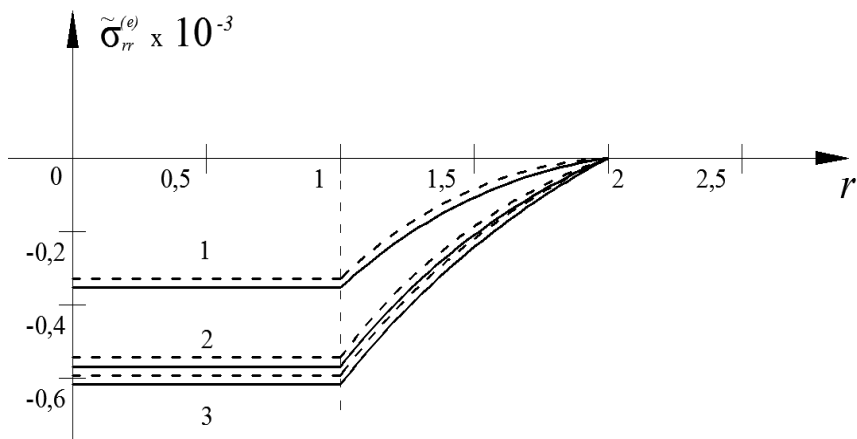
Уравнения (2.129)–(2.140) образуют замкнутую систему трёх алгебраических уравнений относительно трёх неизвестных $c_2^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\tilde{\sigma}_{rr}^{(e)}(c^{(e)})$, подставляя которые в (2.131), (2.132) находим распределение напряжений и деформаций в пластической области. Численные решения, соответствующие наименьшему действительному положительному $c^{(i)}$, позволят рассчитать зависимость напряжений для упругопластического состояния конкретных композитов типа шар в шаре, подвергнутых резкому охлаждению.

2.5.4. Численные результаты вычисления распределения напряжений в композитной сфере

2.5.4.1 Модель с упрочняющим наполнителем

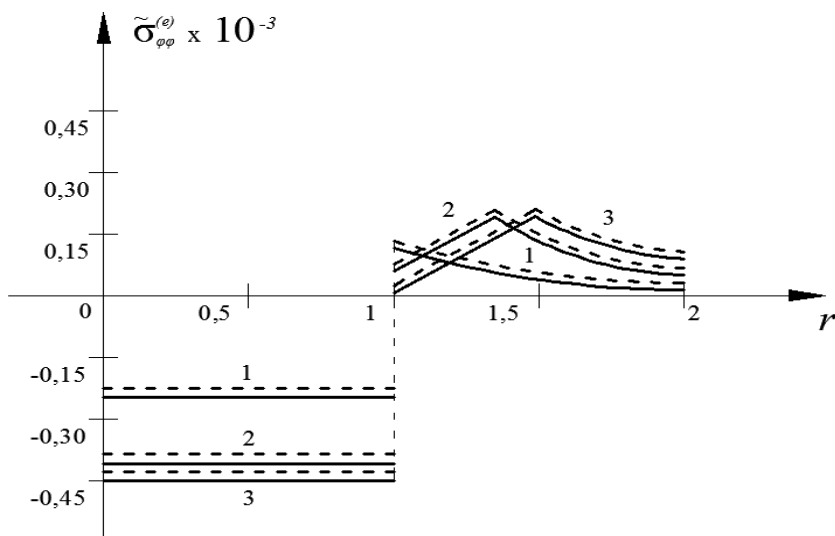
Пусть упругие модули внутренней сферы превышают модули внешней в четыре раза, коэффициенты теплопроводности внешнего шара в четыре раза меньше коэффициентов теплопроводности внутреннего, предел пластичности внешнего шара в пять раз меньше упруго-пластичности внешнего. Расчёты проводились для скачка температуры 500 °С, относительные радиусы внутренней и внешней сфер брались в отношении 1: 2, при различных значениях параметра $\eta = \frac{r - c^{(i)}}{r_* - 1}$. Это соответствует сфере из карбида кремния в алюминиевой сфере.

На рисунке 2.18. показано распределение радиальных напряжений в зависимости от радиуса r .



1 — $\eta = 0$; 2 — $\eta = 0.6$; 3 — $\eta = 0.8$, пунктир [25, 31, 42]

Рис. 2.18. Зависимость радиальных напряжений $\bar{\sigma}_{rr}$ от радиуса r



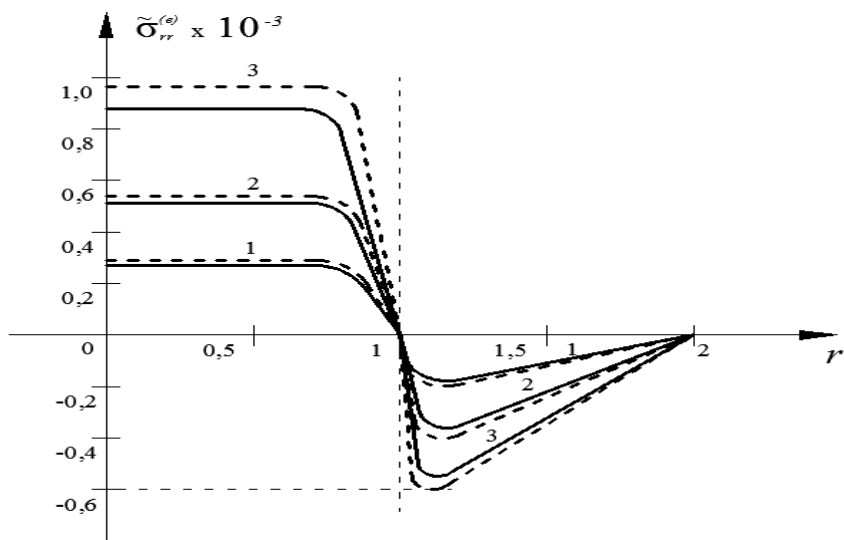
1 — $\eta = 0$; 2 — $\eta = 0.6$; 3 — $\eta = 0.8$, пунктир [25, 31, 42]

Рис. 2.19. Зависимость окружных напряжений $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ от радиуса r

2.5.4.2 Модель с менее жёстким сердечником, чем матрица

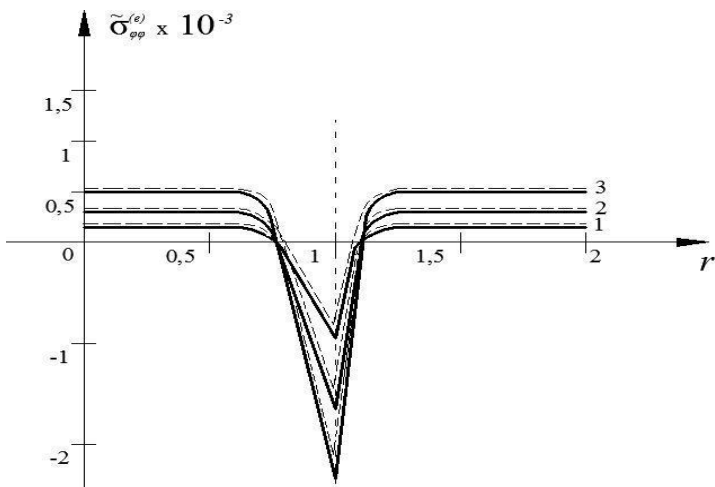
Упругие модули внутренней сферы приблизительно в три раза меньше чем внешней, коэффициенты теплопроводности примерно равны, предел пластичности внутренней сферы приблизительно в 8 раз меньше, чем внешней. Скачок температуры 500 °С. Относительные радиусы внутренней и внешней сфер относятся как 1: 2, значения параметра η брались те же, что и в первой модели. На рисунке 2.20 показано распределение радиальных напряжений в зависимости от радиуса r .

На рисунке 2.21 показано распределение окружных напряжений для второй модели при тех же значениях параметра η , что и для радиальных напряжений.



1 — $\eta = 0$; 2 — $\eta = 0,6$; 3 — $\eta = 0,8$, пунктир [25, 31, 42]

Рис. 2.20. Зависимость радиальных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$ от радиуса r



1 — $\eta = 0$; 2 — $\eta = 0.6$; 3 — $\eta = 0.8$, пунктир [25, 31, 42]

Рис. 2.21. Зависимость окружных напряжений $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ от радиуса r при: 1.

Рассмотренные в п. 2.4 и 2.5 модели близки по своим свойствам к композитам типа рассмотренных в [25, 31, 42].

2.6 Некоторые замечания и обсуждение результатов

1. Коэффициенты концентрации напряжений в микрослоистой ортотропной полосе с параллельными разрезами зависят от физико-механических параметров среды, геометрии трещин, гладкости материальных коэффициентов, глубины.

2. Предельное состояние и направление распространения трещин зависят от соотношения между градиентами неоднородности полос и близости расстояния трещин от свободной границы, расстояния между ними.

3. Для слоистой неоднородности и ортотропной анизотропии пластин установлен класс функций материальных коэффициентов экспоненциального типа, что позволило свести дифференциальные

уравнения в частных производных с переменными коэффициентами к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами и таким образом использовать методы интегральных преобразований, функций комплексной переменной и интегралов Коши для вычисления коэффициентов концентрации напряжений в окрестности трещин.

4. Пластическое предельное состояние, возникающее на внешней границе после резкого изменения температуры, в установившемся состоянии реализуется вблизи внутренней границы сопряжения цилиндров и сфер.

5. Для случая цилиндров и сфер более жесткого включения (карбид кремния в алюминии) внутренняя граница определяет скачок окружных напряжений и смену характера зависимости радиальных напряжений, а в случае более мягкого сердечника (графит в алюминии) пластическое состояние реализуется во внутреннем цилиндре (сфере) так, что окружные напряжения почти постоянны и резко меняют знак на границе сопряжения, а радиальные напряжения меняют знак на границе сопряжения и обращаются в ноль на внешней границе.

ГЛАВА 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ СВОЙСТВ МИКРОКОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ ПЕРКОЛЯЦИИ

В общем случае неоднородной анизотропной термоупругости наиболее надёжным методом аналитического решения задач является метод осреднения, обоснованию корректности и погрешности которого посвящена обширная литература по математике, механике, физике [2–4, 33, 34, 81, 82].

Согласно методу решение граничной задачи для неоднородной среды разбивается на два этапа. На первом этапе осуществляется переход от неоднородного континуума к квазиконтинууму, для чего используются различные варианты метода осреднения, с помощью которых вычисляются материальные термоупругие операторы эффективной (эквивалентной) среды (квазиконтинуума) и определяющие соотношения, которые в общем случае имеют вид интегральных операторов, описывающих нелокальные модели квазиконтинуума (среды с пространственной дисперсией). В пренебрежении эффектами нелокальности эффективные операторы заменяются их локальными составляющими — эффективными коэффициентами, зависящими от локальных значений компонент и их дисперсий. На втором этапе решается граничная задача для эквивалентной среды с вычисленными на первом этапе термоупругими эффективными коэффициентами.

Погрешность приближения исходной неоднородной среды (континуума) к однородной эффективной среде (квазиконтинуумом) зависит от соотношения между масштабом неоднородности, под которым для поликристаллической среды обычно понимается средний диаметр кристаллита, для аморфных сред — средний размер зерна к масштабу конструктивного элемента, для которого решается граничная задача. В этом случае погрешность приближения имеет порядок отношения масштабов микронеоднородности к характерному мас-

штабу тела, причем граничными эффектами, обусловленными микронеоднородностью среды, в этом случае также пренебрегаем малым по сравнению с эффектами, обусловленными макроскопическими граничными условиями для средних полей напряжений и перемещений.

Рассмотрим первый этап решения термоупругой задачи – вычисление эффективных параметров эквивалентной среды.

3.1 Расчет эффективных коэффициентов теплопроводности поликристаллических и аморфных материалов методом замены полевых величин

Процессы распространения тепла в неоднородной анизотропной среде описываются уравнением теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla_j \left(\lambda_{ij}(T, \bar{r}, t) \nabla_i T \right), \quad (3.1)$$

где $T = T(\bar{r}, t)$ — температура,

$\lambda_{ij}(T, \bar{r}, t)$ — коэффициенты температуропроводности, в общем случае зависящие от пространственных координат, времени, температуры, анизотропии [12–16].

Представим $T = T(r, t)$ в виде суммы стационарного распределения температуры T_s и нестационарного T_{ns} :

$$T(\bar{r}, t) = T_s(\bar{r}) + T_{ns}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Положим, что температура на интервале времени $0 \leq t \leq t_\lambda \in T_\lambda$ подчиняется стационарному распределению и удовлетворяет уравнению

$$\nabla_j \left(\lambda_{ij}(\bar{r}) \nabla_i T_s \right) = 0, \quad (3.2)$$

компоненты λ_{ij} зависят только от пространственных координат.

Для статистически изотропного однородного поля $\lambda_{ij}(\bar{r})$ имеют место соотношения

$$\langle \lambda_{ij}(\bar{r}) \rangle = \text{const}, \quad \langle \lambda'_{ij}(\bar{r}) \lambda'_{kl}(\bar{r} + \bar{\rho}) \rangle = R_{ijkl}(|\bar{\rho}|), \quad \lambda'_{ij} = \lambda_{ij} - \langle \lambda_{ij} \rangle,$$

где $R_{ijkl}(|\bar{\rho}|)$ — корреляционный тензор, угловые скобки, как всегда, означают осреднение по вероятности.

Рассмотрим однородный изотропный вспомогательный объем, для которого $\lambda_{ij}^0 = \lambda^0 \delta_{ij}$ с той же геометрией и при тех же граничных условиях, что и данный неоднородный объем.

Записывая для вспомогательной среды, описываемой $\lambda_0 \delta_{ij}$, уравнение вида (3.2) и используя функцию Грина уравнения теплопроводности однородной изотропной среды $G_{ik}(\bar{r} - \bar{r}_1)$ [1–3], перейдем от уравнения (3.2) к эквивалентному интегральному уравнению

$$T_{,k} = T_{,k}^0 + \int G_{,ik}(\bar{r} - \bar{r}_0) \lambda'_{ij} T_{,j}(r_1) dr_1, \quad \lambda'_{ij} = \lambda_{ij} - \lambda_0 \delta_{ij} \quad (3.3)$$

Рассмотрим метод [2], основанный на замене полевых величин и представлении тензора вторых производных от тензора Грина в виде суммы сингулярной

$$G_{,ik}^{(S)}(\bar{r} - \bar{r}_1) = -\frac{1}{3\lambda_0} \delta_{ik} \delta(\bar{r} - \bar{r}_1) \quad (3.4)$$

и регулярной частей

$$G_{,ik}^{(R)}(\bar{r} - \bar{r}_1) = G_{,ik} - G_{,ik}^{(S)}(\bar{r} - \bar{r}_1), \quad (3.5)$$

где $\delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|)$ — функция Дирака.

Подставляя (3.5) в (3.3) и обозначая

$$\Theta_k = B_{kl}T, l, \quad B_{kl} = \delta_{kl} + \frac{1}{3\lambda_0} \lambda'_{kl}, \quad \gamma_{ij} = \lambda'_{im} B_{mj}^{-1}, \quad (3.6)$$

вместо уравнения (3.3) получим интегральное уравнение для Θ

$$\Theta_k = T_{,k}^0 + \int G_{,ik}^{(R)}(\bar{r} - \bar{r}_1) \gamma_{ij}(\bar{r}_1) \Theta_j(\bar{r}_1) d\bar{r}_1 \quad (3.7)$$

Итерационный алгоритм решения уравнения (3.7) представим в виде

$$\Theta_k = (\delta_{kl} + A_{kl}) \Theta_l^0, \quad (3.8)$$

где A_{kl} находится как решение интегрального уравнения методом итераций

$$A_{kl} = \int f_{,km}^{(R)}(\bar{r}_1) [\gamma_{mp}(\bar{r} + \bar{r}_1) A_{pl}(\bar{r} + \bar{r}_1) + \gamma_{ml}(\bar{r} + \bar{r}_1)] d\bar{r}_1. \quad (3.9)$$

Ряд по степеням γ_{ij} , получаемый на основе уравнений (3.8), (3.9) имеет наилучшую сходимость при условии центрированности случайного поля $\gamma_{ij}(\bar{r})$

$$\langle \gamma_{ij}(\bar{r}) \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Здесь условие (3.10) совместно с условиями (3.6) дают уравнение для нахождения коэффициента температуропроводности вспомогательной среды λ_0 через одноточечные моменты поля $\lambda_{ij}(\bar{r})$.

Рассмотрим вопрос об определении эффективного коэффициента температуропроводности λ_* , предполагая, что поле $\lambda_{ij}(\bar{r})$ является статистически однородным изотропным и таким, что

$$\langle \lambda_{ij}(\bar{r}) T_{,j}(\bar{r}) \rangle = \lambda_* \langle T_{,j}(\bar{r}) \rangle = \lambda_* \langle T(\bar{r}) \rangle_{,j}, \quad (3.11)$$

где λ_* представляет собой в общем случае интегральный оператор.

Из (3.8), (3.6) следует

$$T_{,m} = B_{mk}^{-1} (\delta_{kl} + A_{kl}) T_{,l}^0. \quad (3.12)$$

Умножая (3.6) на γ_{jk} и применяя операцию осреднения с учетом (3.10), получим

$$\langle \gamma_{jk} \Theta_k \rangle = \langle D_{jl} \rangle T_{,l}^0, \quad (3.13)$$

где оператор D_{jl} находится по методу итераций как решение интегрального уравнения:

$$D_{jl}(\bar{r}) = \gamma_{jk}(\bar{r}) \int G_{,km}^{(R)}(\bar{r}_1) [D_{ml}(\bar{r} + \bar{r}_1) + \gamma_{m\ell} l(\bar{r} + \bar{r}_1)] d\bar{r}_1. \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что $D_{jl}(\bar{r})$ представляется в виде ряда по степеням $\gamma_{ij}(\mathbf{r})$. Эффективная среда представляет собой квазиконтинуум с пространственной дисперсией. Рассмотрим приближение, не учитывающее нелокальность модели, полагая, что среда является статистически сильно изотропной и зависимостью Γ_{ijkl} от единичного вектора \bar{n} можно пренебречь. В результате находим, что

$$\langle A_{jk} \rangle = 0, \quad \langle \hat{A}_{jk} \rangle = 0. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в соотношение

$$\langle D_{jk} \rangle = (\lambda_* - \lambda_0) \left(\delta_{jk} + \langle A_{jk} \rangle - \frac{1}{3\lambda_0} \langle D_{jk} \rangle \right), \quad (3.16)$$

получаемое на основе уравнений (3.9)–(3.14), найдем, что в случае сильной изотропии вспомогательная и эффективная среды идентичны, т. е.

$$\lambda_* = \lambda_0, \langle T_{,j}^* \rangle = T_{,j}^0 \quad (3.17)$$

В случае, если среда не является сильно изотропной, то уравнение (3.16) позволяет построить итерационный алгоритм вычисления оператора λ_* из уравнения

$$\lambda_* = \lambda_0 + \langle D_{jk} \rangle (\delta_{jk} + \langle A_{jk} \rangle - \langle D_{jk} \rangle (3\lambda_0)^{-1}). \quad (3.18)$$

Отметим, что условие самосогласованного поля [4] приводит к уравнению

$$\langle B_{jk}^{-1} \rangle = \delta_{jk} \quad (3.19)$$

Сравнение расчетов λ_* из условий (3.10), (3.19) показывает, что они эквивалентны.

3.2 Перколяция в поликристаллических материалах

Рассмотрим поликристалл кубической симметрии. В общем случае коэффициенты теплопроводности для разных граней кристаллита различные и равны μ_1, μ_2, μ_3 . Случайный характер распределения температуропроводности в поликристалле обусловлен разориентацией кристаллографических осей кристаллитов.

Представим в общем случае тензор температуропроводности λ_{jk} в виде [2–4]

$$\lambda_{jk} = C_{j\alpha} C_{k\beta} \mu_{\alpha\beta}, \quad (3.20)$$

где $C_{j\alpha}$ — матрица направляющих косинусов кристаллографических осей, меняющаяся от кристаллита к кристаллиту случайным образом;

$\mu_{\alpha\beta}$ — тензор коэффициентов температуропроводности в кристаллографических осях

В случае если углы кристаллографических осей имеют равномерное распределение в интервале $[0, 2\pi]$, т. е. все кристаллографические направления статистически равновероятны и все кристаллиты имеют одинаковый химический состав, то получим

$$B_{jk} = \frac{1}{3\lambda_*} (2\lambda_* \delta_{jk} + C_{j\alpha} C_{k\beta} \mu_{\alpha\beta}). \quad (3.21)$$

Находя B_{jk}^{-1} и осредняя полученное выражение с учетом сделанных выше предположений, получим

$$4\lambda_*^3 - \lambda_* (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3) - \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0. \quad (3.22)$$

где μ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — главные значения тензора $\mu_{\alpha\beta}$, характеризующие коэффициенты температуропроводности кристаллита в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Для кристаллов с нормальной температуропроводностью кристаллитов- μ_1, μ_2, μ_3 неотрицательны.

Положим $\mu_1 = \mu_2$ и преобразуем (3.2) безразмерному виду

$$4\alpha^3 - \alpha(1 + 2\nu) - \nu = 0, \alpha = \lambda_*/\mu_1, \nu = \mu_3/\mu_1. \quad (3.23)$$

При $\nu = 0$ две грани кристаллита теплоизолированы, тогда из (3.23) получим

$$\alpha_1 = 0, \alpha_{2,3} = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.24)$$

Это означает, что в поликристалле возможны две ситуации:

1) теплоизолированные грани распределились так, что весь поликристалл является теплоизолятором;

2) случаю $\alpha_2 = 1/2$ соответствует такое распределение теплопроводящих и теплоизолирующих граней, что тепло распространяется через поликристалл как через кристалл в направлениях 1 и 2 рисунок 3.1. Эти эффекты можно рассматривать как явления перколяции и запираания.

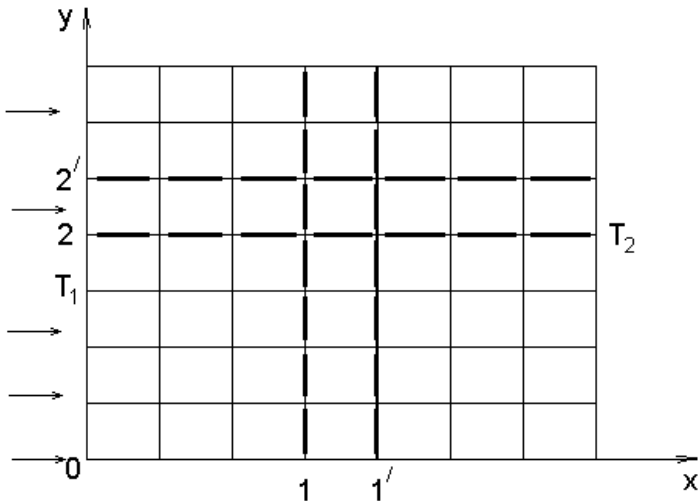


Рис. 3.1. Схема плоского поликристалла

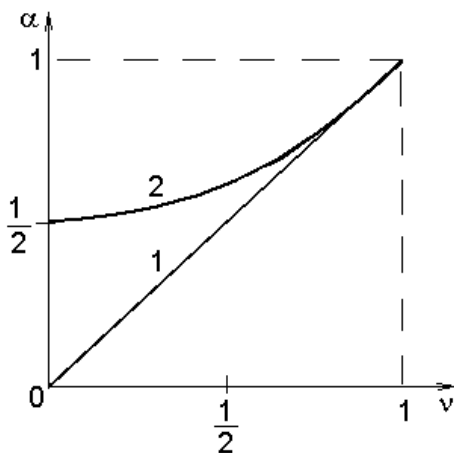
В случае плоских кристаллитов модель поликристалла можно представить в виде структуры, изображенной на рисунке 3.1. При $T_1 > T_2$ тепло распространяется от левой грани к правой.

Поликристалл становится теплоизолятором, если возникнет ситуация, когда в каком-либо ряду, параллельном оси y , все кристаллиты контактируют теплопроводящими гранями, параллельными оси x . Тогда теплоизолирующие грани образуют по крайней мере одну пару прямых линий $1 - 1'$. В случае $\alpha = 1/2$ ситуация противоположна и по крайней мере одна пара теплоизолированных линий

2 - 2' кристаллитов выстраивается параллельно оси x . Однако возможны и другие расположения, т. е. более сложные конфигурации граней кристаллитов.

При $\nu = 1$ все три грани имеют одинаковые коэффициенты температуропроводности $\alpha = 1$. Таким образом, в зависимости от того, каким образом ориентировать кристаллиты (квадраты), на рисунке 3.1 можно получить два возможных значения температуропроводности в зависимости от того, какое брать начальное распределение кристаллитов. Если начальное распределение соответствует теплоизолированному поликристаллу, то затем меняя случайным образом ориентацию поликристаллов так, чтобы с ростом ν росло α , получим при $\nu = 1, \alpha = 1$.

Если же исходить из схемы расположения кристаллитов 2-2', то соответствующая зависимость $\alpha(\nu)$, дает изменение температуропроводности, растущей с ростом ν и при $\nu = 1, \alpha = 1$, соответствующей со случаем 1-1'. Соответствующие зависимости изображены на рис. 3.2.



1 — при $\alpha = 0$ и $\nu = 0$; 2 — при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\nu = 0$

Рисунок 3.2. Зависимость $\alpha(\nu)$

3.3 Перколяция в аморфных микрокомпозитных материалах

Изменение температуропроводности в аморфных материалах определяется одной функцией $\lambda(\bar{r})$

$$\lambda_{ij}(\bar{r}) = \lambda(\bar{r})\delta_{ij}. \quad (3.25)$$

Тогда имеем

$$B_{ij}^{-1} = 3\lambda_*(2\lambda_* + \lambda(\bar{r}))^{-1}\delta_{ij}. \quad (3.26)$$

Осредняя (3.26), получим уравнение

$$\langle (\lambda(\bar{r}) - \lambda_*)(2\lambda_* + \lambda(\bar{r}))^{-1} \rangle = 0. \quad (3.27)$$

Для вычисления (3.27) необходимо задать некоторое распределение случайной функции $\lambda(\bar{r})$.

Рассмотрим сначала случай двухкомпонентной композитной среды, теплопроводными свойствами которой можем варьировать в пределах $0 \leq \lambda_i < \infty (i = 1, 2)$. В предельных случаях компоненты являются либо идеальными изоляторами $\lambda_i = 0$, либо идеальными проводниками $\lambda_i = \infty$. Для двухкомпонентного композита со значениями $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ случайно распределенным по объему, плотность вероятностей $f(\lambda)$ имеет вид [2–4]

$$f(\lambda) = C_1\delta(\lambda - \lambda_1) + C_2\delta(\lambda - \lambda_2), \quad C_1 + C_2 = 1, \quad (3.28)$$

где $\delta(\lambda - \lambda_i)$ — функция Дирака ($i = 1, 2$);

C_i — концентрация i -того компонента.

Осредняя (3.27) с функцией (3.28), получим, что коэффициент температуропроводности λ_* удовлетворяет уравнению

$$2\lambda_*^2 - \lambda_* [2\langle\lambda\rangle - (\tilde{N}_1\lambda_2 + \tilde{N}_2\lambda_1)] - \lambda_1\lambda_2 = 0. \quad (3.29)$$

Запишем уравнение (3.29) в безразмерном виде:

$$2v_*^2 - v_* [2\langle v\rangle - (\tilde{N}_1v_2 + \tilde{N}_2)] - v_2 = 0, \quad v_* = \frac{\lambda_*}{\lambda_1}, \quad v_1 = 1.$$

Реальные композитные материалы не являются идеальными проводниками или изоляторами. Однако в случае образования кластера перколяции они могут стать такими. На рисунке 3.3. изображены зависимости v_* от концентрации $\tilde{N}_2 = C$ изолятора.

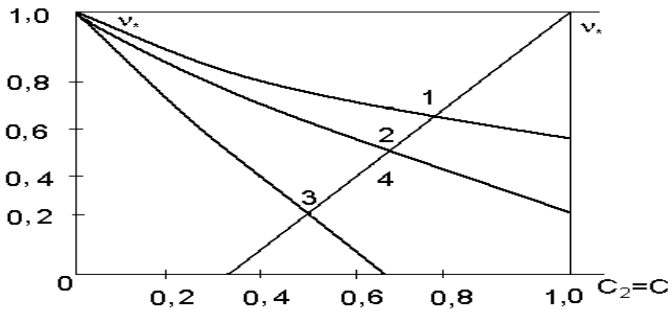


Рис. 3.3. Зависимость эффективных коэффициентов температуропроводности от концентрации C

Зависимости 1 и 2 на рисунке 3.3 соответствуют значениям v_2 равным 0,5 и 0,2. Зависимость 3 указывает, что при $v_2 = 0$ композит становится идеальным теплоизолятором, что соответствует концентрации изолятора (компонента с номером 2, $\lambda_2 = 0$), равной 2/3. В случае если $\lambda_2 \neq 0$, но $\lambda_1 \rightarrow \infty$, то $\lambda_2 \rightarrow 0$ и композит становится идеальным проводником, а зависимость v_* от $C_1 = 1 - C_2$ изображена на рисунке 3.3 в виде прямой 4. Концентрация C , при которой наступает перколяция, называется порогом перколяции.

3.4 Вычисление оценки порога перколяции на основе дискретных моделей

Запишем уравнение термостатики в виде

$$\mathbf{q}(\bar{r}) = -\lambda(\bar{r})\text{grad}T, \quad \text{div}\bar{\mathbf{q}}(r) = 0, \quad (3.30)$$

где $\bar{\mathbf{q}}(r)$ — вектор плотности потока тепла.

Дискретизируем уравнение (3.30), заменив сплошную среду регулярной кубической решеткой, рисунок 3.4. с узлами $\{\bar{r}_i\}$ и шагом между узлами Δr . Для $T_i = T(\bar{r}_i)$ запишем систему линейных уравнений

$$\sum_j \Lambda_{ij}(T_i - T_j) = 0, \quad (3.31)$$

где \bar{r}_i, \bar{r}_j — точки, не принадлежащие поверхности куба, т. е. i, j — соседние внутренние узлы.

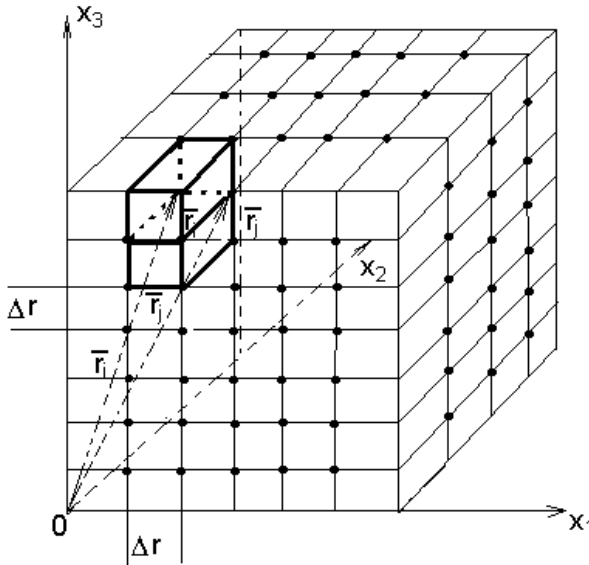


Рис. 3.4. Схема вычисления перколяции на основе дискретной модели

Уравнение (3.31) аналогично закону Кирхгофа в электростатике для тока, протекающего в кубической решетке, электропроводящие свойства которой характеризуются величинами Λ_{ij} [4, 65], где Λ_{ij} имеет вид

$$\Lambda_{ij} = \lambda \left((\bar{r}_i + \bar{r}_j) / 2 \right) \Delta r . \quad (3.32)$$

Используя формальную аналогию между математическими моделями электро- и теплопроводности, аналогично получим уравнение для нахождения безразмерной эффективной теплопроводности v_* в виде

$$v_*^2 + v_* \left\{ 1 - mc + v_2 \left(\frac{mc - 2}{m - 2} \right) \right\} - 2v_2 = 0, \quad (3.33)$$

$$v_* = \lambda_* / \lambda_1, \quad v_2 = \lambda_2 / \lambda_1,$$

где m — число связей в узле.

В случае когда вторая компонента $\lambda_2 = 0 (v_2 = 0)$, уравнение (3.33) преобразуется к виду

$$v_* = 1 - Cm / (m - 2). \quad (3.34)$$

При $c = 1 - \frac{2}{m}$ из (3.33) следует $v_* = 0$, а при $c = 0$ $v_* = 1$.

Т.е., порог перколяции по связям зависит от значения m .

На рисунке 3.5. показаны зависимости v_* от c при различных значениях m .

Из условия $(m - 2) / m = c$ получаем пороги перколяции. При $m = 4$ $c_p = 1/2$ — прямая 1, при $m = 2$ $c_p = 1$ — прямая 2, при — прямая 3. Прямая 1 совпадает с зависимостью, полученной в третьем разделе на основе самосогласованного метода.

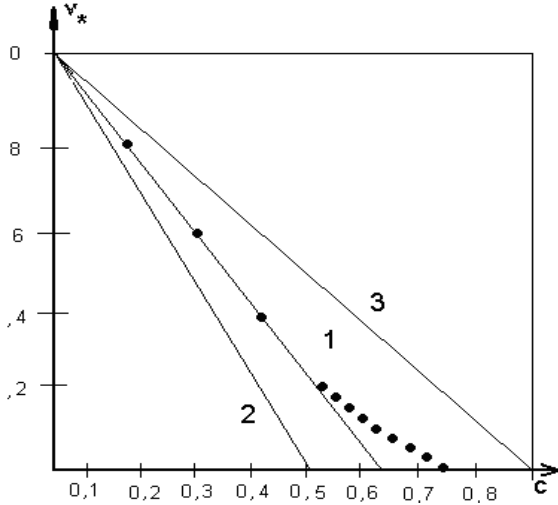


Рис. 3.5. Зависимость v^* от c при различных значениях m в модели перколяции по связям

Численные расчеты эффективной температуропроводности проводились на основе представления, следующего из уравнения (3.31)

$$T_i = \sum_j \Lambda_{ij} T_j \left(\sum_j \Lambda_{ij} \right)^{-1} \quad (3.35)$$

Для кубической решетки считается, что Λ_{ij} принимает значение 1 или 0, расчет выполняется последовательными приближениями. Рассмотрим сравнение результатов, получаемых аналитически и численно для двумерной решетки $m = 4$. Уравнение для v_* в этом случае имеет вид

$$v_*^2 + (2C - 1)(1 - v_2)v_* - v_2 = 0. \quad (3.36)$$

При $v_2 = 0$ второй компонент является теплоизолятором, тогда получаем

$$v_* = (1 - 2C) \quad (3.37)$$

Порог перколяции в этом случае $c_p = 0,5$. На рисунке 3.6 изображены зависимости v_* от c при $v_2 = 2$ (кривая 1), при $v_2 = 5$ (кривая 2), при $v_2 = 0$ (кривая 3).

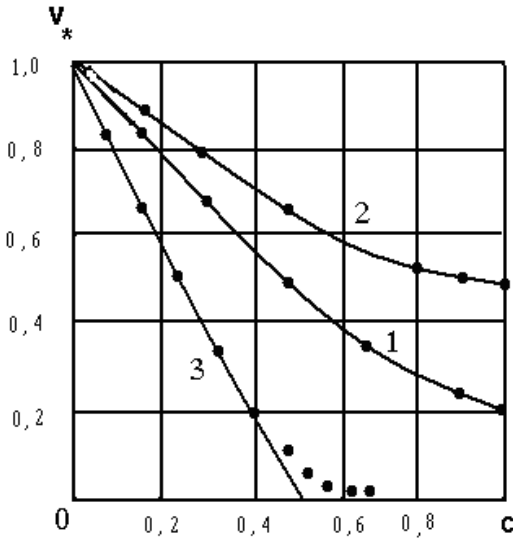


Рис. 3.6. зависимость v_* от c при различных v_2 для двумерной модели

Как следует из рисунка 3.6, линейная зависимость v_* от c вблизи порога перколяции для двумерного случая, например волокнистого композита также нарушается, если считается, что $\text{grad } T$ перпендикулярен армирующим волокнам.

Предполагается, что вблизи порога перколяции зависимость v_* от c может быть аппроксимирована степенной зависимостью вида

$$v_* = a(c_p - c)^t. \quad (3.38)$$

Коэффициенты a , C , t определяем из условий гладкости перехода линейной зависимости в нелинейную при $c = 0,5$.

Приравнявая зависимости (3.38), (3.34) при $v_2 = 0$ и соответствующие производные, получим в трехмерном случае $t = 1,5 \dots 1,7$, $c_p = 2/3 + \delta_3$, ($0,05 \leq \delta_3 \leq 0,15$), в двумерном случае $t = 1,8 \dots 1,9$, $c_p = 1/2 + \delta_2$ ($0,05 \leq \delta_2 \leq 0,15$).

3.5 Моделирование кластеров перколяции в структуре микрокомпозитных материалов методом рандомизации

Плотность вероятностей (3.28) соответствует идеальной модели двухкомпонентного композита. В реальности плотности распределения вероятностей имеют более сложный вид и в процессе формирования композита изменяются в зависимости от концентрации компонентов, например, в процессе синтеза композитного изделия или накопления микротрещин в процессе эксплуатации. Как следует из (3.29) $\lambda_* = \lambda_*(c)$ является функцией концентрации C , причем на множестве реализаций производства одного и того же типа композита при фиксированном c функция $\lambda_* = \lambda_*(c)$ будет обладать случайным разбросом свойств, т. е. является случайной функцией от c . Рандомизируем $\lambda_*(c)$, положив, что $\lambda_*(c)$ представляет собой случайную функцию марковского типа, а ее плотность вероятностей $f(\lambda_*, c)$ удовлетворяет уравнению сохранения вида [66, 67]

$$\frac{\partial f(\lambda_*, c)}{\partial c} + \frac{\partial G(\lambda_*, c)}{\partial \lambda_*} = 0, \quad (3.39)$$

где $G(\lambda_*, c)$ в общем виде

$$G(\lambda_*, c) = A_1(\lambda_*, c)f(\lambda_*, c) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_*} [A_2(\lambda_*, c)f(\lambda_*, c)]. \quad (3.40)$$

Выражения для коэффициентов $A_1(\lambda_*, c)$, $A_2(\lambda_*, c)$ зависят от выбора моделей кластеризации и диффузии, описывающих процессы, идущие при формировании или деградации композита, следствием чего является разброс значений $\lambda_*(\tilde{n})$. Уравнения (3.39), (3.40) рассматриваются в области $\Lambda \times c: 0 \leq c \leq 1, 0 \leq \lambda_* < \lambda_1$. В качестве начального условия берется

$$f(\lambda_*, 0) = \delta(\lambda_* - \lambda_1). \quad (3.41)$$

В (3.40):

1) $A_1(\lambda_*, c)f(\lambda_*, c)$ — характеризует систематический конвекционный поток вероятности, формирующий кластер и направленный вдоль оси λ_* ;

2) $\frac{A_2}{2} \frac{\partial f(\lambda_*, c)}{\partial \lambda_*}$ характеризует диффузионный поток вероятности, который направлен от большей вероятности концентрации компонента изолятора к меньшей.

Эти процессы в плоскости $\Lambda \times c$ отражают реальные механические процессы агрегации и диффузии компонентов композитов при их синтезе и деградации.

Таким образом $G(\lambda_*, c)$ характеризует полный поток плотности вероятности эффективной среды через произвольное сечение λ_* .

Уравнение типа Ланжевена [66, 67]

$$\frac{d\lambda_*}{dc} + \psi(\lambda_*) = v(c), \quad (3.42)$$

где $\psi(\lambda_*)$ — кусочно-линейная функция.

$v(c)$ — чисто случайная функция (нормальный белый шум),
 $(\langle v \rangle = 0, \langle v(c), v(c_1) \rangle = N_0 \delta(c - c_1))$.

Функция $\lambda_*(c)$ в этом случае — марковская, а коэффициенты сноса и диффузии имеют вид

$$A_1(\lambda_*) = -\psi(\lambda_*), \quad A_2(\lambda_*) = b = N_0 / 2 \quad (3.43)$$

С учетом (3.43) поток вероятности в плоскости $(\Lambda \times c)$ имеет вид

$$G(\lambda_*, c) = -\psi(\lambda_*) \phi(\lambda_*, \tilde{n} | \lambda_1, 0) - (N_0 / 4) \frac{\partial \phi(\lambda_*, c | \lambda_1, 0)}{\partial \lambda_*}. \quad (3.44)$$

Функцию $\psi(\lambda_*)$ зададим в виде [66, 67]

$$\psi(\lambda_*) = \begin{cases} k & \text{при } \lambda_k \langle \lambda_k \leq \lambda_1 \\ \frac{\psi_k}{\lambda_k} \lambda_* & \text{при } 0 \leq \lambda \leq \lambda_k \end{cases}. \quad (3.45)$$

График функции $\psi(\lambda_*)$ представлен на рис. 3.7.

В уравнениях (3.42)–(3.45) перейдем к безразмерной величине $\mu_* = \lambda_* \lambda_1^{-1}$ и запишем решение уравнения (3.42) с учетом (3.45) в виде

$$\mu_*(\tilde{n}) = \begin{cases} 1 - \psi_k^{(1)} c & c_k \leq c \leq 1 \\ \mu_k c - \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k} (c - c_k) & 0 \leq c \leq c_k \end{cases} \quad (3.46)$$

где $\psi_k^{(1)} = \psi_k \lambda_1^{-1}$, $\mu_k = \lambda_k \lambda_1^{-1}$.

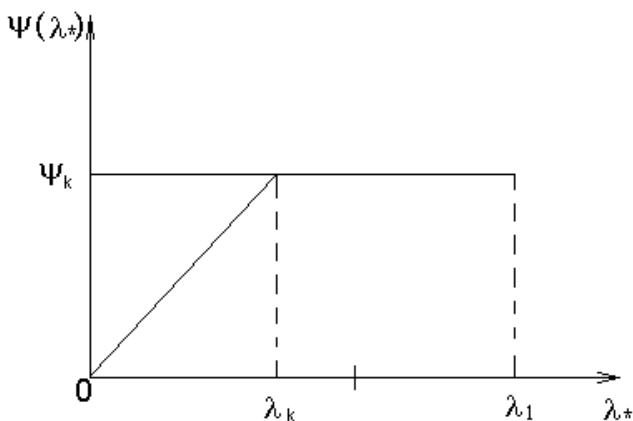


Рис. 3.7. График функции $\psi(\lambda^*)$

Из зависимости $\mu_*(c)$, система (3.46), следует, что ни при какой $0 \leq c \leq 1$, $\mu_*(c) \neq 0$, не существует концентрации, при которой наступит перколяция, описываемая детерминированным законом изменения (3.46). Это соответствует тому, что формируется не макро-кластер, а множество микрокластеров, причем при $c = 1$ идеальный изолятор обладает температуропроводностью, что физически нереально. Однако для случайной зависимости это может быть возможным.

3.6 Вычисление вероятности перколяции в структуре микрокомпозитных материалов на основе марковской модели

3.6.1 Моделирование образования кластера перколяции как вероятности достижения границы области $\Lambda \times C$

Формирование структуры двухкомпонентного композита описываем как случайное блуждание точки $M(\mu_*, c)$ в области $\mu \times \tilde{n}$ при

условии, что точка $M(\mu_*, c)$ при $c = 0$ находится в граничной точке $M_0(\lambda_1, 0)$. Граница $\mu_* = 0$ является поглощающей, а граница $\mu_* = 1$ при $c > 0$ является недостижимой, т. к. концентрация наполнителя растет и свойства композита меняются. Рассмотрим случайные события:

– событие A — точка M не достигает границы $\mu_* = 0$ при $0 < c < 1$, что соответствует процессу формирования кластера за счет агрегации и одновременно его деструкции за счет диффузии;

– событие B — точка M достигает границы $\mu_* = 0$ при некотором $0 < c = \tilde{n}_p < 1$, что соответствует преобладанию механизма агрегатирования над диффузией, т. е. образованию кластера, имеющему контакты с границами тела.

Обозначим вероятность события A через $P(A) = Q$, вероятность события B — через $P(B) = 1 - Q$. Тогда в области $\mu \times \tilde{n} \setminus \mu_* = 1$ имеем $P + Q = 1$.

Введем плотность вероятностей [56, 58]

$$w(1, \mu_*, c) = q(1, \mu_*, c) + P(0, c)\delta(\mu_*), \quad (3.47)$$

где $q(1, \mu_*, c)$ связана с $Q(1, c)$ уравнением

$$Q(1, c) = \int_1^0 q(1, \mu_*, c) d\mu_*. \quad (3.48)$$

Очевидно, имеют место соотношения

$$P(1, c_i) > P(1, c_{i+1}), \quad P(0, c_i) < P(0, c_{i+1}); \quad (3.49)$$

$$\int_1^0 q(1, \mu_*, c_i) d\mu_* < \int_1^0 q(1, \mu_*, c_{i+1}) d\mu_*, \quad c_{i+1} > c_i. \quad (3.50)$$

Таким образом, $q(1, \mu_*, c)$ представляет собой плотность вероятности того, что точка $M(\mu_*, c)$ не достигнет границы. Эта функция не является нормированной, но удовлетворяет уравнению (3.47) с условием $\delta(1, 0) = \delta(1)$. Так как при δ — образных условиях уравнение для одномерного распределения совпадает с уравнением для условной вероятности перехода [66, 67], то вместо $q(1, \mu_*, c)$ можно рассматривать ненормированную плотность вероятности перехода $p(\mu_*, c|1, 0)$, которая удовлетворяет уравнению типа (3.47) с граничными условиями

$$p(1, c|1, 0) = \delta(c), \quad p(0, c|1, 0) = 0, \quad (3.51)$$

$$p(\mu_*, c|0, 0) = p(\mu_*, c|1, 0) = 0. \quad (3.52)$$

которые означают, что плотности вероятности $p(\mu_*, c|1, 0)$, $p(\mu_*, c|0, 0)$ описывает реализации, не достигнувшие границ. В дальнейшем будем использовать не только прямое уравнение ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова), но и обратное, поэтому вместо $c = 0$ введем $c = c_0$, а вместо $\mu_* = \mu_0$. Это означает, что формирование композита начинается из состояния, когда в нем уже содержится теплоизолирующий компонент $\mu_* = 0$ с концентрацией $c = c_0$. Тогда

$$Q(\mu_{0*}, c) = Q(\mu_{0*}, c_0, c) = \int_{\mu_{0*}}^0 p(\mu_*, c / \mu_{0*}, c_0) d\mu_* \quad (3.53)$$

Здесь функция $p(\mu_*, c / \mu_0, c_0)$ удовлетворяет обратному уравнению ФПК вида

$$-\frac{\partial p}{\partial c_0} = A_1(\mu_0, c_0) \frac{\partial p}{\partial \mu_0} + \frac{A_2(\mu_0, c_0)}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \mu_0^2} \quad (3.54)$$

Аналогично на основе уравнения (3.54) можно получить уравнения для $Q(\mu_{0*}, c)$, и $P(\mu_{0*}, c) = 1 - Q(\mu_{0*}, c)$ удовлетворяющих (3.53). Выпишем уравнения для $Q(\mu_{0*}, c)$, $P(\mu_{0*}, c)$ в явном виде для однородных функций

$$\frac{\partial P(\mu_{0*}, c)}{\partial c} = A_1(\mu_{0*}) \frac{\partial P}{\partial \mu_0} + \frac{1}{2} A_2(\mu_{0*}) \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_0^2}. \quad (3.55)$$

Начальное условие для $P(\mu_0, \tilde{n})$ имеет вид

$$P(\mu_0, 0) = 0. \quad (3.56)$$

Граничные условия запишем в виде

$$P(0, c) = 1, P(1, c) = 0 \quad . \quad (3.57)$$

Должно выполняться условие формирования идеального изолятора $\lim_{c \rightarrow 1} P(0, c) = 1$

Концентрация изолятора, при которой происходит перколяция согласно теории эффективной среды равна $2/3$. Однако в модели перколяции ФПК она является случайной величиной $C = C(0, \mu_{0*})$, плотность вероятностей которой можно найти по формуле

$$w(t) = \frac{\partial P(\mu_0, c)}{\partial c} = -\frac{\partial Q(\mu_0, c)}{\partial c}. \quad (3.58)$$

Тогда среднее значение концентрации перколяции вычисляется по формуле

$$\langle c \rangle = \int_0^1 c \frac{\partial P(\mu_{0*}, c)}{\partial c} dc = - \int_0^1 \tilde{n} \frac{\partial Q(\mu_{0*}, c)}{\partial c} dc = \int_0^1 Q(\mu_{0*}, c) dc. \quad (3.59)$$

Формула (3.59) получена с помощью интегрирования по частям и условия $Q(\mu_{0*}, 1) = 0$.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= -2 \int_0^{\mu_{0*}} e^{-\Psi(v_{0*})} \left[\int_0^{v_{0*}} \frac{v^{\Psi(z_{0*})}}{A_2(z_{0*})} dz_{0*} \right] dv_{0*} + \\ &+ \left\{ -\frac{3}{2} + 2 \int_0^1 e^{-\Psi(v_{0*})} \left[\int_0^{v_{0*}} \frac{e^{\Psi(z_{0*})}}{A_2(z_{0*})} dz_{0*} \right] dv_{0*} \right\} \times \\ &\times \frac{\int_0^{\mu_{0*}} e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*}}{\int_0^{\mu_{0*}} e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*}} + \frac{3}{2} = \left\{ \frac{3}{2} - 2\Phi(\mu_{0*}) \right\} + \left\{ -\frac{3}{2} + 2\Phi(1) \right\} \cdot T \cdot T_{(1)}^{-1} \Phi = \\ &= \int_0^{\mu_{0*}} e^{\Psi(v_{0*})} \left[\int_0^{v_{0*}} \frac{e^{\Psi(z_{0*})}}{A_2(z_{0*})} dz_{0*} \right] dv_{0*} T(\mu_{0*}) = \int_0^{\mu_{0*}} e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Выражение (3.60) дает формулу для вычисления оценки порога перколяции $\langle c \rangle = c_p$ как средней концентрации, при которой вероятность достижения порога перколяции максимальна.

3.6.2 Вычисление вероятности и плотности вероятности перколяции

Условная плотность вероятности $f(v_*, c/v_*^0, c_0)$ удовлетворяют прямому и обратному уравнениям ФПК, в частности, прямое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{n}} = \frac{\partial}{\partial v_*} \left[\frac{\gamma v_*}{c - c_p} \right] + \frac{N}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v_*^2} = 0. \quad (3.61)$$

Начальное условие

$$f \left\langle v_* c_0 \left| v_*^0 c_0 \right. \right\rangle = \delta(v_* - v_*^0). \quad (3.62)$$

Граничные условия

$$f \left\langle v_*^0 c \left| v_*^0 c \right. \right\rangle = 0, \quad f \left\langle 0, c \left| v_*^0 c_0 \right. \right\rangle = \delta(c_p - c). \quad (3.63)$$

Непосредственное решение осложняется зависимостью $A_1(v_*, c)$ от c , причем при приближении c к c_p скорость регулярного изменения (сноса) $A_1(v_*, c)$ стремится к бесконечности, что для $c \sim c_p$ позволяет пренебречь диффузионным членом в (3.68) и получить, что вероятность f удовлетворяет уравнению типа переноса

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{n}} = \frac{\gamma v_*}{c - c_p} \frac{\partial f}{\partial v_*} + \frac{\gamma}{c - c_p} f. \quad (3.64)$$

Уравнение (3.64) описывает перенос плотности вероятности в среде с поглощением, причем макроскопическое поперечное сечение δ зависит от v_*^{-1} . Это предельный случай, когда диффузией пренебрегают и учитывают только перенос, ведущей к росту кластеров [4, 15, 64–68].

Решение уравнения (3.71) в этом случае имеет вид

$$f = f_0 \exp \left[-\gamma \int_{c_0}^c \frac{ds}{c - c_p} \right] = f_0 \exp \left[-\gamma \ln \left| c - c_p \right| \right]_{c_0}^c = f_0 \left(\frac{c - c_p}{c_0 - c_p} \right)^{-\gamma}.$$

Вероятность вычисляется по формуле

$$P = f_0 \int_{c_0}^{c_p} \left(\frac{c_0 - c_p}{c - c_p} \right) dc = f_0 \frac{c_p - c_0}{1 - \gamma} \quad \text{при } \gamma < 1, \quad c_0 < c_p. \quad (3.65)$$

Вернемся к уравнению (3.65) и учтем диффузию.

Запишем прямое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(v_*, c | v_*^0, c_0)}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial v_*} \left(\left[\frac{\gamma v_*}{c - c_p} \right] f(v_*, c | v_*^0, c_0) \right) + \\ &+ \frac{N_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_*^2} f(v_*, c | v_*^0, c_0). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Начальное условие имеет вид

$$f(v_*, c_0 | v_*^0, c_0) = \delta(v_* - v_*^0). \quad (3.67)$$

Граничные условия

$$f(v^0, c_0 | v_*^0, c_0) = 0, \quad f(v_*, c | v_*^0, c_0) = \delta(c_p - c). \quad (3.68)$$

В (3.66) сделаем замену переменных

$$s = \varphi(c), \quad v_*^{(1)} = \psi(v_*, c), \quad (3.69)$$

где $\varphi(c)$, $\psi(v_*, c)$ имеет вид

$$\varphi(c) = \frac{N}{2} \left(\frac{c - c_p}{c_0 - c_p} \right)^{-2\gamma} = \frac{N}{2} \left(\frac{c_0 - c_p}{c - c_p} \right)^{2\gamma} = s. \quad (3.70)$$

Запишем уравнение (3.65) в новых переменных, вводя замену плотности вероятностей обычным образом [66, 67]:

$$f(v_*, c | v_*^0, c_0) = f_1(v_*, c) |s_0, v_{*0}^1| |\psi, v_*|, \quad (3.71)$$

где учтено, что

$$s_0 = \phi(c_0), \quad v_{*0}^1 = \psi(v_*^0, c_0). \quad (3.72)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial s} = & -\frac{\partial}{\partial v_*^1} \left[A_1(v_*^1, s) f_1(v_*^1, s | v_{*0}^1, s_0) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_*^1} \left[A_2(v_*^1, s) f_1(v_*^1, s | v_{*0}^1, s_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

При начальном условии

$$f_1(v_*^1, s_0 | v_{*0}^1, s_0) = \delta(v_*^1 - v_{*0}^1), \quad (3.74)$$

а также граничных, следующих из (3.75):

$$f_1(v_{*0}^1, s | v_{*0}^1, s_0) = 0, \quad f_1(0_0^* | v_{*0}^1, s_0) = \delta(s_p - s). \quad (3.75)$$

Коэффициенты A_1, A_2 в уравнении (3.73) подбираются таким образом, чтобы он имело заданный вид. Сначала рассмотрим случай

$$A_1(v_*^1, s) = \frac{1}{\varphi'_{*,c}} \left\{ \psi'_{*,c} + A_1 \left[\phi_{(s)}^{-1}, \psi^{-1}(s, v_*^1) \right] \psi'_{*,v_*} \right\} = 0; \quad (3.76)$$

$$A_2(v_*^1, s) = \frac{1}{\varphi'_{*,c}} \frac{N}{2} \cdot (\psi'_{*,v_*}). \quad (3.77)$$

Решение уравнения (3.73) записывается в виде

$$f(v_*, c | v_*^0, c_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c - c_0)}} \exp \left\{ -\frac{(v_* - v_*^0)^2}{2(c - c_0)} \right\}, \quad v_* = \int v(c) dc. \quad (3.78)$$

Условная плотность перколяции находится по формуле

$$f(0, c_p | v^0, c_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c_p - c_0)}} \exp \left\{ -\frac{v_*^{02}}{2(c_p - c_0)} \right\}. \quad (3.79)$$

Вероятность перколяции

$$P = \int_{c_0}^{c_p} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(c-c_0)}} \int_{v_*^0}^0 \exp \left\{ -\frac{(v_* - v_*^0)}{2(c-c_0)} \right\} dv_* \right] dc. \quad (3.80)$$

Рассмотренные случаи соответствуют моделям, описывающим крайние случаи: для вычисления вероятности перколяции в отсутствие диффузии — формула (3.73), чистая диффузия в отсутствие переноса — формула (3.78). Истинная вероятность находится между вычисленными границами, определяемыми формулами (3.80), (3.79).

Значение концентрации, равное 0,5, является пороговым, что вытекает из рассмотрения двухкомпонентного композита как области, на которой случайная величина $v(x) = \mu(x)\mu_1^{-1}$ принимает два значения:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } c \\ 1, & \text{с вероятностью } 1-c \end{cases} \quad (3.81)$$

Рассмотрим аппроксимацию $v_*(c)$ степенной функцией вида

$$v_* = (c_p - c)^\gamma, \quad (3.82)$$

где c_p , γ — некоторые константы, которые определим из условий

гладкого перехода линейной зависимости $v_*^{(\gamma)} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - c \right)$ в нели-

нейную зависимость $v_* = (c_p - c)^\gamma$ при $c = 0,5$.

Для этого при $c = 0,5$ принимаем функции $v_*^{(e)}$, $v_*^{(n)}$ и $v_{*,c}^{(e)}$ с $v_{*,e}^{(n)}$ получим 2 уравнения относительно γ и c_p :

$$\begin{aligned}
 (\tilde{n}_p - 0,5)^\gamma &= 0,25; \\
 -\gamma(\tilde{n}_p - 0,5)^{\gamma-1} &= -\frac{3}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.83}$$

Решая уравнения, получаем

$$\gamma \approx 1,6, \quad c_p \approx 3/5,$$

что совпадает с результатами экспериментов, моделирования и расчетов другими методами [4, 64, 65, 68].

На рисунке 3.8. изображено изменение $w(u_{*0}^1, u_{*p}^1, s)$, из которого видно, что на границе $u_{*0}^1 = (c_p - c_0)^\gamma$ плотность вероятности $w(u_{*0}^1, u_{*p}^1, s_1)$ не равна нулю. Чтобы получить решение $q(u_{*0}^1, u_{*p}^1, s)$ уравнения (3.77), использован метод отражений [66, 67].

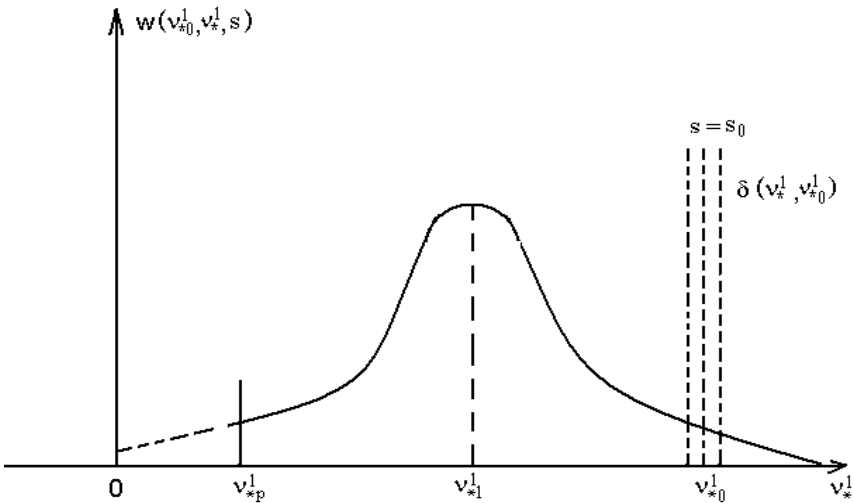


Рис. 3.8. Изменение плотности вероятности w

На рисунке 3.9. изображена зависимость вероятности перколяции от концентрации теплоизолятора.

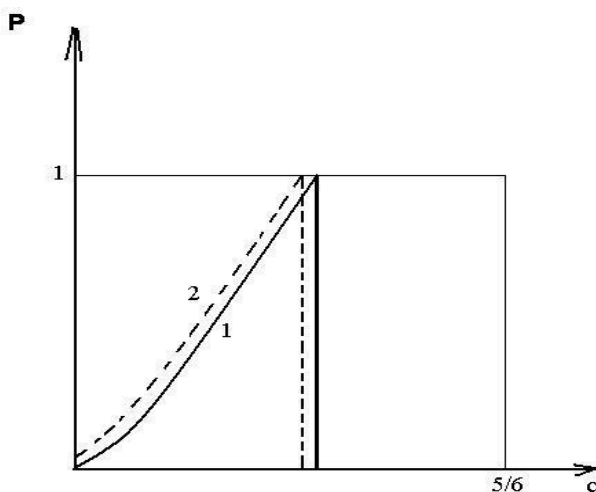


Рис. 3.9. Зависимость вероятности перколяции от концентрации теплоизолятора

Результаты экспериментов и статистического моделирования (кривая 2) для модели перколяции по связям в трехмерной кубической решетке [4] согласуются с численными, полученными на основании вероятностной аналитической модели (кривая 1), учитывающей как регулярные, направленные на формирование макрокластера, так и случайные факторы, моделируемые как чисто случайные влияния (белый шум) и обуславливающие диффузию [66, 67].

3.7 Нелокальность определяющих соотношений в моделях квазиконтинуума для микро- и нанокомпозитных материалов

Получению моделей квазиконтинуума, учитывающего элементы структуры среды посвящено сравнительно немного работ. Здесь в основном развиваются два подхода. Классический феноменологический подход развивает методы интерполяции моделей сплошной

среды в направлении учета структуры за счет введения в лагранжиан (гамильтониан) структурных параметров и применения вариационных методов. Структурный подход исходит от дискретной модели, а интерполяция в направлении сплошной среды осуществляется с помощью различных осредняющих процедур, позволяющих получать уравнения.

Рассмотрим некоторые простые модели нелокальной механики сплошной среды с точки зрения их применения в микро- и наномеханике. Обычно модели нелокальной теории упругости имеют определяющие соотношения в виде [34]

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \int \Gamma_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1) e_{ij}(\bar{x}) dx_1, \quad (3.84)$$

где σ_{ij} — напряжение,

e_{ij} — деформация.

Ядро $\Gamma_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ представляется следующим образом:

$$\Gamma_{ijke}(x, x_1) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_1) \lambda_{ijke}^0 + N_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1). \quad (3.85)$$

Здесь λ_{ijke}^0 — обычные статические модули упругости материала, а ядро $N_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ учитывает пространственную «историю деформирования», т. е. влияние состояния в точке \bar{x} от состояния в точках \bar{x}_1 , где $x, x_1 \in V$. Выбор ядра $N_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ является достаточно произвольным и может основываться как на решении задачи идентификации, использующий экспериментальные данные, так и на теоретических моделях [10, 11].

Представим ядро $N(x, x_1)$ в виде суперпозиции, в которой каждый следующий член зависит от статистического момента упругих коэффициентов более высокого порядка

$$N_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1) = \sum_{\alpha=1}^n N_{ijke}^{(\alpha)}(\bar{x}, \bar{x}_1). \quad (3.86)$$

Здесь ядро $N_{ijke}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ должно зависеть от структурной (корреляционной) функции параметров структурных элементов среды, в $N_{ijke}^{(2)}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ входят моменты третьего порядка, которые учитывают структурную анизотропию, и т. д.

Ограничимся корреляционным приближением для статистического описания структур. В этом случае зависимость корреляционной функции от радиусов корреляции позволяет учесть наличие в модели иерархии масштабов пространственных структур.

Ядро $N_{ijke}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ должно представлять собой суперпозицию функции Грина (ее производных) и корреляционной структурной функции параметров структуры среды, причем суперпозиция должна иметь мультипликативный характер.

Получение конкретного вида ядра $N_{ijke}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ рассмотрим на модели неоднородной упругой среды, рассматриваемой в данной работе. Исходные определяющие локальные уравнения имеют вид обобщенного закона Гука, температурные эффекты могут быть легко учтены, если брать закон Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijke}(\bar{x}) e_{ke}. \quad (3.87)$$

Считая $\lambda_{ijke}(\bar{x})$ в (3.87) тензором, зависящим от пространственных координат случайным образом, с помощью методов осреднения получим определяющие соотношения, устанавливающие связь между средними напряжениями и деформациями в виде (3.85),

т. е. нелокальной упругой среды. Выражение для ядра $N_{ijke}^{(1)}$ получается (в прямых обозначениях) в виде

$$N^{(1)}(x - x_1) = G(\bar{x} - \bar{x}_1)R(\bar{x} - \bar{x}_1)G(\bar{x} - \bar{x}_1). \quad (3.88)$$

Здесь в индексной записи $G_{ij}(\bar{x} - \bar{x}_1)$ — тензор Грина однородной линейно упругой среды для области: $R_{ijke}^{mnpq}(\bar{r} - \bar{r}_1)$ — корреляционный тензор упругих модулей $\lambda_{ijke}(\bar{x})$. Таким образом, ядро $N_{ijke}(\bar{x}, \bar{x}_1)$ в (3.85), получаемое в рамках модели неоднородной среды, удовлетворяет требованиям, сформулированным выше.

Рассмотрим погрешность применения полученных соотношений для описания микронаноструктурных сред.

Линейные продольные гармонические колебания наностержня (наноцепи) в дискретном представлении описываются уравнения

$$m\ddot{u}(n) = -\sum_{n'} C^{ik}(n - n')u^k(n'), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (3.89)$$

где m — масса;

$\ddot{u}(n)$ — перемещения n -го атома;

n — обозначает номер атома в периодической цепи;

$\tilde{N}^{ik}(n)$ — силовая матрица, характеризующая взаимодействие

между атомами.

В случае простой решетки $C_{(n)}^{ik} = C_{(n)}^{ki}$ являются четными функциями n и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{n'} C^{ik}(n) = 0.$$

Для гармонических колебаний $u(n) = e^{-idkn}$, тогда из (3.89) следует закон дисперсии вида

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \sum_n C_0(n) e^{-idkn} \equiv -\frac{1}{m} \sum_n C_0(n) (1 - e^{-idkn}), \quad (3.90)$$

где d — постоянная решетки.

В приближении длинных волн $dk \ll 1$ из (3.90) получаем закон дисперсии в виде

$$\omega = c_0 k, \quad c_0^2 = -\frac{d^2}{2m} \sum_n C_0(n) n^2, \quad (3.91)$$

где C_0 — скорость распространения продольных колебаний.

Закон дисперсии (3.91) соответствует распространению продольной гармонической волны в упругом сплошном стержне, т. е. континуальному приближению наноцепочки. В (x, t) представлении уравнение движения, соответствующее (3.91), имеет вид обычного волнового

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3.92)$$

Рассмотрим модель квазиконтинуума, которая является промежуточной между моделями дискретной цепочки (3.89) и сплошного упругого стержня (3.92). Распространение волн в одномерном квазиконтинууме описывается уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \int C(x-x') \frac{\partial}{\partial x'} u(x') dx' = 0, \quad (3.93)$$

где ядро интегрального оператора $\tilde{N}(x-x')$, как правило, может быть представлено в виде

$$C(x-x') = c_0^2 \delta(x-x') + C_1(x-x'), \quad (3.94)$$

причем ядро $\tilde{N}_1(x-x')$ содержит параметры пространственной размерности.

Подставляя (3.94) в (3.93), получим, что приближение континуума (3.92) следует из (3.93), (3.94), если пренебречь учетом нелокальности за счет ядра $\tilde{N}_1(x-x')$. Структура ядра $\tilde{N}_1(x-x')$ имеет вид мультипликатора функции Грина G и корреляционной функции R

$$C_1(x-x') = G(x-x')R(x-x'), \quad (3.95)$$

где $G(x-x')$ — функция Грина, определяемая из уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c_0 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta(t-t')\delta(x-x') \quad (3.96)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях;

$R(x-x')$ – корреляционная функция упругого коэффициента $\lambda = \lambda(x)$, определяемая согласно формуле

$$R(x-x') = \langle \lambda(x)\lambda'(x') \rangle, \quad \lambda'(x) = \lambda(x) - \langle \lambda \rangle. \quad (3.97)$$

Как известно, $G(x-x')$ зависит от свойств среды, геометрии области. $R(x-x')$ определяет микроструктуру среды в диапазоне от периодических до хаотических структур [57].

Рассмотрим модель разупорядоченной среды, описываемую корреляционной функцией вида

$$R(x-x') = R_0 \exp(-\alpha|x-x'|), \quad \alpha = a^{-1}, \quad (3.98)$$

тогда дисперсионное уравнение имеет вид

$$z^4 + z^2(s^2 - m) - m^2 s^2 - imns = 0, \quad z = aq, \quad s = 1 - im, \quad (3.99)$$

где q — волновое число;

λ — длина волны.

На рисунке 3.10 изображена зависимость коэффициента затухания $a \delta = \text{Im}(z)$ от m , а на рис. 3.11. представлена зависимость групповой скорости $\tilde{n}_g \tilde{n}_0^{-1}$ от m , 1 линия — акустическая ветвь, 2 линия — оптическая ветвь.

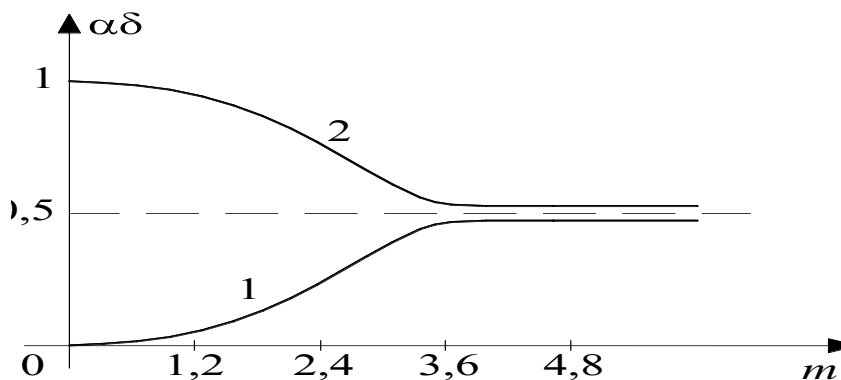


Рис. 3.10. Зависимость коэффициентов рассеяния акустической (1) и оптической ветвей (2) от $m = b\lambda^{-1}$ в квазиконтинууме

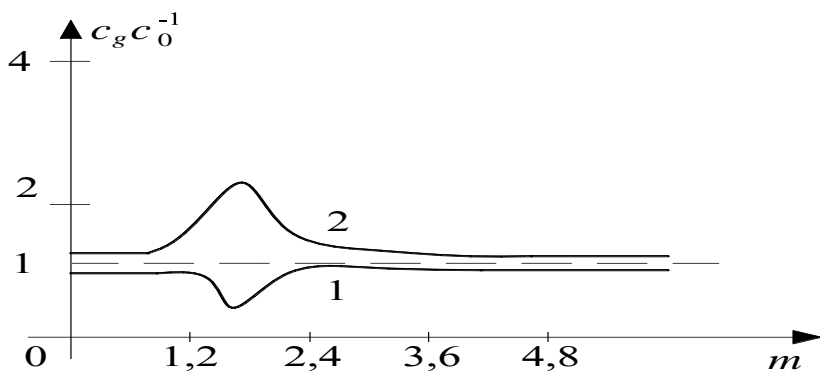


Рис. 3.11. Зависимость групповых скоростей акустической (1) и оптической ветвей (2) от $m = a\lambda^{-1}$ в квазиконтинууме

Для моделирования среды с частично упорядоченной структурой можно использовать корреляционную функцию вида

$$R(x - x') = R_0(1 + \alpha|x - x'|)\exp(-\alpha|x - x'|)\cos(\beta(x - x')). \quad (3.100)$$

В этом случае дисперсное уравнение является трансцендентным и может быть решено приближенно, однако поведение дисперсионных кривых по сравнению с (3.95). имеет более сложный характер

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$q^2 = \begin{cases} m^2 - m^2 \left(-\frac{imn\pi}{2} + \frac{mn}{4} \ln \left| \frac{(m+1)^2 - q^2}{(m-1)^2 - q^2} \right| \right), & |q| < 1 - m; \\ m^2 - m^2 \left(-\frac{imn\pi}{2} + \frac{mn}{4} \ln |\infty| \right), & |q| = 1 - m; \\ m^2 - m^2 \frac{mn}{4} \ln \left| \frac{(m+1)^2 - q^2}{(m-1)^2 - q^2} \right|, & |q| > 1 - m. \end{cases} \quad (3.101)$$

Зависимость коэффициента затухания от m представлена на рисунке 3.12.

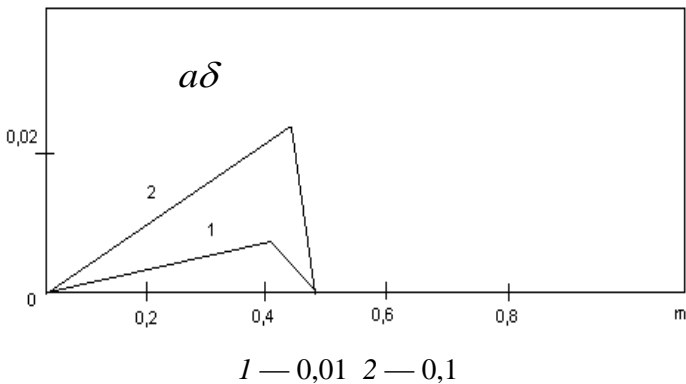


Рис. 3.12. Зависимость коэффициента затухания от длины волны и радиуса корреляции при R_0

Зависимость групповой скорости от m представлена ниже.

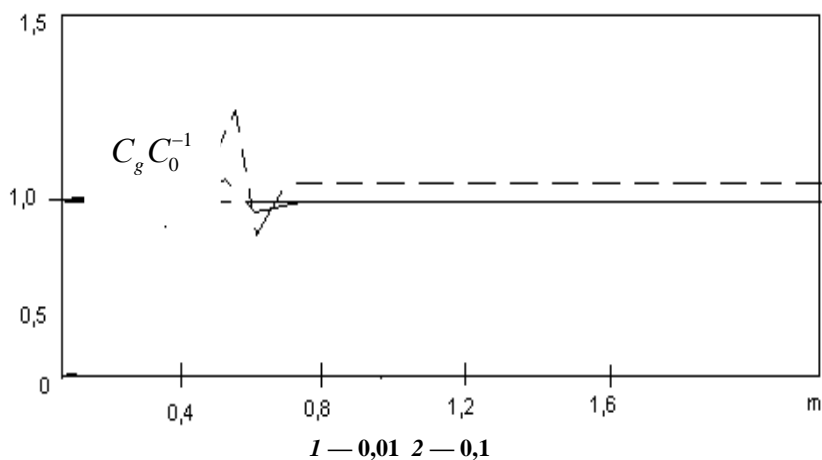


Рис. 3.13. Зависимость групповой скорости от длины волны и радиуса корреляции при R_0

На рисунке 3.14. представлена зависимость групповой скорости волны в зависимости от m .

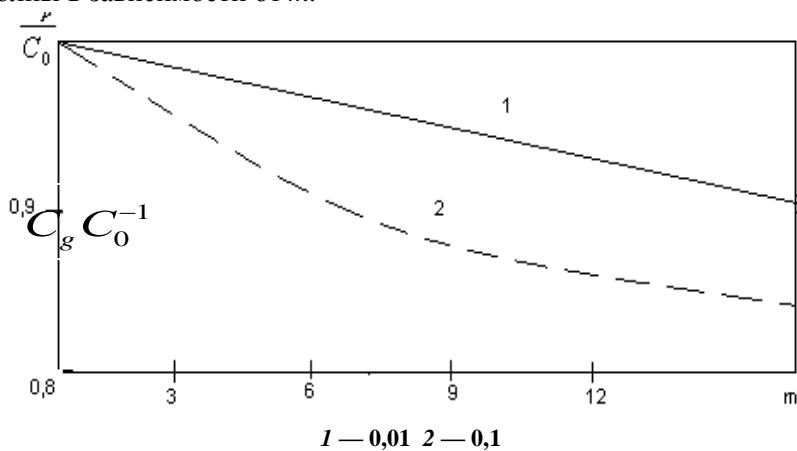


Рис. 3.14. Зависимость групповой скорости от длины волны и радиуса корреляции при R_0

Среда с периодической структурой описывается корреляционной функцией вида

$$R(\rho) = R_0 \cos(\beta\rho). \quad (3.102)$$

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$q^2 - m_1^2 + m_1^2 \left[-\frac{im_1 n}{4} \{ \delta(m_1 + 1 - q) + \delta(m_1 - 1 - x) \} + \frac{mn(m_1 + 1)((m_1 - 1)^2 - q^2) + (m_1 - 1)((m_1 + 1)^2 - q^2)}{((m_1 + 1)^2 - q^2)(m_1 - 1)^2 - q^2} \right], \quad (3.103)$$

$$m_1 = kd.$$

3.8 Некоторые обобщения

1. Рассмотрен аналитический метод нахождения вида ядер интегральных операторов, основанный на методе осреднения случайных полей напряжений и деформаций, который дает возможность учесть эффекты пространственной дисперсии, характерные для сред со структурой.

2. Установлено, что в моделях квазиконтинуума определяющие соотношения между напряжениями и деформациями, задаваемые интегральными операторами, имеют ядра, зависящие от пространственных координат подобно тому, как в теории упругих сред с памятью, ядра зависят от временной координаты. Ядро содержит информацию о механических свойствах среды, геометрии тела, распределении структурных элементов по объему в среднем. Аналогичным образом можно рассматривать переход к описанию микроструктур сред с помощью моделей квазиконтинуума. На практике это можно реализовать, заменяя дифференциальные операторы при упругих коэффициентах в уравнениях механики сплошной среды на интегральные операторы, ядра которых должны определяться как эффективные характеристики случайно неоднородной среды.

3. Получены формулы для расчета эффективных коэффициентов поликристаллических и аморфных сред в приближении локальной модели термоупругой микронеоднородной изотропной среды.

4. Разработаны механико-статистические подходы к вычислению оценок порога и вероятности перколяции для поликристаллических и аморфных материалов, что позволило вычислить оценку порога перколяции на основе марковской модели достижения границы.

5. Статистические модели, предложенные для расчета порога и вероятности образования кластера перколяции для процессов агрегации и диффузии, в реальных композитах дают результаты, практически совпадающие с результатами численного статистического моделирования (погрешность 2–3%) и экспериментальными данными.

ГЛАВА 4

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОГО И ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МИКРОКОМПОЗИТНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ И СФЕР

4.1 Термоупругое деформирование полого микрокомпозитного цилиндра конечной длины

Пусть микронеоднородный цилиндр длины L при $t < 0$ имеет температуру $T = T_0$. В момент времени $t = 0$ температура среды на внутренних и внешних поверхностях цилиндра меняется согласно заданным законам, но температурное поле остается осесимметричным. На торцах также происходит теплообмен со средой. Материальные коэффициенты среды: модули упругости $C_{ijke}(x, y, z)$, коэффициенты теплопроводности $\lambda_{ij}(x, y, z)$, теплового расширения $\alpha_{ij}(x, y, z)$, пластичности $Y(x, y, z)$ функции пространственных координат, масштаб изменения которых значительно меньше масштаба тела. Тогда можно считать, что тело в среднем является квазиоднородным, и это позволяет разделить решение задач на два этапа. На первом вычислить эффективные коэффициенты, что было рассмотрено в главе 3, на втором — решить граничную, начальную задачи для квазиоднородного квазиизотропного тела, геометрически эквивалентного исходному, с теми же граничными и начальными условиями и с материальными коэффициентами, равными эффективным. Оценка погрешности такого приближения зависит от параметра $\varepsilon = d_{micro} / d_{macro}$. Здесь d_{micro}, d_{macro} — характерные масштабы гранул и тела соответственно.

Условие $\varepsilon \ll 1$ обеспечивает заданную точность приближений. Однако, особенности геометрии тела могут существенно влиять на оценку погрешности приближения. Например, наличие выточек,

особенности изменения неоднородности создают концентрацию напряжений и могут давать результат с большой погрешностью. В цилиндрической системе координат r, ϕ, z для осесимметричной задачи $\sigma_{r\phi} = \sigma_{z\phi} = 0$ компоненты перемещений u — в радиальном, w — в осевом направлениях не зависят от ϕ (рисунок 4.1).

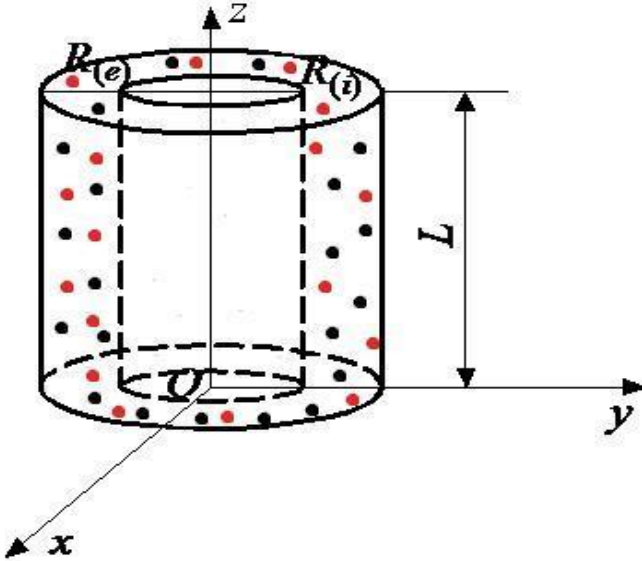


Рис. 4.1. Полый цилиндр конечной длины из микронеоднородного материала

Уравнения движения в цилиндрической системе координат имеют вид [5, 13, 14, 19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Соотношения Коши представляются в виде

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\
e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

Закон Дюамеля–Неймана в цилиндрической системе координат для цилиндра с эффективными термоупругими коэффициентами запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 2M^* e_{rr} + \Lambda^* e + \alpha^* T, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu^* e_{r\varphi}, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= 2M^* e_{\varphi\varphi} + \Lambda^* e + \alpha^* T, \quad \sigma_{rz} = 2\mu^* e_{rz}, \\
\sigma_{zz} &= 2M^* e_{zz} + \Lambda^* e + \alpha^* T, \quad \sigma_{\varphi z} = 2\mu^* e_{\varphi z},
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

где M^* , Λ^* — эффективные коэффициенты Ламе,

α^* — эффективный коэффициент теплового расширения.

Подставляя (4.3) в (4.1) с учетом (4.2), получим уравнения для перемещений u и w

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu^*} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\rho}{G^*} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2(1+\mu^*)}{1-2\mu^*} \frac{\partial(\alpha^* T)}{\partial r},$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\mu^*} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\rho}{G^*} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2(1+\mu^*)}{1-2\mu^*} \frac{\partial(\alpha^* T)}{\partial z},$$

где Δ — оператор Лапласа, записываемый в цилиндрической системе координат;

$G^* = M^*$ — эффективный модуль сдвига;

μ^* — эффективный коэффициент Пуассона.

Уравнение теплопроводности записывается в виде [5, 13, 30, 35]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T,
\tag{4.5}$$

где a^* — эффективный коэффициент теплопроводности.

Уравнение (4.5) решается при следующих условиях:
начальные условия

$$T = T_0 \text{ при } t = 0, \quad (4.6)$$

граничные условия

$$a_{11}T + a_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \theta_L(r, t) \text{ при } z = L; \quad (4.7)$$

$$b_{11}T + b_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \theta_0(r, t) \text{ при } z = 0; \quad (4.8)$$

$$c_{11}T + c_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_e(z, t) \text{ при } r = R_e; \quad (4.9)$$

$$d_{11}T + d_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_i(z, t) \text{ при } r = R_i. \quad (4.10)$$

Будем считать, что внешняя и внутренняя поверхности цилиндра свободны от силовых нагрузок.

Вначале рассмотрим определение температурного поля, для чего задачу (4.5)–(4.10) разобьем на две. Для упрощения в (4.6) положим $T_0 = 0$, а решение T будем искать в виде суммы

$$T = T_1 + T_2 \quad (4.11)$$

Для T_1 решаем уравнение (4.5), считая, что выполняются условия

$$a_{11}T + a_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = L; \quad (4.12)$$

$$b_{11}T + b_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0; \quad (4.13)$$

$$c_{11}T + c_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } r = R_e; \quad (4.14)$$

$$d_{11}T + d_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } r = R_i. \quad (4.15)$$

а для T_2 решаем уравнение (4.5), считая, что имеют место условия

$$a_{11}T + a_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = L \quad (4.16)$$

$$b_{11}T + b_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (4.17)$$

$$c_{11}T + c_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при } r = R_e; \quad (4.18)$$

$$d_{11}T + d_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при } r = R_i. \quad (4.19)$$

Определение $\tilde{T}_1(r, z, t)$

Преобразуем уравнение (4.5) по Лапласу по времени t , тогда для изображения Лапласа $\tilde{T}_1(r, z, s)$, при начальном условии $T_1 = 0$, получим уравнение

$$\Delta \tilde{T}_1(r, z, s) - \frac{s}{a} \tilde{T}_1 = 0, \quad (4.20)$$

где трансформанта Лапласа $\tilde{T}_1(r, z, s)$ вычисляется по формуле

$$\tilde{T}_1(r, z, s) = \int_0^{\infty} T_1(r, z, t) e^{-st} dt \quad (4.21)$$

Решение уравнения (4.20) получим методом разделения переменных и запишем в виде

$$T_1(r, z, s) = \int_0^{\infty} A(s, \lambda) J_0(\lambda, r) e^{-\gamma z} d\lambda, \quad \lambda = \sqrt{\gamma^2 + s/a}, \quad (4.22)$$

где $A(s, \lambda)$ — произвольная функция, которая должна быть определена из граничных условий.

В (4.22) γ заменим на $i\gamma$, λ на $i\lambda$, тогда $\tilde{T}_1(r, z, s)$ можно записать в виде

$$\tilde{T}_1 = [AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r)] [c_1 \cos \gamma z + c_2 \sin \gamma z]. \quad (4.23)$$

Здесь I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя; c_1, c_2 произвольные постоянные.

Подставляя (4.23) в (4.12) и (4.13), получим

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} [c_1 \cos \gamma L + c_2 \sin \gamma L] + a_{12}^{(1)} [-c_1 \sin \gamma L + c_2 \cos \gamma L] &= 0, \\ b_{11}^{(1)} [c_1] + b_{12}^{(1)} [c_2 \gamma] &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Система линейных алгебраических уравнений (4.24) относительно c_1, c_2 имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Вычисляя определитель системы (4.24), получаем

$$\operatorname{tg} \gamma l = \gamma \frac{a_{11}^{(1)} b_{12}^{(1)} - a_{12}^{(1)} b_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)} b_{11}^{(1)} + \gamma^2 a_{12}^{(1)} b_{12}^{(1)}}. \quad (4.25)$$

Счетное множество корней $\gamma_n (n=1, 2, \dots)$, трансцендентного уравнения (4.25) при заданных $a_{11}^{(1)}, a_{12}^{(1)}, b_{11}^{(1)}, b_{12}^{(1)}$ определяет собственные значения γ_n задачи Штурма–Лиувилля (4.12), (4.13).

Определяем соответствующие собственные функции задачи используя равенство нулю системы (4.24). Это означает, что c_1, c_2 — зависимые, что позволяет выразить c_2 через c_1 , которая остается произвольной. Задавая соответствующим образом эту постоянную, собственную функцию Z_n , соответствующую γ_n запишем в виде

$$\begin{aligned} Z(\gamma_n z) &= c_1 \cos \gamma_n z + c_2 \sin \gamma_n z, \\ c_1 &= \gamma_n a_{12}^{(1)} \cos \gamma_n L + a_{11}^{(1)} \sin \gamma_n L, \quad c_2 = \gamma_n a_{12}^{(1)} \sin \gamma_n L - a_{11}^{(1)} \cos \gamma_n L. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Собственные функции $Z(\gamma_n, z)$ образуют полную ортогональную систему, так как являются решениями краевой задачи Штурма–Лиувилля. Соответственно получим γ_n, z_n в (4.23) заменим A, B, λ на A_n, B_n и λ_n . Тогда общее решение \tilde{T}_1^* имеет вид (обозначение сохраним тоже самое)

$$\tilde{T}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)] Z(\gamma_n z); \quad \lambda_n = \sqrt{\gamma_n^2 + s/a}. \quad (4.27)$$

Произвольные постоянные A_n, B_n определяются из граничных условий (4.14), (4.15), для чего (4.14), (4.15) необходимо преобразовать по Лапласу, тогда получим изображения Лапласа $\tilde{\varphi}_{(e)}(z, s)$, $\tilde{\varphi}_{(i)}(z, s)$, которые представим в виде рядов по собственным функциям $Z(\gamma_n, z)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{(e)}(z, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(e)}(s) Z(\gamma_n z), \\ \tilde{\varphi}_{(i)}(z, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}(s) Z(\gamma_n z). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Выражения (4.14) и (4.15), преобразованные по Лапласу, запишем в виде

$$\begin{aligned} c_{11}^{(2)} \tilde{T}_1 + c_{12}^{(2)} \tilde{T}_1 &= \tilde{\varphi}_e(z, s), \\ d_{11}^{(2)} \tilde{T}_1 + d_{12}^{(2)} \tilde{T}_1 &= \tilde{\varphi}_i(z, s). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставим (4.27), (4.28) в (4.29) и приравняем коэффициенты при одинаковых $Z(\gamma_n, z)$, тогда получим систему уравнений относительно A_n, B_n

$$\begin{cases} A_n \left[c_{11}^{(1)} I_0(\lambda_n R_{(e)}) + \lambda_n c_{12}^{(1)} I_0'(\lambda_n R_{(e)}) \right] + \\ + B_n \left[c_{11}^{(1)} K_0(\lambda_n R_{(e)}) + \lambda_n c_{12}^{(1)} K_0'(\lambda_n R_{(e)}) \right] = c_n^{(e)}, \\ A_n \left[d_{11}^{(1)} I_0(\lambda_n R_{(i)}) + \lambda_n d_{12}^{(1)} I_0'(\lambda_n R_{(i)}) \right] + \\ + B_n \left[d_{11}^{(1)} K_0(\lambda_n R_{(i)}) + \lambda_n d_{12}^{(1)} K_0'(\lambda_n R_{(i)}) \right] = c_n^{(i)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Здесь $I'(x)$, $K'(x)$ – производные по x от $I(x)$, $K(x)$.

Система линейных алгебраических уравнений (4.30) позволяет найти A_n, B_n , так как $Z(\gamma_n, z)$ образуют ортогональную систему, то коэффициенты $c_{(n)}^e, c_{(n)}^i$ для заданных $\tilde{\varphi}_e(z, s)$, $\tilde{\varphi}_i(z, s)$ вычисляются по формулам

$$c_n^{(e)}(s) = \frac{1}{N_n} \int_0^L \tilde{\varphi}_{(e)}(z, s) Z(\gamma_n z) dz, \quad c_n^{(i)}(s) = \frac{1}{N_n} \int_0^L \tilde{\varphi}_{(i)}(z, s) Z(\gamma_n z) dz, \quad (4.31)$$

$$N_n = \int_0^L Z^2(\gamma_n z) dz.$$

Вычисление N_n с учетом (4.26) дает выражение

$$N_n = L \left\{ \frac{a_{11}^{(1)2} + \gamma_n^2 a_{12}^{(1)2}}{2} + \left[\left(\gamma_n^2 a_{12}^{(1)2} - a_{11}^{(1)2} \right) \cos \gamma_n L + 2\gamma_n a_{11}^{(1)} a_{12}^{(1)} \sin \gamma_n L \right] \frac{\sin \gamma_n L}{2\gamma_n L} \right\} \quad (4.32)$$

Таким образом, выражение для трансформанты Лапласа \tilde{T}_1 дается выражениями (4.27), (4.26), (4.30), (4.31).

Определение \tilde{T}_2

Решение для $T_2(r, z, s)$ позволяет оценить влияние граничных условий на торцах. Рассмотрим цилиндр, длина которого значительно больше его диаметра $D \ll L$, тогда в силу принципа Сен-Венана влияние температуры на торце существенно на расстоянии D от торца в силу симметрии задачи. Рассмотрим полубесконечный цилиндр $0 \leq z < \infty$, что позволяет оценить условие на одном торце $z = 0$, причем вместо условия (4.16) считаем, что температура на бесконечности должна быть конечной величиной. Представим образ Лапласа $\tilde{T}_2(r, z, s)$ в виде

$$\begin{aligned}\tilde{T}_2(r, z, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n z} U(\lambda_n r); \\ \gamma_n &= \sqrt{\lambda_n^2 + s/a}, \\ U(\lambda_n r) &= AJ_0(\lambda_n r) + BN_0(\lambda_n r),\end{aligned}\tag{4.33}$$

где J_0, N_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Подставим (4.33), в (4.18), (4.19), тогда получим систему уравнений для определения A и B :

$$\begin{aligned}A \left[c_{11}^{(2)} J_0(\lambda R_{(e)}) - \lambda c_{12}^{(2)} J_1(\lambda R_{(e)}) \right] + \\ + B \left[c_{11}^{(2)} N_0(\lambda R_{(e)}) - \lambda c_{12}^{(2)} N_1(\lambda R_{(e)}) \right] &= 0, \\ A \left[d_{11}^{(2)} J_0(\lambda R_{(i)}) - \lambda d_{12}^{(2)} J_1(\lambda R_{(i)}) \right] + \\ + B \left[d_{11}^{(2)} N_0(\lambda R_{(i)}) - \lambda d_{12}^{(2)} N_1(\lambda R_{(i)}) \right] &= 0.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Из условия равенства нулю определителя следует, что коэффициенты A и B не являются независимыми и пусть, например, B выражается через A из какого-либо из уравнений (4.34).

Рассмотрим условие удовлетворения найденного решения граничному условию (4.17). Для этого представим $\tilde{\theta}_i^*(r, s)$ в виде ряда по собственным функциям

$$\tilde{\theta}_i^*(r, s) = \sum_n h_n^0(s) U(\lambda_n r).\tag{4.35}$$

Коэффициенты разложения (4.35) вычисляются по формулам

$$h_n^0 = \frac{1}{N_n} \int_{R_i}^{R_e} r \tilde{\theta}_{(i)}^*(r, s) U(\lambda_n r) dr, \quad N_n = \int_{R_i}^{R_e} r U^2(\lambda_n r) dr.\tag{4.36}$$

Для нахождения коэффициентов A_n (4.33) подставим в условие (4.17), записанное для образов Лапласа и разложения (4.35), тогда получим

$$b_{11}^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n U(\lambda_n r) = b_{12}^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n U(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^0(s) U(\lambda_n r). \quad (4.37)$$

Приравнивая коэффициенты при $U(\lambda_n, r)$, находим

$$A_n = \frac{h_n^0}{b_{11}^{(2)} - \gamma_n b_{12}^{(2)}}. \quad (4.38)$$

Таким образом, $\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ найдена.

Определение напряжений

Для нахождения напряжений используем потенциал перемещений Φ , который для квазистатического случая $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ удовлетворяет уравнению [4.13]

$$\Delta \Phi = \frac{1 + \mu^*}{1 - \mu^*} \alpha^* T. \quad (4.39)$$

Дифференцируя (4.39) по t и заменяя $\partial T / \partial t$ из уравнения теплопроводности (4.5), получим

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1 + \mu^*}{1 - \mu^*} a^* \alpha^* \Delta T \quad (4.40)$$

Интегрируя (4.40) по t , находим [32, 13]

$$\Phi = \frac{1 + \mu^*}{1 - \mu^*} \alpha^* a^* \int_0^t T dt + \Phi_0 + t \Phi_1,$$

$$\Delta \Phi_1 = 0,$$

$$\Delta\Phi_1 = \frac{1 + \mu^*}{1 - \mu^*} \alpha^* T_0 \quad (4.41)$$

где Φ_1 — произвольная гармоническая функция;

$\Phi_0 = \Phi(t=0)$ — потенциал перемещений, соответствующий начальной температуре $T_0 = (x, y, z_0)$, причем $\Phi_0 = 0$ если $T_0 = 0$.

Преобразуя (4.41) по Лапласу, найдем $\tilde{\Phi}$, для которого выполняется условие существования $\lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{\Phi} = 0$ и имеет место зависимость

$$\tilde{\Phi} = \frac{1 + \mu^*}{1 - \mu^*} \frac{a^* \alpha^*}{s^2} (s\tilde{T} - T_\infty), T_\infty = \sin s\tilde{T} \quad (4.42)$$

где T_∞ является стационарной температурой, установившейся при $t \rightarrow \infty$. Так же имеет место $\Delta T_\infty = 0$.

Вычисление трансформант напряжений через функцию $\tilde{\Phi}$ проводим на основе формул [13, 14].

$$\tilde{\sigma}_{rr} = 2G^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} - \Delta \tilde{\Phi} \right), \tilde{\sigma}_{rz}^{(1)} = 2G^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r \partial z} \right), \quad (4.43)$$

$$\tilde{\sigma}_{\phi\phi} = 2G^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} - \Delta \tilde{\Phi} \right), \tilde{\sigma}_{zz} = 2G^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} - \Delta \tilde{\Phi} \right)$$

Подставляя $\tilde{\Phi}$ из (4.42), получим выражение для трансформант Лапласа $\sigma_{ij}^{(1)}(r, z, p)$ определяющих напряженное состояние в полном цилиндре из микрокомпозитного материала с эффективными коэффициентами, которые в общем случае имеют громоздкий вид. Выполняя обратное преобразование Лапласа, найдем напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}(r, z, t)$. В случае, когда силовые условия на боковых границах

цилиндра отсутствуют, должны выполняться условия $\sigma_{ij} n_j \Big|_{r=R_i, R_e}$.

Однако полученные радиальные и касательные напряжения на внешней и внутренней поверхности не равны нулю. Для выполнения этих условий требуется к полученному решению добавить фиктивное решение такой силовой задачи, что суммарные напряжения на границе удовлетворяют нулевым граничным условиям.

Согласно [13, 14] для нахождения поля напряжений в этом случае нужно использовать функцию Лява Z , а для нахождения трансформант напряжений $\sigma_{ij}^{(2)}$ надо использовать преобразование \tilde{Z} функции Z по Лапласу. В рассматриваемом случае трансформанта функции напряжений \tilde{Z} берется в виде

$$\tilde{Z} = \frac{1 - 2\mu^*}{2G^*} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_k}{j_k} I_0(j_k r) + \frac{F_k}{j_k} K_0(j_k r) + E_k r I_1(j_k r) + H_k r K_1(j_k r) \right] Z'(j_k z). \quad (4.44)$$

Непосредственно проверяется, что \tilde{Z} является бигармонической функцией $\Delta \Delta \tilde{Z} = 0$.

Постоянные D_k, F_k, E_k, H_k определяются из граничных условий

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} = -\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}, \tilde{\sigma}_{rz}^{(2)} = -\tilde{\sigma}_{rz}^{(1)} \text{ при } r = R_i, R_e. \quad (4.45)$$

На основе \tilde{Z} получают выражения для трансформант напряжений. Влияние граничных условий на торцах согласно принципу Сен-Венана должно сказываться вблизи $z = 0, L$ на расстояниях порядка $R_e - R_i = d$, поэтому на расстояниях, больших d торцов, напряженно деформированное состояние и температурное поле не будут зависеть от z .

4.2 Квазистационарное упругопластическое деформирование бесконечно длинного полого цилиндра с эффективными свойствами

Предположим, что цилиндр, рассмотренный в п. 4.1, неограничен по длине, тогда уравнения движения (4.1) и закон Дюамеля–Неймана (4.3) упрощаются, граничные условия задаются только на боковых поверхностях, а на торцах не учитываются. Будем предполагать, что задача осесимметричная, силовые нагрузки отсутствуют, а внешние и внутренние температурные поля постоянны вдоль цилиндра, тогда в любом сечении цилиндра реализуется двумерное напряженно-деформированное состояние.

Обозначим $r = R_e$ — наружный радиус, $r = R_i$ — внутренний радиус цилиндра.

В случае бесконечно длинного цилиндра и осесимметричной термонагрузки, не изменяющейся по длине, уравнение равновесия (4.50) будет

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 0. \quad (4.66)$$

Соотношения Коши формируются в виде

$$e_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}$$

и словие пластичности Треска запишем следующим образом [14]

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0^*. \quad (4.67)$$

Интегрируя (4.66) с учетом (4.67), получим

$$\sigma_{rr} = \sigma_0^* \ln \frac{r}{C_1^p}, \quad (4.68)$$

где $C_1^p(t)$ — постоянная интегрирования, в общем случае зависящая от времени как от параметра.

В соответствии с условием пластичности и ассоциированным законом течения выполняется соотношение

$$de_{rr}^p = -de_{\phi\phi}^p. \quad (4.69)$$

В стационарном случае распределение температуры по толщине трубы имеет вид

$$T = Q_1 + 2Q_2 \ln r; \quad Q_1 = \frac{T_1 \ln R_e}{\ln R_e - \ln R_i}, \quad Q_2 = \frac{-T_1}{2(\ln R_e - \ln R_i)}.$$

В случае граничных условий вида

$$T(r = R_i) = T_1, T(r = R_e) = 0 \quad (4.70)$$

получим

$$\int rT(r)dr = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)r^2 + Q_2 r^2 \ln r. \quad (4.71)$$

Рассмотрим вычисление термоупругих напряжений на основе соотношений Дюамеля–Неймана в виде

$$e_{rr} = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E^*} [\sigma_{rr} - \mu^* \sigma_{\phi\phi}] + \alpha^* T; \quad (4.72)$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{u}{r} = \frac{1}{E^*} [\sigma_{\phi\phi} - \mu^* \sigma_{rr}] + \alpha^* T_{.mm}$$

Подставляя $\sigma_{\phi\phi}$ из уравнений (4.56) и выражения для u , получим, что в упругой области уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d^2 \sigma_{rr}}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{E^* \alpha^*}{1 - \mu^*} \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0, \quad (4.73)$$

и его решение

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1}{r^2} - \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \ln r + C_2. \quad (4.74)$$

Условие пластичности (4.67), которое выполняется в пластической области, позволяет свести уравнение (4.50) к виду

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \sigma_0^* \quad (4.75)$$

Из соотношения (4.75) находим $r = \rho$ — границу между упругой и пластической областями, на которой определяем C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \rho^2 \quad (4.76)$$

Тогда в упругой зоне имеем

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 - \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \quad (4.77)$$

Очевидно, что при движении от границы $r = \rho$ вглубь упругой зоны должно выполняться условие $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} < \sigma_0^*$, что возможно, если величина $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr}$ убывает от значения σ_0^* при $r = \rho$. Это условие выполняется при возрастании r к внешней границе $r = R_e$.

Константу C_2 определим из условия на внешней границе $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_e$

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \ln r + C_2 = 0 \quad (4.78)$$

Из уравнения (4.78) получаем выражение для C_2 в виде

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \frac{\rho^2}{R_e^2} + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \ln R_e \quad (4.79)$$

Подставляя C_2 в (4.78), получим

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \frac{\rho^2}{R_e^2} + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \ln \frac{R_e}{r} \quad (4.80)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= (\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*}) (\frac{\rho}{r})^2 - \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*}; \\
C_2 &= \frac{E^* \alpha^* N}{1 - \mu^*} \ln R_e - C_1 \frac{1}{R_e^2}; \\
C_1 &= -\frac{1}{2} (\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* N}{1 - \mu^*}) \rho^2; \tag{4.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{E^* \alpha^* N}{1 - \mu^*} \ln R_e + \frac{1}{R_e^2} \frac{1}{2} (\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* N}{1 - \mu^*}) \rho^2; \\
r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= -\frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} + \frac{\rho^2}{r^2} (\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*});
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{фр}} = \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \left(\ln \frac{R_e}{r} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \rho^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_e^2} \right). \tag{4.82}$$

При $r = \rho$ имеем $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \sigma_0^*$, а при убывании r от ρ до R_e выражение $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr}$ убывает, если

$$\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} > 0. \tag{4.83}$$

Если $\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} = 0$, то везде в упругой зоне имеем соответствующее равенство. Тогда при достижении границы текучести в некоторой точке в поперечном сечении цилиндра возникает пластическое течение.

Условие (4.83) выполняется, если $Q_1 \geq 0$, что соответствует случаю $T \leq 0$ т.е. внутренняя поверхность цилиндра холоднее, чем наружная. В случае если, $T > 0$, то $Q_1 < 0$, но условие тем не менее

выполняется, если разность температур внутренней и внешней поверхностей не больше, чем

$$T_1 < 2(1 - \mu^*) \frac{\sigma_0^*}{2E^*} \ln \frac{R_e}{R_i}. \quad (4.84)$$

В пластической области выполняется условие

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \sigma_0^*, \quad (4.85)$$

из которого получаем, что (4.75) выполняется в области $R_i \leq r \leq \rho$. Постоянную интегрирования C_1^p определим из условия непрерывности σ_{rr} на упругопластической границе $r = \rho$. Приравнявая радиальные напряжения из (4.75) и (4.78), получим выражение для C_1^p , подставляя которое в (4.75), получим

$$\sigma_{rr} = \sigma_0^* \ln \frac{r}{\rho} + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \ln \frac{R_e}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \left(1 - \left(\frac{\rho}{R_e} \right)^2 \right). \quad (4.86)$$

На внутренней границе $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_i$, $R_i \leq r \leq \rho$ что дает уравнение для нахождения ρ :

$$\sigma_0^* \ln \frac{R_i}{\rho} + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \ln \frac{R_e}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \right) \left(1 - \left(\frac{\rho}{R_e} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.87)$$

Зона пластичности занимает область $R_i \leq r \leq \rho$, случай, когда $\rho = R_i$ соответствует ситуации, которой пластическая зона доходит до внутренней границы. При этом выполняются соответствующие неравенства

$$\sigma_0^* + \frac{E^* \alpha^* Q_1}{1 - \mu^*} \geq 0, \quad T_1 < 2(1 - \mu^*) \frac{\sigma_0^*}{2E^*} \ln \frac{R_e}{R_i}. \quad (4.88)$$

4.3 Моделирование пластического деформирования поллой микрокомпозитной сферы под действием резкого уменьшения температуры

В сферических координатах уравнения равновесия запишем в виде [3, 13, 14, 18–20]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (4.89)$$

В силу условия симметрии в сферических координатах два главных напряжения равны: $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$. Обозначим радиусы внешней и внутренней сфер соответственно R_2 и R_1 .

Граничные условия $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_2$, что соответствует внешней границе сферы, свободной от силовой нагрузки.

Материал сферы пластически деформируется, если напряжения удовлетворяют условию пластичности, которое возьмем в форме Мизеса

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = \sigma_p^*, \quad (4.90)$$

где σ_p^* — предел пластичности, не зависящий от температуры.

Подставляя (4.90) в (4.89) и интегрируя, получим

$$\sigma_{rr} = \pm 2\sigma_p^* \ln \frac{r}{c_1}, \quad (4.91)$$

где c_1 — произвольная постоянная, которая для квазистатического процесса зависит от времени: $c_1 = c_1(t)$.

Предположим, что материал несжимаем, что обычно выполняется для идеально пластического тела, тогда соотношения для связи σ – среднего напряжения и средней деформации e имеют вид

$$e = \frac{1 - 2\mu^*}{E^*} \sigma + \alpha^* (T - T_0), \quad (4.92)$$

где учитываем, что $e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$, $e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = u / r$.

Из (4.92) получим

$$3e = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 3\alpha^* (T - T_0). \quad (4.93)$$

Интегрируя (4.93) при граничном условии

$$u(r, t) = 0 \text{ при } r = R_1, \quad (4.94)$$

получим

$$u(r, t) = \alpha^* r \left[\langle T(r, t) \rangle - T_0 \left(1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right) \right], \quad (4.95)$$

где $\langle T(r, t) \rangle = \frac{3}{r^3} \int_{R_1}^r T(\xi, t) \xi^2 d\xi$ — средняя температура на интервале

$[R_1, r]$ сферы.

Из (4.95) следует, что радиальное перемещение для сферы из несжимаемого материала не зависит от напряженного состояния, а следовательно, от появления зон пластичности. Вычисляя деформации, соответствующие (4.95), получим

$$\begin{aligned} e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} &= \alpha^* \left[3T(r, t) - 2\langle T \rangle - T_0 - 2T_0 \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right]; \\ e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} &= \alpha^* \left[\langle T \rangle - T_0 \left(1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Напряжения вычислим на основании (4.96) по формулам

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G^* e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{rr} = 2G^* e_{rr}. \quad (4.97)$$

Подставим (4.97) в условия пластичности (4.90), тогда аналогично для эквивалентного напряжения σ_0^* получим

$$\begin{aligned}\sigma_0^* &= \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2G^*(e_{\varphi\varphi} - e_{rr}) = \\ &= 6G^* \alpha^* \left[\langle T_{(r,t)}^{(i)} \rangle - T_{(r,t)}^{(i)} - \frac{R_i^3}{r^3} \langle T_{(R_1,t)}^{(i)} \rangle \right],\end{aligned}\quad (4.98)$$

т. е. появление пластических зон полностью обуславливается величиной скачка температуры. В случае охлаждения сферы и постоянства температуры в полости сферы должны выполняться условия

$$\langle T_{(r,t)}^{(i)} \rangle - T_{(r,t)}^{(i)} \geq 0, \quad (4.99)$$

где изменение температуры подчиняется уравнению теплопроводности, которое в сферической системе координат имеет вид:

$$\frac{a^*}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4.100)$$

где a^* — эффективный коэффициент температурной проводимости;

λ^* — эффективный коэффициент теплопроводности;

c^* — эффективный коэффициент теплоемкости.

В рассматриваемом случае начальными и граничными условиями являются

$$T(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad \text{при } t=0,$$

$$T(R_2, t) = 0, T(R_1, t) = T_0. \quad (4.101)$$

Решение в полой сфере представим как разность решений для двух сфер радиусов R_2 и R_1 [5, 13, 14]:

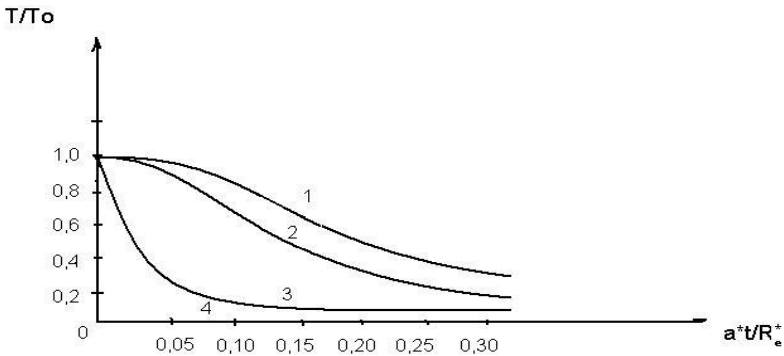
$$T(r,t) = \frac{2R_2 T_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi r n}{R_e} e^{-(\alpha^* n^2 \frac{\pi^2}{R_{(2)}^2})t} - \frac{2R_1 T_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi r n}{R_1} e^{-(\alpha^* n^2 \frac{\pi^2}{R_1^2})t} \quad (4.102)$$

При $t = 0$ получаем

$$\frac{2R_2}{\pi R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi R_{(1)}}{R_{(2)}} = 1, \quad \frac{2R_1}{\pi R_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi R_2}{R_1} = 0, \quad (4.103)$$

которые выполняются.

Зависимость температуры T/T_0 от $\alpha^* t/R_2^2$ изображена на рисунке 4.3.



$$1 - \frac{r}{R_2} = 0; \quad 2 - \frac{r}{R_2} = 0,2; \quad 3 - \frac{r}{R_2} = 0,95; \quad 4 - \frac{r}{R_2} = 1$$

Рис. 4.3. Зависимость температуры от времени на сферических поверхностях

В тех зонах, где наступает пластическое течение, выполняется условие

$$\sigma^* = \sigma_p^*. \quad (4.104)$$

Условием продолжающегося пластичного деформирования во времени будет неубывание σ^* , что соответствует условию $\frac{\partial}{\partial t} (\langle T_{(r,t)}^{(i)} \rangle - T_{(r,t)}^{(i)}) > 0$. При убывании σ^* наступает разгрузка, что соответствует условию $\frac{\partial}{\partial t} (\langle T_{(r,t)}^{(i)} \rangle - T_{(r,t)}^{(i)}) < 0$. Так как внешняя поверхность сферы свободна от силовых нагрузок, т. е. деформируется свободно, то вслед за достижением напряжениями $\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}$ значений, удовлетворяющих условию Мизеса, должна начаться разгрузка, которая движется от внешней поверхности внутрь вслед за пластической зоной.

Если в момент времени t на сферической поверхности $r = \rho_\gamma$, $R_1 < \rho_\gamma < R_2$ наступает пластичность и $\rho_\gamma(t)$ находится из условия взаимосвязи:

$$\langle T_{(\rho_\gamma,t)}^{(i)} \rangle - T_{(\rho_\gamma,t)}^{(i)} = \frac{\sigma_p^*}{6G^* \alpha^*}. \quad (4.105)$$

Обозначим $\tau(r)$ — момент времени, в который начинается разгрузка на поверхности сферы радиуса r .

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (\langle T_{(r,t)}^{(i)} \rangle - T_{(r,t)}^{(i)}) \right|_{t=\tau} = 0 \quad (4.106)$$

Условие (4.106) позволяет определить зависимость $\tau(r)$.

Максимальный скачок температуры в шаре имеет место в момент $t=0$ и он равен T_0 . Зависимость радиальных и окружных напряжений

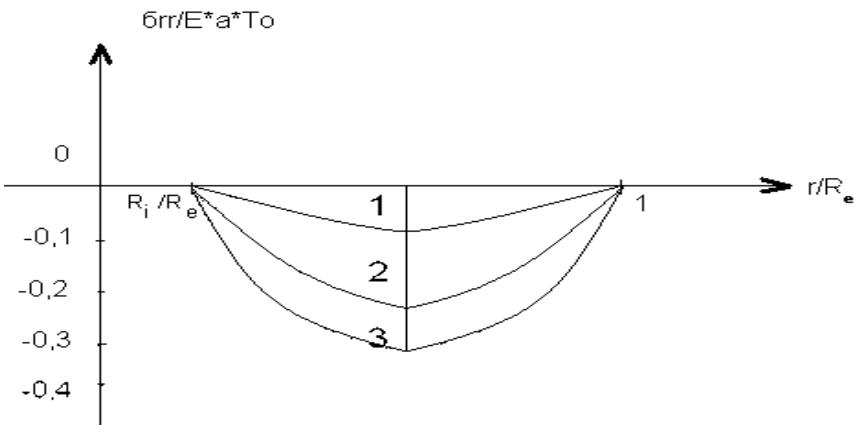
от $\frac{r}{R_2}$ вычисляется по формулам (4.96), (4.97), (4.102) и представлена на рисунках 4.4, 4.5 соответственно.

Используя условие пластичности, вычислим окружные остаточные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_p^*$:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \quad \text{при } r \geq \rho_\gamma; \quad (4.109a)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} - 6G^* \alpha^* \left\{ \langle T(r, \tau(r)) \rangle \right\} \quad \text{при } r \geq \rho_\gamma. \quad (4.109б)$$

После полного остывания внутренний сферический слой $R_i \leq r \leq \rho_\gamma^0$ будет находиться в состоянии всестороннего равномерного растяжения.



1 — $\Theta = 2$; 2 — $\Theta = 1$; 3 — $\Theta = 0,5$

Рис. 4.4. Зависимость радиальных напряжений от $\frac{r}{R_2}$ при значениях θ

Для достаточно больших t квазистатическое распределение напряжений приближается к статическому.

Вычисление остаточных напряжений проведем на основе уравнения равновесия (4.88) с учетом (4.89) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \sigma_p^* = 0.$$

и проинтегрируем его с учетом краевого условия равенства нулю радиального апряжения при $r = R_2$, тогда получаем

$$\sigma_{rr} = -2 \int_r^{R_2} \frac{\sigma_p^*(\xi, t)}{\xi} d\xi, \quad (4.107)$$

где напряжение $\sigma_p^*(r, t)$ берется из соотношений (4.89).

Так как при $t \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$, то радиальные остаточные напряжения запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= 12G^* \alpha^* \int_r^{R_1} \left\{ \langle T(\xi, \tau(\xi)) \rangle - T(\xi, \tau(\xi)) \right\} \frac{d\xi}{\xi} - 2\sigma_p^* \ln \frac{R_1}{r}; \\ \sigma_{rr}^{(0)} &= 12G^* \alpha^* \int_r^{R_2} \left\{ \langle T(\xi, \tau(\xi)) \rangle - T(\xi, \tau(\xi)) \right\} \frac{d\xi}{\xi} - 2\sigma_p^* \frac{R_2}{r} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Будем считать, что при этом предел текучести повторно не достигается.

Как было сказано выше, в момент времени $t = 0$ скачок температуры при $r = R_e$, равен T_0 . В этом случае из условия пластичности (4.89) следует $|\sigma_p|_{\max} = |\sigma_p^* - 6G^* \alpha^* T_2| = (1 - \chi) K^* = \frac{1 - \chi}{\chi} \sigma_p^*$.

Эта величина, в силу сделанного предположения, не должна превосходить значения предела текучести при сжатии $\sigma_p^{(-)}$. Как известно из экспериментальных данных [13, 14, 80] предел текучести при повышении температуры убывает, поэтому $\sigma_p^{(-)} > \sigma_p^*$. Если $\sigma_p^{(-)} = \sigma_p^*$, то условием отсутствия повторного пластического течения будет $1/2 \leq \chi < 1$. При $\chi > 1$ сфера остается в упругом состоянии и остаточные напряжения не возникают.

В формулах (4.108) обозначим

$$\int_{r/R_c}^1 \left(\frac{\langle T^{(i)} \rangle - T}{T_0} \right)_{\max} \frac{d\xi}{\xi} = \sigma_{(r)}^{(T)}.$$

В соответствии с формулами (4.108), (4.109) графики остаточных напряжений $1 - \sigma_{rr}^{(0)} / K^*$, $2 - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} / K^*$ представлены на рисунке 4.6.

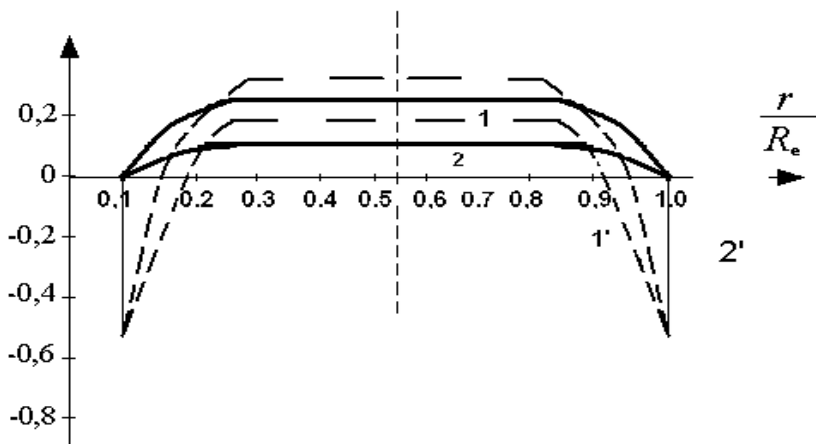


Рис. 4.5. Зависимости: $(1, 2' - \sigma_{rr}^{(0)})$ от r / R_2 и $(1, 2' - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)})$ от r / R_2 при $R_1 / R_2 = 0,1, 0,5$

Из рисунка 4.6 следует, что радиальные (кривые 1, 1') остаточные напряжения почти по всему сферическому слою остаются постоянными, обращаясь в нуль на внешних поверхностях. Окружные остаточные напряжения почти равны (кривые 2, 2') при $C = 0,4$ радиальным в большей части внутреннего сферического слоя, а вблизи свободной внешней поверхности напряжения убывают до нуля и меняют знак на противоположный и на свободной границе достигают

предельных значений. Таким образом, если в результате каких-либо чрезвычайных ситуаций, когда происходит резкое падение температуры на внешней поверхности сферы до нуля и далее, этот режим поддерживается до полного остывания сферы, причем считается, что температура на внутренней поверхности также убывает, в сфере возникают остаточные напряжения, которые необходимо учитывать при повторных температурных или силовых ее нагружениях.

4.4. Общие замечания по определению НДС

1. Рассмотрены и определены условия применения квазистатического приближения двумерной термоупругой модели эффективной микронеоднородной среды для решения задачи о распределении температуры, напряжений и деформаций в цилиндре, длина которого значительно больше его толщины, а масштаб микроструктуры значительно меньше толщины цилиндра. Оценена возможность пренебрегать упругими волновыми эффектами по сравнению с эффектами пластического течения при условии $\dot{\epsilon}^p \ll V^e$, где $\dot{\epsilon}^p$ — скорость пластического течения, V^e — скорость упругих волн.

2. Получены распределения полей температуры, напряжений, деформаций в цилиндре, толщина которого значительно меньше его длины в результате резкого падения температуры на внешней границе, свободной от силовых нагрузок.

3. Получены распределения полей радиальных и окружных напряжений и деформаций в полой микрокомпозитной сфере под действием резкого падения температуры на внешней границе, при этом температурное поле обладает центральной симметрией. Определены границы упругой и пластической зон, остаточных напряжений, а также условия, при которых в сфере могут реализовываться упругие, пластические, упругопластические состояния.

ГЛАВА 5

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ И РАДИАЦИОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ

Многочисленные данные опытов [113-125,129-132,134-141 и др.] показывают, что под действием радиоактивных облучений наблюдается существенное изменение как теплофизических и упругих свойств, так и кратковременных и длительных механических характеристик материалов. Причем эти изменения в большинстве своем стойкие и сохраняются в течение длительного времени. Следует заметить, что на последствия радиоактивного воздействия также значительно влияет и температура облучения. В связи с этим рассматривать процесс деформирования в условиях облучения необходимо совместно с действием неоднородного температурного поля, что будет достаточно приближено к физической реальности протекающих процессов. Также наиболее характерными явлениями, протекающими в конструкционных и делящихся материалах при высокоэнергетическом облучении, являются распухание (РР) и радиационная ползучесть (РП).

Таким образом, существует четыре основные особенности физического и механического поведения твердых тел в условиях терморadiационного воздействия: изменение теплофизических характеристик и упругих постоянных, модификация кратковременных и длительных механических свойств материалов, РР и РП. Учитывая, что эти явления представляют определенный научный и практический интерес, необходимо проанализировать достигнутые результаты, чтобы в полной мере использовать накопленный опыт. В настоящей главе представлен анализ моделей деформирования материалов в условиях облучения, причем основное внимание уделено обобщению и систематизации данных по деформированию и изменению их свойств, что должно помочь в дальнейшем правильно ориентироваться в направлении построения эффективных расчетных методов.

5.1 Влияние терморadiационного воздействия на физико-механические свойства твердых тел

В данном разделе рассматриваются первые две из перечисленных выше особенностей физико-механического поведения материалов при облучении совместно с термическим воздействием. Модели радиационного набухания и радиационной ползучести будут рассмотрены отдельно в последующих разделах. Подчеркнем, что, по мнению Ю.Н. Работнова, именно физические соображения подсказывают выбор наиболее адекватной механической модели, а также позволяют судить о применимости определяющих уравнений. Так, в случае, когда физический механизм деформирования меняется (например, вследствие изменения вида нагружения), стоит ожидать, что и определяющие уравнения модели перестанут быть справедливыми. Поэтому, не вдаваясь в излишние подробности, рассмотрим основные процессы, связанные с действиями высокоэнергетических облучений на свойства материала.

Механизму воздействия проникающих облучений на сплошные тела посвящены многочисленные работы физиков-теоретиков, например [146,147]. Для объяснения влияния радиоактивного облучения на структуру материала проводится большое число различных механических испытаний с помощью широко распространенных пассивных и активных испытательных машин. Перед испытанием образцы обычно облучают радиоактивным потоком с известным энергетическим спектром в течение фиксированного промежутка времени. Влияние же больших доз (при длительном времени облучения) может быть определено, например, с помощью образцов, изготовленных из конструктивных элементов активной зоны ядерного реактора. Если оставить в стороне проблемы, связанные с безопасностью работ, то можно сказать, что такие испытания в настоящее время являются достаточно хорошо отработанными, но в то же время чрезвычайно дорогими. Здесь следует подчеркнуть, что хотя

данные об особенностях деформирования материалов при облучении имеются в большом количестве, анализ их с точки зрения указанных выше четырех направлений, к сожалению, мало освещается в литературе (можно лишь упомянуть монографии Ю.И. Лихачева, А.А. Тутнова, Л.М. Забудько, Д.Р. Оландера).

Принято считать, что при прохождении излучения высокой энергии через сплошную среду в ней проходят следующие процессы: образование смещенных электронов или ионизация, которая, впрочем, быстро нейтрализуется электронами проводимости; возникновение атомов, смещенных со своих мест в кристаллической решетке вследствие упругих столкновений; возбуждение атомов без смещений; появление локальных областей с повышенной температурой; образование реакций деления, при которых выделяется энергия и образуются новые химические элементы. Исследователями [86,90,91,129-132,134-139,140,141,148-153 и др.] установлено, что материалы, которые подвергаются облучению, меняют свои свойства и структуру. По мере увеличения дозы облучения такие изменения уже становятся необратимыми. Заметим, что радиационное нарушение структуры облучаемого материала связано, в первую очередь, с возникновением и развитием радиационных дефектов, физическая природа которых мало чем отличается от обычных дефектов структуры, ответственных за стабильность материала. При длительном воздействии облучения в материале происходит накопление таких повреждений.

5.1.1 Теплофизические характеристики материалов при термо-радиационном воздействии

В отличие от теплового и механического воздействия (например, нагрев до высоких температур или пластическое деформирование соответственно) при облучении твердого тела в каждый момент образуется практически одинаковое неравновесное количество межузельных атомов и вакансий. В дальнейшем с увеличением их концентрации уже

формируются линейные и объемные дефекты радиационного происхождения: дислокационные петли и микропоры. Многие дефекты, вызванные облучением, могут быть сняты путем отжига, и в этом отношении они аналогичны влиянию механического упрочнения или некоторым металлургическим дефектам. Температура, служащая мерой беспорядочных движений, приводит к возврату смещенных атомов в первоначальное положение, то есть тепловое движение непосредственно влияет на процессы смещений, вызванных, например, нейтронным воздействием. Воздействие других заряженных частиц по существу аналогично воздействию нейтронов, за исключением глубины проникновения и поражающей способности, так как нейтрон, не имея электрического заряда, свободно проходит через любую сплошную среду и взаимодействует с ядром.

В целом теплофизические характеристики материала весьма слабо воспринимают структурные изменения и их условно называют структурно-нечувствительными. Однако облучение большими флюенсами нейтронов приводит к столь значительным структурным перестройкам материала, что теплофизические свойства вынуждены реагировать на многочисленные повреждения. Таким образом, основные теплофизические постоянные конструкционных и делящихся материалов (коэффициент теплопроводности, коэффициент линейного термического расширения, удельная теплоемкость) в теории должны сильно зависеть от температуры и структурного состояния материала. Но на практике радиационное облучение не приводит к существенным изменениям указанных характеристик, и они, как правило, определяются экспериментально по эмпирическим зависимостям от значений температуры. Это объясняется тем, что возникающие при облучении дефекты кристаллической решетки оказывают главным образом влияние на проводимость решетки и сравнительно мало влияют на общую проводимость, обусловленную электронной подсистемой, так как радиационные дефекты играют относительно большую роль при рассеянии фонов (волн решетки), чем электронов. Поэтому в результате облучения теплофизические изменения

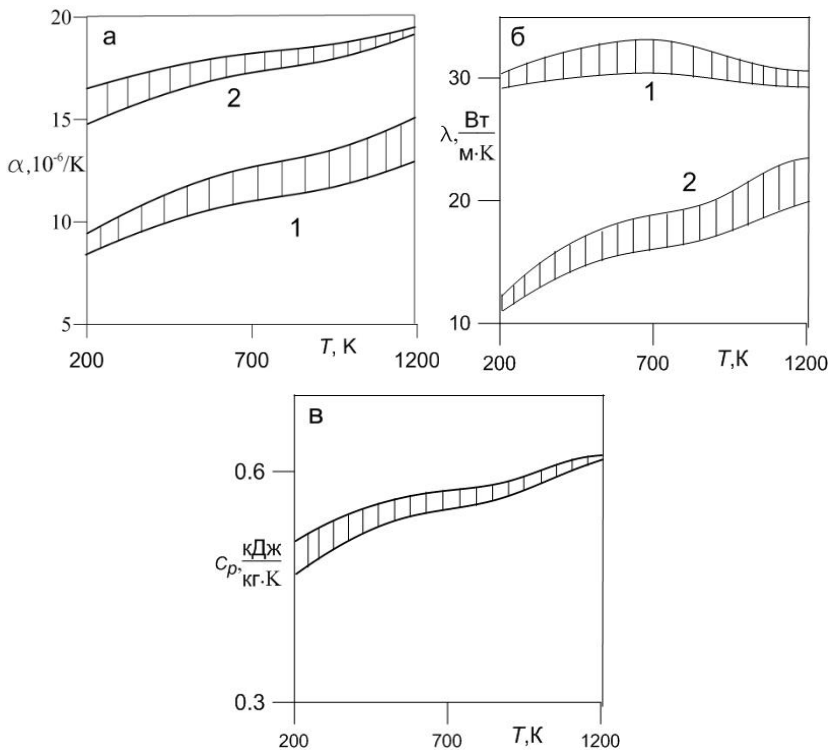
должны быть велики только для тех материалов, у которых электроны вносят малый вклад в теплопроводность. К таким материалам относятся в основном изоляторы, полупроводники и сверхпроводники. Благодаря этому, изменения теплофизических характеристик большинства металлических конструкционных и делящихся материалов даже при интенсивном радиационном воздействии незначительны. Как правило, с ростом флюенса нейтронов их значения снижаются, причем наиболее сильно этот эффект проявляется при низких температурах. Однако такое уменьшение не играет существенной роли при расчетах на фоне значительного изменения весьма структурно-чувствительных механических и прочностных характеристик материалов. В то же время теплопроводность конструкционных материалов на основе графита и окиси бериллия уменьшается более чем в 10 раз при облучении [153].

Рассмотрим общие закономерности изменения теплофизических характеристик для основных конструкционных и делящихся материалов в зависимости от температуры нагрева. На рис. 5.1 представлены обобщенные графические зависимости теплофизических свойств конструкционных сталей различного класса от диапазона действующих на них температур.

Как видно, стали ферритного и мартенситного классов (ОЦК решетка) в целом имеют более благоприятное сочетание теплофизических свойств, чем аустенитные стали (ГЦК решетка), что приводит в дальнейшем, при их эксплуатации, к меньшим градиентам температур и, как следствие, в 1.5-3 раза меньшим термическим напряжениям [140].

Для основных видов делящихся (топливных) материалов теплофизические свойства, как правило, задаются эмпирическими и полуэмпирическими зависимостями [132-134,138,139,148,152]. Так, коэффициент термического расширения для оксидного топлива UO_2 в интервале температур от 700 до 2300 К обычно аппроксимируется следующим соотношением:

$$\alpha(T) = 8 \cdot 10^{-6} + 2.6 \cdot 10^{-9}T, \quad 1/K. \quad (5.1)$$



1 – мартенситные и ферритные стали; 2 – аустенитные стали

Рис. 5.1. Температурная зависимость коэффициента термического расширения (а), теплопроводности (б) и теплоемкости (в) металлических конструкционных материалов[148]

Для делящегося материала на основе плутония, например, PuO_2 коэффициент термического расширения (в интервале температур от 700 до 1300 градусов по шкале Кельвина) задается выражением

$$\alpha(T) = 7 \cdot 10^{-6} + 4.2 \cdot 10^{-9} T, \quad 1/K. \quad (5.2)$$

Зависимость теплоемкости диоксида урана обычно рассчитывается по формуле

$$C_p(T) = 0.2973 + 25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 T^{-2}, \quad (5.3)$$

где T – абсолютная температура, K .

Как правило, оксидное топливо обладает низкой теплопроводностью, которая зависит от ряда факторов и в значительной степени определяется пористостью, стехиометрией и химическим составом. Заметим, что сложность оценки совокупного влияния всех перечисленных факторов и отсутствие единого методического подхода приводят к существенному различию значений (вплоть до 30-50%) теплопроводности делящегося материала, измеренной отдельными исследователями. Для теплопроводности UO_2 в интервале температур от 100 до 2800°C (при плотности 95%) различными авторами рекомендуется следующее соотношение

$$\lambda(T) = \frac{100}{11.8 + 0.0238 \cdot T} + 0.8775 \cdot 10^{-11} T^3, \quad (5.4)$$

где T – абсолютная температура, K .

Заметим, что при температуре около 500°C теплопроводность облученного и необлученного UO_2 почти одинакова. Для облучаемого диоксида урана при температуре от 200 до 2800 °C экспериментально получено следующее усредненное соотношение [138]:

$$\lambda(T) = \frac{5500}{560 + T} + 0.942 \cdot 10^{-10} T^3, \quad (5.5)$$

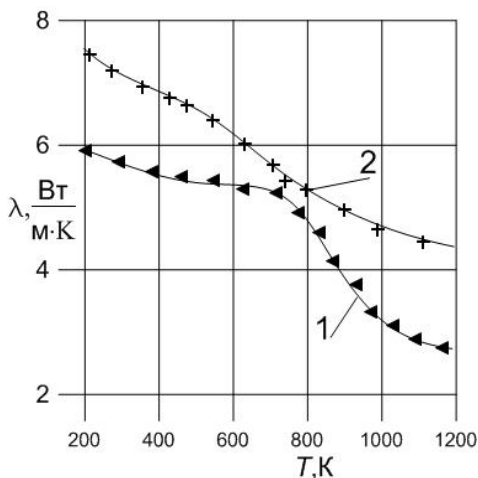
T – абсолютная температура, K .

Экспериментальные зависимости теплопроводности делящегося материала (керамического топлива) от температуры в исходном и облученном состоянии приведены на рис. 5.2.

Влияние пористости в интервале от 5 до 10% на общую теплопроводность делящегося материала на основе двуокиси урана описывается уравнением

$$\lambda_1 = \lambda_2 \left(1 - \beta \frac{P_2 - P_1}{P_2} \right), \quad (5.6)$$

где λ_1 и λ_2 – значения коэффициентов теплопроводности при пористости P_1 и P_2 ; $\beta = 2.5$.



1 – материал без облучения; 2 – облученный материал
Рис. 5.2. Зависимость теплопроводности двуоксида урана от температуры [138, 141]

В зависимости от химического состава теплопроводность UO_2 изменяется по эмпирическому закону

$$\lambda(T, x) = \left(0.037 + 1.67x + 2.37 \cdot 10^{-4} T\right)^{-1} + 78.9 \cdot 10^{-12} \cdot T^3, \quad (5.7)$$

где x – отклонение от стехиометрии; T – абсолютная температура, К.

Теплопроводность смешанных видов топлив незначительно отличается от теплопроводности приведенных выше основных оксидных. Так, например, для композиции UO_2 -20% PuO_2 коэффициент теплопроводности равен:

$$\lambda(T, x) = \left(0.037 + 3.33x + 2.37 \cdot 10^{-4} T\right)^{-1} + 78.9 \cdot 10^{-12} \cdot T^3, \quad (5.8)$$

где температурное поле (T) задается в градусах Кельвина.

5.1.2 Изменение упругих свойств в результате нагрева и облучения

Известно, что модуль сдвига реального кристалла (на макроуровне) зависит от плотности дислокаций и средней длины свободного, закрепленного только на концах дислокационного отрезка. Отсюда можно предположить основные причины изменения модуля сдвига материала: или через плотность дислокаций, или за счет изменения средней длины их линий между точками закрепления. Образующиеся при облучении радиационные точечные дефекты (междоузельные атомы и вакансии) уходят на дислокационные линии, образуют там ступеньки, так на дислокационной линии появляются новые точки закрепления [90,146,147]. Средняя длина незакрепленных участков линии дислокации становится короче, и эффективный модуль сдвига растет. Таким образом, при облучении, как правило, должно наблюдаться изменение модуля сдвига материала в зависимости от нарастания флюенса нейтронов. Модуль упругости изменяется непосредственно вследствие изменения числа межатомных связей при помощи влияния дефектов на движения дислокаций. Однако, следует подчеркнуть, что для большинства конструкционных материалов рабочая температура такова, что концентрация изолированных точечных дефектов, «выживающих» в условиях теплового и радиационного отжига, незначительна и изменение модуля Юнга составляет доли процентов (за исключением графита для которого характерно значительное увеличение в 2-3 раза [104]). Необходимо отметить, что в экстремальных условиях нагружения, характерных, например, для ядерного реактора, где имеются области повышенных температур, эффекты облучения и отжига действуют одновременно и взаимно компенсируются. В то же время, иногда даже высокотемпературная термическая обработка оказывается недостаточной, чтобы полностью восстановить физико-механические свойства материала до облучения.

Экспериментальные данные по изменению модуля Юнга меди от флюенса легких высокоэнергетических частиц с энергией свыше 1 МэВ при комнатной температуре приведены на рис. 5.3 и 5.4.

Как видно из рис. 2.3, увеличение модуля Юнга при дозе облучения около 10^{23} электрон/ м^2 составило менее 1.7%. Такое изменение по своей абсолютной величине сравнимо с погрешностью эксперимента. Иллюстрацией влияния облучения тяжелыми высокоэнергетическими частицами на упругие свойства чистой меди является рис. 5.4, на котором показано быстрое повышение модуля упругости за первые 400 часов облучения потоком нейтронов со средней энергией более 0.1 МэВ. При последующем облучении после суммарного флюенса порядка 10^{22} нейтрон/ м^2 наступает медленное падение модуля упругости, которое связано с насыщением дислокационного механизма. Как показали дальнейшие экспериментальные исследования, повышение дозы облучения сопровождается объединением радиационных дефектов в комплексы, что и приводит со временем к насыщению дозной зависимости модуля Юнга.

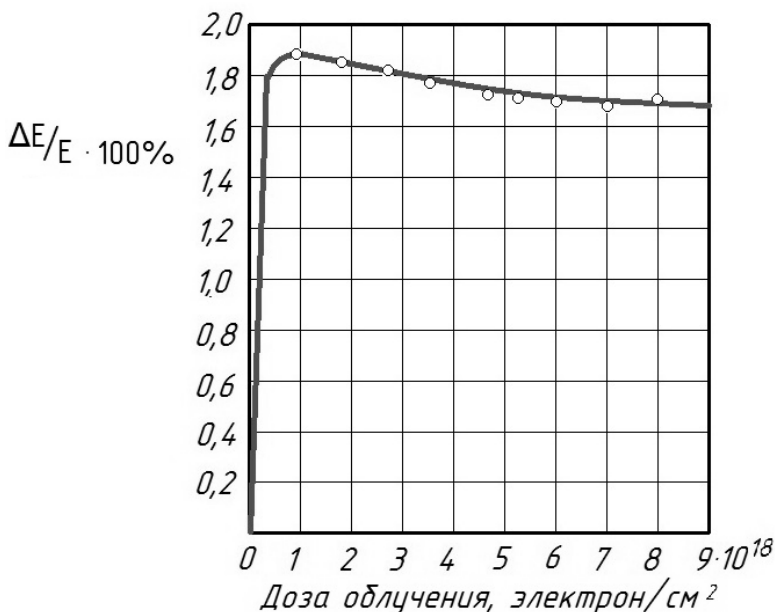


Рис. 5.3. Зависимость модуля Юнга меди от дозы облучения электронами при температуре 293 К [130, 151]

Таким образом, данные различных исследователей [86,90,94,95, 98,129-132,134,140,141,148-151,154] показывают, что нейтронное облучение не приводит к существенным изменениям характеристик упругости конструкционных материалов и ими можно во многих случаях пренебрегать при квазистатических расчетах. Это позволяет использовать величины упругих постоянных (E, G, μ) независимо от значения флюенса нейтронов ($\int \phi dt$).

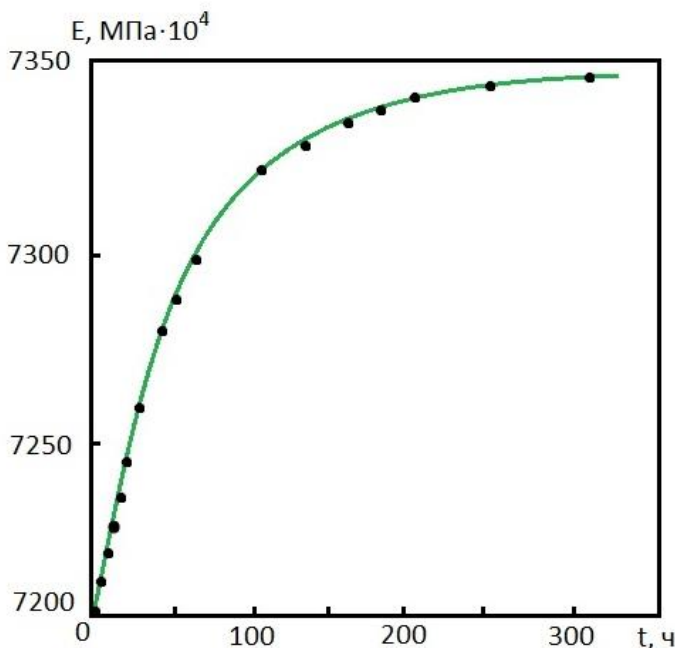


Рис. 5.4. Зависимость модуля Юнга меди от времени облучения ($\phi = 2.5 \cdot 10^{20}$ нейтрон/ $\text{м}^2 \cdot \text{ч}$, $\bar{E} > 0.1$ МэВ) [169]

Температурные зависимости модуля упругости и коэффициента Пуассона для основных конструкционных материалов (сталей) хорошо известны, и их можно найти в различной справочной и нормативной литературе (например, [140]). В основном значения упругих

постоянных, установленных на основе экспериментальных данных, описываются линейными зависимостями вида

$$E(T) = 2.25 \cdot 10^5 - 75T; \quad (5.9)$$

$$\mu(T) = 0.27 + 5 \cdot 10^{-5}T, \quad (5.10)$$

где T – температура, К.

Рассмотренные представления о физическом механизме изменения упругих характеристик при радиоактивном облучении в определенной мере справедливы и приемлемы для делящихся (топливных) материалов, константы которых также зависят от температуры и характера распределения радиационных дефектов. Так, модуль упругости диоксида урана на практике часто задается соотношением [148]

$$E(T) = (1 - 2.6P)(22.4 \cdot 10^4 - 31.19T), \quad (5.11)$$

где P – средняя пористость делящегося материала; T – температура, К.

Коэффициент Пуассона делящегося материала является слабой функцией пористости и практически не зависит от температуры (до 1500°C). Типичное его значение для диоксида урана – 0.316. Зависимость модуля Юнга смешанного оксидного топлива, например, $UO_2 - 20\% PuO_2$ имеет вид

$$E(T) = 25.5 \cdot 10^4 - 20T, \quad (5.12)$$

где T – температура, К. В то же время при нормальной температуре модуль упругости, как правило, изменяется с пористостью указанного топливного материала по закону

$$E(P) = E(1 - 2P), \quad (5.13)$$

где P – пористость, E – начальное значение модуля упругости.

По-видимому, все указанные закономерности (5.11)-(5.13) сохраняются для некоторого температурного интервала.

5.1.3 Кратковременные и длительные механические свойства при интенсивном терморadiационном воздействии

Описанные выше механизмы воздействия нейтронного облучения на кристаллическую структуру дают основания ожидать его особенно сильного влияния на механические свойства материалов. Более чем 50-летний период интенсивных экспериментальных исследований привел к основному выводу, что общим для всех металлических материалов является смещение диаграммы растяжения/сжатия вверх при увеличении дозы облучения. Доказано, что облучение приводит не только к возрастанию условного предела текучести, но даже может привести к существенному изменению вида и параметров кривой деформирования. В тоже время металлы, облученные и испытанные при высокой температуре, не обнаруживали какого-либо возрастания предела текучести: имело место только некоторое снижение пластичности. Причем эффект упрочнения полностью исчезал, когда температура испытания превышала $0.5T_m$ (T_m – абсолютная температура плавления). Это говорит о том, что механические свойства облученных конструкционных материалов в значительной степени зависят от температуры облучения, которая должна быть обязательно введена как дополнительный параметр. Таким образом, эффект упрочнения при облучении значительно зависит не только от флюенса, но и от температуры облучения. Облучение нейтронами конструкционных и делящихся материалов в целом приводит к радиационному упрочнению, росту пределов текучести и прочности, сопровождается значительным охрупчиванием: уменьшением пластичности, ударной вязкости и смещением порога хладноломкости в сторону высокой температуры.

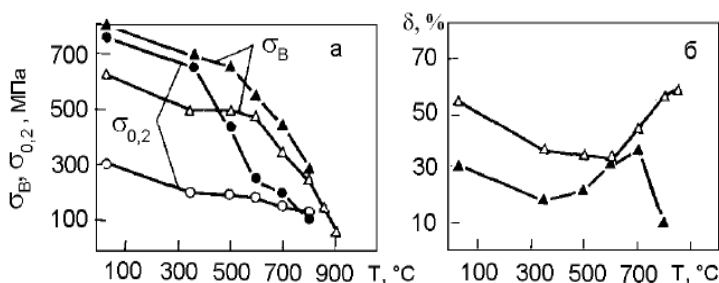
Под радиационным упрочнением обычно подразумевают возрастание предела текучести и предела прочности в зависимости от флюенса быстрых нейтронов и температуры. Радиационное упрочнение материала всегда сопровождается снижением пластичности, которое может достигать 10 и более раз. Заметим, что этот вопрос уже более 40 лет дискутируется в научно-исследовательских кругах, но до сих пор природа и

механизм радиационного упрочнения остается не до конца ясными. Как правило, этот необратимый процесс объясняется несколькими физическими теориями, основными из которых можно выделить следующие три. В первой предполагается, что при увеличении дозы облучения происходит рост так называемого “источникового” упрочнения, связанного с затруднением генерации дислокаций в облученном материале. В свою очередь, основным механизмом источникового упрочнения является взаимодействие мельчайших дислокационных межузельных петель с дислокациями [114]. По второй теории считается, что создаваемые при облучении радиационные дефекты являются дополнительными центрами закрепления дислокаций, что вызывает дополнительные напряжения, необходимые для их отрыва и приведения в движение, а также снижает эффективность действия источников. В третьей теории предполагается, что механизм процесса радиационного упрочнения заключается в возрастании напряжения, необходимого для активизации движения дислокаций в плоскости ее скольжения. Такое движение затрудняется присутствием изначально имевшихся препятствий, лежащих в плоскости скольжения и вблизи нее (случай упрочнения трением). Но так как в облученном металле уже имеется так много препятствий для движения дислокаций, что их дополнительное влияние на упрочнение лишь незначительно увеличивает напряжение трения, и дефекты, образующиеся при облучении, препятствуют движению дислокаций более эффективно.

Следует отметить, что в последнее время исследователи приходят к выводу, что, скорее всего, характерно совместное влияние всех трех возможных вышеописанных механизмов радиационного упрочнения с определенной вероятностью доминирования каждого из них при конкретных условиях радиационного и высокотемпературного воздействия. Высокие температуры действуют как фактор, удаляющий повреждения. В процессе радиационного воздействия образование дефектов и их термический отжиг, вообще говоря, происходят одновременно. Если классифицировать эффекты повреждения структуры по интервалам радиоактивных потоков в зависимости от температур, то при низких флюенсах

(менее 10^{21} нейтрон/см²) радиационных повреждений образуется незначительное количество, а упрочнение уменьшается с ростом температуры. При температурах больше половины температуры плавления радиационные дефекты отжигаются при облучении настолько быстро, что никакого упрочнения при испытании на растяжение не наблюдается, а кривая напряжение-деформация совпадает с такой же кривой для необлученного материала. При высоких флюенсах быстрых нейтронов (флюенс более 10^{21} нейтрон/см²) дислокационные петли и полости увеличиваются до больших размеров. Для отжига таких больших дефектов даже при повышенной температуре испытаний требуется значительное время, поэтому их влияние на механические свойства сохраняется до более высоких температур, а эффект упрочнения исчезает только при температуре превышающей $0.5T_m$. В то же время экспериментально замечено, что радиационное охрупчивание при облучении нейтронным потоком наблюдается также в некоторых случаях при температурах свыше $0.5T_m$. Это явление получило название высокотемпературное радиационное охрупчивание (ВТРО). Эффект ВТРО состоит в том, что вследствие нейтронного облучения при температуре более $0.5T_m$ увеличивается склонность этих материалов к межкристаллитному разрушению. Такое охрупчивание не снимается отжигом при повышенных температурах и его количественные характеристики увеличивается с ростом флюенса нейтронов. Характерным является, что разрушение облученных образцов происходит в основном по границам зерен (хрупкое разрушение) и наблюдается для всех поликристаллических материалов. Если судить по имеющимся данным, то в настоящее время нет единой гипотезы для объяснения ВТРО. Так, первоначально считалось, что степень охрупчивания увеличивается с ростом содержания бора, другие исследователи связывают эффект ВТРО с наличием гелия в материале, также имеет место «пузырьковая модель», теория образования и развития клиновидных трещин, теория сегрегации различных примесей по границам зерен и другие модели. При облучении в интервале температур до $0.45T_m$, как правило, наблюдается отсутствие

пластичности при разрушении. Такое охрупчивание при низких температурах получило название низкотемпературное радиационное охрупчивание (НТРО). Оно характерно для большинства материалов с ОЦК решеткой, в частности для сталей ферритного, мартенситного и ферритно-мартенситного классов, а также пластичным материалам с ГЦК решеткой, не имеющих хрупко-вязкого перехода. В отличие от ВТРО эффект НТРО устраняется послерадиационным отжигом. На рис. 5 приведен наиболее типичный случай температурной зависимости основных механических характеристик облученных металлических материалов на примере аустенитной стали 0X16H15M3Б [150].



Необлученные образцы – светлые символы, облученные – темные

Рис. 5.5. Температурная зависимость предела прочности, предела текучести (а) и относительного удлинения (б) стали 0X16H15M3Б, облученной нейтронами до флюенса 10^{22} нейтрон/см² ($E > 0.1$ МэВ) [165]

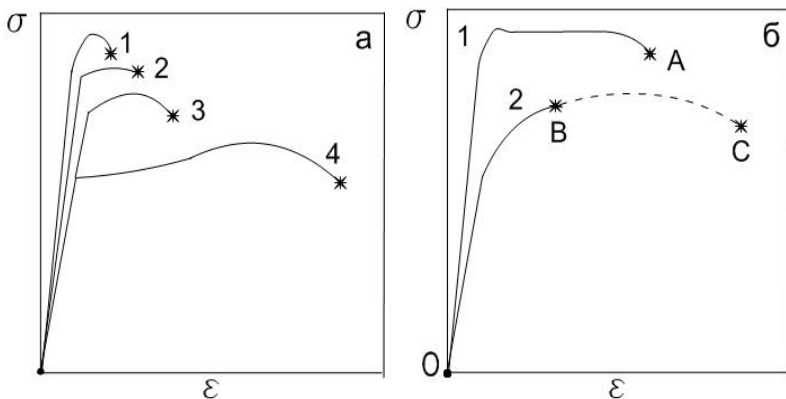
Как видно из рис., аустенитная сталь имеет два температурных интервала снижения пластичности. Область проявления НТРО соответствует температурам испытаний менее 550°C , а область ВТРО соответствует температурам испытаний свыше 700°C (рис. 5.5, б). Пределы текучести после облучения быстрыми нейтронами повышаются в несколько раз, при этом предел прочности повышается в меньшей степени (рис. 5.5, а).

В связи с вышесказанным, изменение кратковременных механических свойств основных конструкционных материалов при облучении можно систематизировать в зависимости от диапазона термического воздействия и особенностей кристаллического строения. На рис. 5.6 представлены

обобщенные кривые деформирования «условное напряжение-деформация» для двух основных типов металлических конструкционных материалов с ОЦК и ГЦК кристаллическими решетками, например, сталь ЭП-450 и ЭП-172.

При облучении и испытании при высоких температурах ОЦК металлов, кривая напряжение-деформация (линии 1,2,3) на рис. 5.6,а стремиться восстановить вид, соответствующий необлученному материалу (кривая 4). Это обеспечивается тем, что в процессе отжига при высоких температурах радиационные дефекты исчезают. Верхняя кривая на рис. 5.6,а представляет частный случай, когда предел прочности и предел текучести совпадают. В этом случае равномерное удлинение отсутствует (совершенная хрупкость), что характерно для ОЦК металлов при достаточно низких температурах и высоких дозах облучения. Как видно из рис. 5.6, б, облучение приводит к значительному формоизменению диаграммы деформирования ГЦК материалов, и кривая становится похожей на кривую для ОЦК сталей ферритного и мартенситного класса (кривая 1 на рис. 5.6,б) со строго выраженной площадкой текучести. В тоже время, ГЦК стали (аустенитного класса), облученные и испытанные при высоких температурах, не обнаруживают какого-либо возрастания предела прочности или текучести: имеет место только снижение пластичности (кривая 2 рис. 5.6, б).

Заметим, что в общем случае площадь диаграммы, соответствующей растяжению облученных образцов (что непосредственно характеризует работу деформирования и разрушения), значительно меньше, чем площадь диаграммы, соответствующей растяжению необлученных образцов. В качестве конкретного примера на рис. 5.7 представлены диаграммы растяжения необлученной и облученной потоком быстрых нейтронов ($\bar{E} > 0.1 \text{ МэВ}$) нержавеющей стали *AISI 316L* при температуре испытания и облучения равной 500 К.



(а): 1,2,3 – облучение при различных температурах ($T_1 < T_2 < T_3$),
 4 – без облучения; (б): 1 – облучение при низких температурах,
 2: ОВ – облучение при высоких температурах, 3 – без облучения

Рис. 5.6. Влияние облучения быстрых нейтронов ($\Phi > 10^{21}$ нейтрон/см², $\bar{E} > 0.1$ МэВ) на кратковременные механические свойства металлов с ОЦК решеткой (а) и ГЦК решеткой (б)

Анализ кривых (рис. 5.6) дает возможность убедиться, что сокращение работы деформирования и разрушения, несмотря на повышение пределов текучести и прочности, обусловлено значительным сокращением способности к пластическому деформированию и изменению степени деформационного упрочнения.

Рассмотрим влияние терморadiационного воздействия на длительные механические свойства материалов. Экспериментально установлено [90,155,115,120-1124,126,130,131,134,155], что характеристики длительной прочности значительно зависят от степени облучения, температуры, а также от величины первоначального холодного упрочнения образца. Эти величины непосредственно влияют как на скорость ползучести, так и на удлинение в момент разрушения. Время до разрушения (или долговечность) также косвенно зависит от тех же параметров, так как оно является отношением удлинения к скорости деформирования. Совместное влияние флюенса

быстрых нейтронов и температуры на длительную прочность может быть также продемонстрировано на примере изменения времени до разрушения. Так, для указанных выше необлученных конструкционных сталей возрастание температуры испытания заметно уменьшает их долговечность [124,126,127]. Этот эффект является доказательством быстрого возрастания скорости установившейся ползучести с температурой испытания и подчиняется аналитическим зависимостям Аррениуса. При фиксированном напряжении и температуре испытания облучение, как правило, снижает на порядок величины время до разрушения как показано на рис. 5.8.

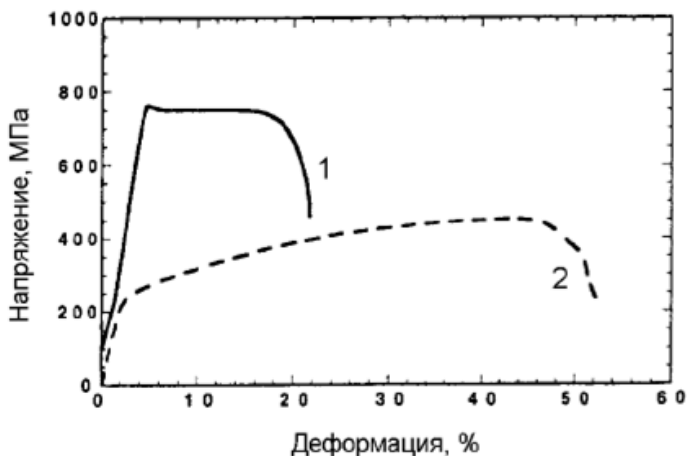
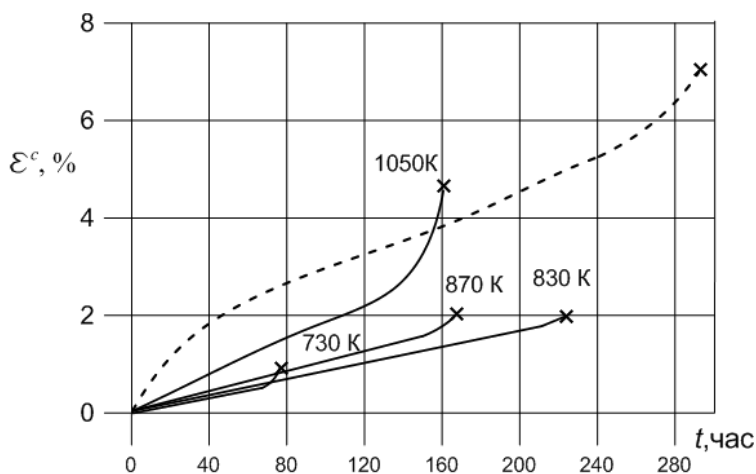


Рис. 5.7. Кривые растяжения аустенитной стали *AISI 316L* в облученном до флюенса $6 \cdot 10^{21}$ нейтрон/см² (1) и исходном (2) состояниях ($\bar{E} > 0.1$ МэВ) [149]

Это связано, главным образом, с сильным уменьшением пластичности под действием облучения, механизм которого был подробно рассмотрен выше. Металлы, подвергнутые облучению быстрыми нейтронами, оказываются менее пластичными, чем необлученные и поэтому их разрушение может носить как вязкий, так и хрупкий характер во всем объеме образца. Степень охрупчивания определяется величиной пластической деформации или деформации ползучести

перед разрушением. Например, влияние облучения быстрыми нейтронами на удлинение до разрушения при фиксированных значениях всех других параметров следующее: пластичность (деформация в момент разрушения) может уменьшиться от величины 20% для необлученного материала до 0.1% при больших дозах [94]. Таким образом, при этих условиях облучение вызывает уменьшение пластичности образца в 200 раз.



- - - материал без облучения; — образец облученный до $2 \cdot 10^{22}$ нейтрон/см² при различных температурах

Рис. 5.8. Влияние температуры облучения на длительную прочность стали 304, испытанной при температуре 830 К под давлением 300 МПа [131,134,137]

Результаты последних экспериментальных работ [118-127] показывают, что для некоторых материалов скорость ползучести в облученных образцах ниже, чем в необлученных, причем самым низким скоростям ползучести соответствуют самые низкие температуры облучения. Впрочем, такой характер изменения находится в полном соответствии с влиянием температуры на прочность: с увеличением

температуры облучения удлинение до разрушения возвращается к величине, характерной для необлученного материала, а способность к упрочнению восстанавливается. Другими словами возрастание предела текучести исчезает со временем при термическом отжиге.

Из вышеизложенного следует, что облучение нейтронным потоком совместно с высокотемпературным нагревом существенно влияет на теплофизические, физико-механические, кратковременные и длительные механические свойства конструкционных и делящихся материалов. По приведенным данным, можно сделать вывод, что с увеличением температуры модуль упругости, пределы пропорциональности, текучести и прочности уменьшаются, а коэффициент поперечной деформации, остаточная деформация и относительное сужение площади поперечного сечения при разрыве, вообще говоря, увеличиваются. С уменьшением температуры наоборот. При увеличении дозы облучения предел текучести и предел прочности материала увеличиваются, а остаточное относительное удлинение и остаточное сужение площади поперечного сечения при разрыве уменьшаются. Модуль упругости, коэффициент Пуассона с увеличением дозы облучения возрастают. Однако это изменение хотя и является стойким, но невелико (1.5-3%), и им в практических расчетах можно пренебречь. Также нейтронное облучение, как правило, приводит к уменьшению сопротивления длительному разрушению. Степень падения длительной прочности зависит от уровня напряжений, температуры облучения, характеристик облучающего потока и способности материала сохранять пластические свойства в условиях радиации. Дополнительной причиной снижения долговечности облучаемых материалов может стать уменьшение сопротивления ползучести, которое приводит к преждевременному исчерпанию ограниченного радиационным воздействием пластичности. Принято считать, что время до разрушения резко падает с возрастанием флюенса нейтронов, прежде всего, в результате потери именно пластических свойств.

5.2 Радиационное распухание

Радиационное облучение оказывает непосредственное влияние на размерные изменения материала, которые обусловлены в основном двумя причинами: ползучестью нагруженного образца, возрастающей под действием нейтронного облучения, и радиационным распуханием, проявляющимся в изменении линейных размеров ненагруженного образца в потоке нейтронов. В данной главе, а также в 3 и 4 главах представлены методы расчета НДС цилиндрических тел в условиях ползучести и облучения в предположении, что законы изменения радиационного распухания и радиационной ползучести заданы. В связи с этим, необходимо дать общую характеристику моделей распухания и ползучести при облучении. Этой задаче посвящены следующие два раздела.

Как известно, размерное постоянство является одним из необходимых условий безопасной и длительной работы всех ответственных элементов конструкций. Экспериментальными исследованиями установлено, что под действием облучения происходит объемное изменение конструкционных и делящихся (топливных) материалов. В качестве примера можно привести топливный сердечник и оболочку твэла активной зоны реактора АЭС. Кстати, впервые это явление было обнаружено (1967г.) именно в оболочке твэла быстрого ядерного реактора, изготовленной из аустенитной нержавеющей стали при ее облучении до больших значений интегрального потока быстрых нейтронов с энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ. Дальнейшие исследования показали, что такое радиационное распухание (РР) обусловлено образованием небольших полостей (микропор) в зернах металла, которые для нержавеющей стали образуются только при температурах между 523 и 873К, что, кстати, совпало с диапазоном рабочих температур оболочек твэлов быстрых реакторов. Вообще, для каждого конструкционного материала существует значение температуры, при котором этот процесс происходит наиболее интенсивно, как правило, это значение равно $(0.2-0.6)T_m$. При более

низких температурах поры не могут расти из-за малой подвижности вакансий, при более высокой – они растворяются. На рис. 5.9 приведена зависимость распухания стали и ниобия от температуры облучения.

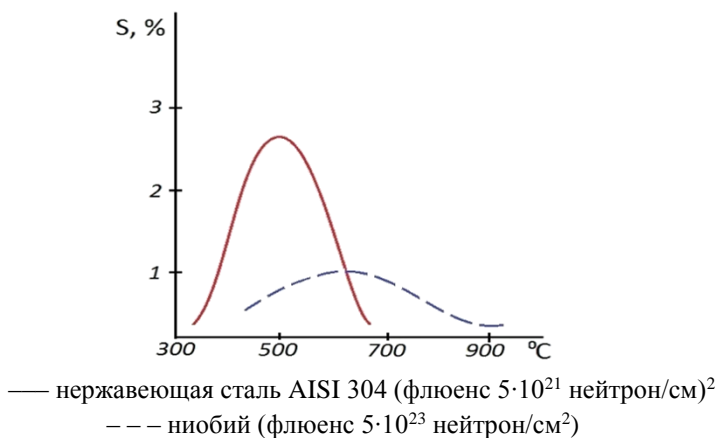


Рис. 5.9. Влияние температуры облучения на распухание конструкционных материалов [129]

На сегодняшний момент доказано, что к значительному изменению размеров элементов конструкций, работающих в условиях облучения, кроме термического расширения и внутренних напряжений приводит именно РР. Установлено [129-131,134,135,136,149-151], что масштаб изменений размеров конструкционных элементов от распухания, например, для аустенитных сталей более чем на порядок превышает формоизменения, обусловленные температурой, и может достигать величины 20-30% (для экстремальных условий работы быстрых ядерных реакторов). Кроме того, неравномерное РР ведет к появлению дополнительных напряжений, которые требуют обязательного учета в расчетах на прочность. В таком случае, с точки зрения механики деформируемого твердого тела очень важно иметь надежные аналитические зависимости для функции распределения РР. В этом, фактически, заключается одна из основных проблем моделирования поведения конструкций

в условиях интенсивных нелинейных терморadiационных полей. Для ее решения исследователями в основном предложены прикладные эмпирические и полуэмпирические зависимости распухания материалов, полученные на основе обработки многочисленных экспериментальных результатов. Как правило, основу теоретических моделей составляют сложные кинетические уравнения концентрации точечных дефектов среды, содержащей стоки. Проанализируем основные механико-математические модели, описывающие РР конструкционных и топливных (делящихся) материалов.

5.2.1 Радиационное распухание конструкционных материалов

В настоящее время причины РР металлов качественно понятны. Столкновение быстрых нейтронов с атомами решетки дают большое число пар вакансия-атом в междоузлии. Большинство этих дефектов со временем рекомбинируют друг с другом или мигрируют к стокам. Наиболее эффективными стоками являются дислокации. Как те, которые являются частью исходной системы дислокаций материала, так и дислокационные петли, образующиеся при конденсации межузельных атомов. Динамический баланс между образованием точечных дефектов и процессом их удаления поддерживается уровнем концентрации (значительно превышающем равновесный) вакансий и атомов в междоузлиях во время облучения. Образование групп межузельных атомов и вакансий происходит в случае, когда и межузельные атомы и вакансии в твердом теле подвижны, однако температура не должна быть слишком высокой, так как в этом случае рекомбинация точечных дефектов и уход к стокам происходит настолько быстро, что в твердом теле не может поддерживаться пересыщение дефектами. Скопление межузельных атомов приводит к образованию дислокационных петель.

Исходя из вышеназванных причин, можно сформулировать следующие 3 основные условия, необходимые для возникновения распухания в конструкционных материалах:

1) межузельные атомы и вакансии в твердом теле должны быть подвижны и способны мигрировать при очень низких температурах;

2) точечные дефекты должны захватываться стоками (дефектами структуры) в дополнение к их рекомбинации. Причем часть стоков должна поглощать межузельные атомы, для того, чтобы появилось избыточное количество вакансий, необходимое для образования микропор;

3) наличие пересыщения вакансиями, необходимого для гомогенного или гетерогенного зарождения микропор и дислокационных петель, а также их роста.

Отметим, что образование микропор происходит не только в нержавеющей стали (последняя, кстати, является одним из наиболее устойчивых сплавов по отношению к распуханию). Почти все конструкционные материалы распухают по подобному механизму в диапазоне температур $(0.2-0.55)T_m$. К примеру, обусловленное облучением общее изменение объема конструкционных сталей приведено на рис. 5.10. Как видно, вплоть до значений интегрального потока быстрых нейтронов равных 10^{22} нейтрон/см² заметного распухания стали не происходит (менее 0.1%). После этого распухание возрастает по закону $(\phi t)^n$, где ϕ – плотность нейтронного потока, а показатель степени больше единицы. Увеличение флюенса до 10^{23} нейтрон/см² резко увеличивает распухание, что связано с пересыщением вакансий и приводит к значительному уменьшению плотности и увеличению объема конструкционных материалов.

Таким образом, при исследовании дозной зависимости можно выделить следующие периоды: инкубационный, предшествующий проявлению макроскопически заметного распухания, переходной, характеризующийся нелинейной зависимостью распухания от дозы, и, наконец, установившаяся стадия.

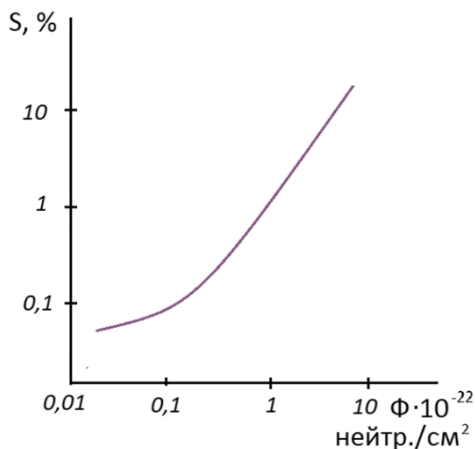


Рис. 5.10. Влияние флюенса нейтронов на распухание конструкционных сталей при облучении быстрыми нейтронами с энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ [129]

В настоящее время экспериментальными исследованиями установлено, что РР конструкционных материалов зависит главным образом от энергетического спектра нейтронов, дозы облучения (флюенса нейтронов), температуры и в значительно меньшей степени зависит от плотности потока нейтронов. Ввиду слабо развитой теории образования пор в металлах и сплавах, для оценок влияния распухания на характеристики конструкционных элементов чаще используются эмпирические выражения, уравнения которых отражают влияние основных переменных: температуры и интегрального нейтронного потока. Предложенные выражения для распухания отличаются экспериментальным методом, с помощью которого исследовалось формоизменение (например, метод просвечивания электронным микроскопом, рентгеноспектральные методы, метод измерения макроскопических размеров). Рассмотрим подробнее предложенные исследователями соотношения для определения распухания металлических конструкционных материалов.

Забудько Л.М. [98] для описания радиационного распухания конструкционных сталей предлагает общую зависимость следующего вида

$$\frac{\Delta V}{V} = A(kt)^{n(T)} f(T), \quad (5.14)$$

где $n(T)$, $f(T)$ – функции температуры; kt – уровень радиационных повреждений (или флюенс нейтронов). Для аустенитных нержавеющей сталей (0X16H15M3B, X18H22B2T2, X18H10T, ЭИ-847, ЭП-172, ЧС-68 и др.) показатель степени $n(T)$ меняется в пределах 1-3 в температурном интервале 600-900 градусов по шкале Кельвина.

Для радиационного распухания холоднодеформированной на 20% стали *AISI 316*, рекомендованной для проектирования элементов конструкций и компонентов оборудования активной зоны быстрых реакторов, зависимость (5.14) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} = & 19 \cdot 10^{-35} \Phi^{1.5} [4.03 - 3.71 \cdot 10^{-2} (T - 273) + \\ & 1.015 \cdot 10^{-4} (T - 273)^2 - 7.88 \cdot 10^{-8} (T - 273)^3], \end{aligned} \quad (5.15)$$

где T – температура, К; Φ – флюенс нейтронов с энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ.

Заметим, что вместо флюенса быстрых нейтронов облучение часто характеризуется числом смещений на атом (сна), что в какой-то мере учитывает влияние энергетического спектра облучения на распухание. Поэтому многие исследователи предлагали модели распухания материала в зависимости от числа сна. Так, например, в [130,131] приводится эмпирическая зависимость, установленная В.Н. Быковым, для относительного изменения объема стали 0X16H15M3B, облученной потоком быстрых нейтронов ($\bar{E} > 0.1$ МэВ):

$$\begin{aligned} S = \frac{\Delta V}{V} = & 5.33 \cdot 10^{-7} (\alpha kt)^{0.19+1.63 \cdot 10^{-3} T} \times \\ & \times \exp \left[0.0235 T - \frac{83.5}{T - 630} - \frac{17.82 \cdot 10^2}{980 - T} \right], \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $S = \frac{\Delta V}{V}$, T – температура, К; kt – число смещений атомов, соответствующих данному флюенсу нейтронов; α – коэффициент, зависящий от выбора модели для расчета kt . Нужно отметить, что до сих пор не существует общепринятой методики определения числа смещений с учетом энергетического спектра. В качестве стандарта для определения таких повреждений используют модели, которые усредняют число смещений по некоторым определенным группам энергий нейтронов (например, американский стандарт *TRN*).

Для распухания нержавеющей стали А.А. Тутнов приводит в [92,93,152,155] следующие экспериментальные зависимости

- для аустенитной стали 316

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = 5.6 \cdot 10^7 \left(10^{-22} q\right)^{\lambda_S} (0.975T - 413) \times \exp\left[54.2 - 0.0794T - \frac{30200}{T + 273}\right], \quad (5.17)$$

где $\lambda_S = 1,9 - 30/(T - 360) + 90/(T - 360)^2$.

- для холоднодеформированной стали 316

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = \eta_{\max}^{1.665} t^{2.096} \exp\left(\frac{\eta}{\eta_{\max}}\right)^7 A_S, \quad (5.18)$$

где при $T > 427^\circ\text{C}$

$$A_S = 0.04123 - 5.87 \cdot 10^{-5} (T - 418)^2 + 1.742 \cdot 10^{-4} (T - 418)^{1.787}; \quad (5.19)$$

при $T \leq 427^\circ\text{C}$

$$A_S = 1.742 \cdot 10^{-4} (T - 418)^{1.787}. \quad (5.20)$$

Здесь H - число сна; η - скорость накопления сна (10^{-6}c^{-1}); q - флюенс нейтронов всех энергий.

А.А. Тутнов на основе систематизации и статистической обработки большого числа экспериментальных данных пришел к выводу, что распухание, как функцию температуры, также можно выразить через набор экспоненциальных множителей, описывающих некоторую колокообразную кривую. Заметим, что иногда для описания температурной зависимости радиационного распухания можно использовать полиномы, например, вида $1+AT+BT^2+CT^3$ или степенные зависимости, например, $\exp(A/T+B/T^2)$, в которых коэффициенты определяются из результатов экспериментов, причем их значения зависят от типа реактора, где были получены данные.

Ю.И. Лихачев, В.Я. Пупко и В.В. Попов в [155] приводят соотношения, связывающие распухание аустенитных сталей с температурой облучения и флюенсом нейтронов:

$$S = \frac{\Delta V}{V} = A_{0S} A_S(T) \Phi^{\lambda_S(T)}. \quad (5.21)$$

Различные варианты $A_{0S}(T)$, $A_S(T)$ и $\lambda_S(T)$ для сталей 304 и 316 по классификации *AISI* в отожженном и холоднодеформированном состояниях можно найти в последних зарубежных публикациях [113,117-122].

Американский исследователь Д.Р. Оландер в своей монографии [90] для описания распухания предварительно термически обработанной нержавеющей стали *AISI* 316 предлагает использовать выражение:

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = \left(\varphi t \cdot 10^{-22} \right)^{2.05-27/\theta+78/\theta^2} \left[(T-40)10^{-10} \right] \times \exp[32.6 - 5100/T - 0.015T], \quad (5.23)$$

где $\theta=T-623$ – эффективная температура;

T , К;

φ –флюенс нейтронов с энергией $\bar{E}>0.1$ МэВ,

Многочисленные результаты, полученные исследователями-экспериментаторами, систематизированы в монографиях [94,95], где

подытожено систематическое изложение моделей радиационного распухания для основных конструкционных и делящихся материалов. Так, следуя этим работам, распухание сталей 304 в ауспеннизованном состоянии хорошо описывается соотношениями:

$$\frac{\Delta V}{V} = (\phi t \cdot 10^{-12})^{2.05 - \frac{27}{\theta} + \frac{78}{\theta^2}} \left[(T - 40) 10^{-12} \right] \times \exp[32.5 - 5000/T - 0.015T], \quad (5.24)$$

где ϕt – флюенс нейтронов с энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ;
 $\theta = T - 623$, К.

В [129] проведена обработка экспериментальных данных по распуханию конструкционных сталей, на основании которой установлена следующая общая зависимость для определения распухания как стали ОХ16Н15МЗБ, так и стали 304

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = 4,9 \cdot 10^{-49} (\phi t)^{1.71} \cdot 10^{\frac{15490}{T} - \frac{5980000}{T^2}}. \quad (5.25)$$

Распухание холоднодеформированной на 20% стали 316 предлагается описывать формулой:

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = 10^{-36} (\phi t)^{1.69} \left[\exp\left(-\frac{3930}{T}\right) - 5480 \exp\left(-\frac{12740}{T}\right) \right], \quad (5.26)$$

где T – абсолютная температура, К.

Таким образом, распухание конструкционных материалов зависит, в основном, от двух параметров: интегрального потока (флюенса) быстрых нейтронов с энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ и температуры облучения, что подтверждено теоретическими и экспериментальными результатами исследований [90-95, 8, 103, 104, 113, 116-122, 129-131, 135, 136]. Основными причинами распухания конструкционных материалов согласно этим работам является образование и рост радиационных микропор.

5.2.2 Радиационное распухание делящихся материалов

В отличие от рассмотренных конструкционных, основными факторами, определяющими распухание делящихся материалов (например, ядерного топлива), являются:

- увеличение суммарного объема продуктов деления относительно разделившегося объема (так называемое холодное распухание);
- формоизменение делящегося материала, связанное с ростом отдельных зерен в результате выбивания атомов из узлов кристаллической решетки и попадания продуктов деления внутрь; при этом появляются большие микронапряжения, создающие внутренние трещины и пустоты;
- образование пор в результате скопления мигрирующих вакансий;
- увеличение объема пор вследствие их слияния при миграции, а также из-за давления газовых продуктов деления, скапливающихся в порах.

В зависимости от температуры облучения относительное значение этих процессов меняется. Так, в области температур $(0.2-0.5)T_m$ распухание определяется накоплением продуктов деления, образованием пор при слиянии вакансий и увеличением объема пор под действием ГПД. При температурах свыше $0.5T_m$ увеличение объема обуславливается в основном увеличением объема пор под действием внутреннего давления газовых осколков деления и процессами слияния/укрупнения пор вследствие их миграции в поле градиента температур. Экспериментальные зависимости изменения объема диоксида урана от выгорания при разных температурах представлены на рис. 5.11.

Следует отметить, что сложность и многообразие вышеперечисленных процессов распухания делящегося материала затрудняет создание какой-либо единой расчетной модели. Кроме того, распухание делящегося топливного материала сильно зависит от структуры и способа изготовления топлива. Все это снижает надежность теоретических оценок и требует большего числа экспериментальных исследований.

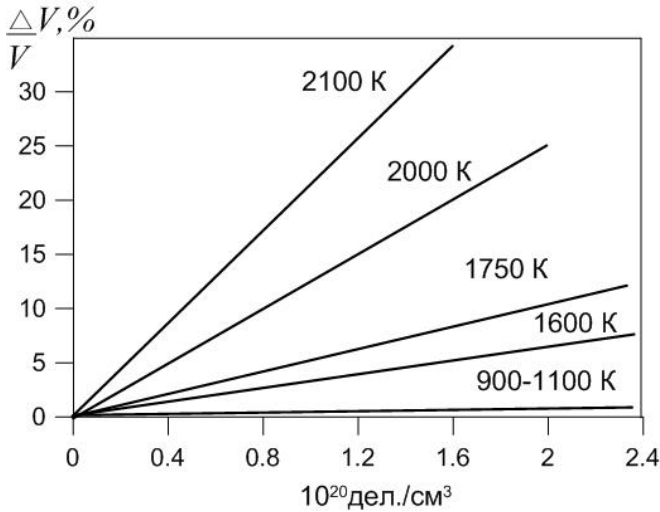


Рис. 5.11. Зависимость распухания UO_2 от выгорания при различных температурах [133]

Распухание топливного материала (например, UO_2) во многих работах [90-92,94,95,98,103,104,131,132,152,157] оценивается на основании установленных опытным путем соотношений, в которых скорость распухания считается пропорциональной скорости выгорания тяжелых ядер. Таким образом, объемное распухание топлива связано с глубиной выгорания следующей эмпирической зависимостью

$$\frac{\Delta V}{V} = K_T Ft, \quad (5.27)$$

где K_T – коэффициент пропорциональности, характеризующийся соотношением между распуханием и выгоранием; F – скорость выгорания тяжелых ядер, %/ч; t – временной параметр.

Считается, что $K=0.4$ при $\frac{\Delta V_{топл}}{V_{топл}} < p$, $K=1.6$ при $\frac{\Delta V_{топл}}{V_{топл}} > p$, где p – пористость смешанного делящегося материала по ядерному топливу:

$$p = \frac{1 - \psi_{\text{топл}}}{\psi_{\text{топл}}}, \quad (5.28)$$

Например, доля топлива в твэле реактора АЭС ψ обычно рассчитывается через плотность по следующей формуле

$$\psi_{\text{топл}} = \frac{\rho_{\text{табл}}}{\rho_{\text{теор}}}, \quad (5.29)$$

где $\rho_{\text{табл}}$ – плотность топливного сердечника, $\rho_{\text{теор}}$ – теоретическая плотность топлива.

Таким образом, коэффициент пропорциональности $K=0.4$ – до заполнения начальной пористости двуокиси и $K=1.6$ – после заполнения начальной пористости. Например, для окисного горючего UO_2 – $K_T \approx 1$, PuO_2 – $K_T \approx 1.5$, (PuO_2-UO_2) – $K_T \approx 1$ [94,95]. Для карбидного топлива K_T колеблется в пределах 1.2-1.5 [152]. Заметим, что пользоваться подобными линейными зависимостями типа (5.27) можно лишь в случае, если имеются достаточно надежные экспериментальные данные. Вообще говоря, вышеупомянутая зависимость экспериментально хорошо подтверждена только для окисного горючего [90,91,104,152,155]. В [152] отмечено, что распухание нитридного и карбидного горючего возрастает по параболическому закону, поэтому, вероятно, использование линейной зависимости (5.27) не всегда правомерно. В литературе [132,152] приводятся корреляционные уравнения, описывающие распухание карбидов и нитридов урана в зависимости от рабочих параметров и химического состава топлива. Так, распухание нитрида урана (UN) описывается уравнением

$$S = \frac{\Delta V}{V} = \Phi \left(0.25 - 27 / (T - 350) + 78 / (T - 350)^2 \right) (T + 233) \cdot 10^{-10} \exp[-0.015(T + 273) - 5100 / (T + 273) + 32.6], \quad (5.30)$$

где Φ – флюенс нейтронов ($\bar{E} > 0.1$ МэВ), нейтрон/см².

Для карбидного топлива предложена следующая зависимость в [152]:

$$\lg \frac{\Delta V}{V} = 1.494 \lg(T + 233) + 1.227 \lg B + 0.366 \lg(4.8 - C) - 19.86. \quad (5.31)$$

Здесь B – выгорание, МВт.сут/т;

T – температура, °С;

C – массовое содержание углерода в процентах, %.

В упомянутых монографиях [94] и [155] также предложено определять распухание оксидного топлива по следующим эмпирическим зависимостям:

при $T > 2200^\circ\text{C}$, $B = 0$

$$\frac{dS}{dt} = \exp(C_1 T^{1.75} / C_2^2); \quad (5.32)$$

при $T < 2200^\circ\text{C}$, $B \neq 0$

$$\frac{dS}{dt} = \exp(C_1 T^{1.75} / (C_2^2 + B)). \quad (5.33)$$

Где C_1 и C_2 – константы, определяемые на основе экспериментальных данных.

Автор исследования [103] рассматривал случай равномерного распухания керамического уранового топлива со следующей скоростью

$$\frac{dS}{dt} = 1.7 \cdot 10^{-5}, \quad 1/\text{ч}. \quad (5.34)$$

Для определения распухания топливных композиций и делящихся материалов при низких температурах (до 550°C), можно использовать модель квазистатических газовых пор [132], предполагая, что поры в топливном материале при низких температурах малоподвижны и в среднем имеют одинаковый размер. В упомянутой выше работе авто-

ром также дается обобщение выведенных уравнений вычисления распухания для теорий пластичности типа Биргера. Следует отметить, что при отсутствии экспериментальных данных или их большом разбросе распухание топливных композиций можно также определить, воспользовавшись теорией распухания описанной в [95].

Таким образом, главные параметры, влияющие на распухание делящегося материала – это скорость и глубина выгорания топлива, уровень и градиент температуры, геометрия и исходная пористость [90-92,94,95,131,132,152,155].

Необходимо подчеркнуть, что почти все перечисленные в данном разделе эмпирические и аналогичные им зависимости (как для конструкционных, так и для делящихся материалов) получены в основном для интегральных потоков, не превышающих 10^{23} нейтрон/см². При флюенсах больших 10^{23} нейтрон/см² можно ожидать значительного распухания (например, для оболочек твэлов быстрых реакторов), в то же время возможно и наступления так называемого насыщения распухания [91,92,94,98]. Также, подчеркнем, что ни одна из приведенных выше зависимостей распухания не учитывает влияния суммарного флюенса нейтронов на процесс насыщения РР. Рядом отечественных и зарубежных авторов, например, [90,94,98,113-122,129-132,152,155 и др.] отмечено сильное влияние на распухание многочисленных факторов, главным образом металлургического и технологического характера. В целом данные по распуханию топливных композиций можно найти в работах [90-92, 94, 95, 131, 132, 148, 152, 155], а по распуханию конструкционных материалов – в [90-98,113-122,129-132,135-137, 152,155,157]. Следует отметить, что имеется небольшое число работ с экспериментальными данными для флюенса нейтронов свыше 10^{23} нейтрон/см², и, поскольку распухание, как показано выше, определяется большим количеством параметров, очевидно, что экстраполяция такой зависимости на большие интегральные потоки (свыше 10^{23} нейтрон/см²) ненадежна. Поэтому очень трудно предсказать поведение

материалов при больших дозах облучения быстрыми нейтронами. Заметим, что некоторые из нежелательных побочных эффектов, связанных с набуханием, могут быть смягчены сопутствующим явлением ползучести под действием облучения, речь о которой пойдет дальше.

5.3 Радиационная и тепловая ползучесть в элементах конструкций

Вслед за открытием явления радиационного набухания в 1971г. было впервые обнаружено явление радиационной ползучести (РП). Этот необратимый процесс также как и объемное набухание вызывает значительные изменения в распределении (а точнее сказать в перераспределении) основных характеристик НДС и является главной причиной нарушения размерного постоянства элементов конструкций. За последние 40 лет были проведены многочисленные экспериментальные и теоретические исследования для выявления факторов, влияющих на РП. Так, в зависимости от эксплуатационных параметров, установлены многочисленные соотношения с целью учета и оценки РП, а также определения времени, когда деформации станут критическими (недопустимо большими). Очевидно, что в случае появления ползучести приложенные напряжения должны вызывать неоднородную деформацию твердого тела, скорость которой будет меняться с изменением потока быстрых нейтронов. Исторически сложилось так, что термин РП относится либо к «необъяснимому» увеличению термической ползучести (при высоких температурах под действием радиации было замечено ускорение ползучести по сравнению с деформированием без облучения), либо к появлению ползучести в условиях, когда термическая ползучесть отсутствует. В первом случае употребляется термин «ползучесть, усиленная облучением», а во втором «ползучесть, вызванная облучением».

Существует много механизмов термической ползучести и еще больше количества теорий, пытающихся объяснить сущность процесса РП. К настоящему времени накоплен обширный экспериментальный материал по РП чистых металлов, сталей и сплавов; разработан ряд теоретических

моделей, описывающих это явление. Как правило, эти модели работают в ограниченных интервалах внешних параметров и не в полной мере учитывают всю совокупность дефектов и многообразие физических процессов, происходящих при деформировании материала под облучением. Наиболее физически обоснованной является теоретическая модель типа «скольжение–переползание», основанная на скольжении дислокаций, контролируемом и усиленном влиянием различных точечных дефектов, образующихся при облучении на переползание дислокаций. Следует заметить, что процессы, контролирующие радиационную и высокотемпературную ползучесть имеют много общего. Так, например, некоторыми исследователями, например, [133] было предложено изучать установившуюся ползучесть материала при облучении по результатам неустановившейся высокотемпературной ползучести без облучения, обосновывая это тем, что с увеличением температуры влияние облучения на ползучесть уменьшается в результате отжига. Главная особенность явления РП состоит в том, что она проявляется в области температур $T \leq 0.5T_m$, где термическая ползучесть отсутствует, и ее скорость в этом диапазоне температур приблизительно соответствует скорости термической ползучести при температурах $\approx 650-670^\circ\text{C}$. Большинство специалистов считают, что основную роль РП играет при температурах даже меньших – ниже $\approx 0.45T_m$, в области температур, близких к $0.5T_m$, термическая и радиационная ползучесть становятся сравнимыми, а при достаточно высоких температурах (свыше $0.5T_m$) определяющей является термическая ползучесть (РП вносит малый вклад). Тепловая составляющая ползучести (ползучесть необлученного материала) в настоящее время уже достаточно хорошо изучена. Так, например, при математическом описании первой и второй стадий ползучести можно использовать предположение Л.М. Качанова о подобии кривых ползучести с разделением переменных, при котором деформация ползучести может быть представлена следующим образом:

$$\varepsilon^c = f_1(t)f_2(\sigma)f_3(T). \quad (5.35)$$

В (5.35) компоненты произведения представляет собой функциональные зависимости деформации ползучести от времени t , напряжения σ и температуры T соответственно. Заметим, что если в (5.35) принять, что первый член представляет компоненту неустановившейся ползучести в виде зависимости, предложенной Н.Н. Малининым

$$f_1(t) = [l_1 \exp(-l_2 t) + 1], \quad (5.36)$$

второй член зависимости (деформации от напряжения) установить в виде соотношения Нортона (Бейли)

$$f_2(\sigma) = B\sigma_u^{v_T}, \quad (5.37)$$

а третий – $f_3(T)$ задать законом Аррениуса

$$f_3(T) = A \exp(-Q_T/RT), \quad (5.38)$$

то в случае рассмотрения тепловой ползучести по теории течения получаем соотношение, которое часто использовалось Ю.И. Лихачевым в расчетах на прочность тепловыделяющих элементов [91]:

$$\dot{\varepsilon}_u^c = [l_1 \exp(-l_2 t) + 1] A_T \exp(-Q_T/RT) \sigma_u^{v_T}, \quad (5.39)$$

где $l_1, l_2, A_T=A \cdot B, Q_T, v_T$ – опытные коэффициенты, полученные эмпирическим путем; R – универсальная газовая постоянная.

С помощью подобных рассуждений, комбинируя многочисленными известными законами, можно задать различные варианты для неустановившейся и установившейся тепловой ползучести в зависимости от приемлемого для решения общего вида уравнения и имеющихся в распоряжении экспериментальных данных. Как правило, третья, ускоренная стадия ползучести не учитывается, так как считается, что к этому времени конструкция теряет несущую способность. Проанализируем подробнее функциональные зависимости деформации ползучести для облученных материалов. Основные экспериментальные и построенные на их основе аналитические зависимости для радиацион-

ной ползучести от приложенных напряжений и потока нейтронного облучения для нержавеющей сталей рассмотрены ниже.

На основании многочисленных экспериментальных данных в монографии [94,95] представлены результаты изучения радиационной ползучести сталей, которые были получены в реакторах на быстрых нейтронах. Показано, что РП сталей при флюенсе $\Phi \leq 10^{22}$ нейтрон/см² весьма слабо зависит от температуры. Интенсивность деформаций радиационной ползучести определялось уравнением:

$$\varepsilon_u^c = A\bar{E}\varphi\sigma_u + (B + C\sigma_u^2)\bar{E}\varphi\sigma_u t, \quad (5.40)$$

где φ – плотность потока нейтронов с общей энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ; \bar{E} – средняя энергия, МэВ; A, B, C – коэффициенты, зависящие от температуры испытания.

Забудько Л.М. с соавторами в [98] установлены многочисленные закономерности для ползучести облученных материалов. Для описания радиационной ползучести стали предлагается зависимость вида

$$\dot{\varepsilon}^c = B(T, kt)k\sigma, \quad (5.41)$$

где $B(T, kt)$ – модуль ползучести, зависящий от температуры T и уровня радиационных повреждений kt , рассчитываемого в зависимости от спектра нейтронов по числу сна.

Автором показано, что установившаяся скорость РП является линейной функцией напряжений σ в материале и скорости радиационных повреждений k .

В дальнейшем многочисленные результаты внутриреакторных испытаний, а также имитационные эксперименты на ускорителях подтвердили линейную зависимость радиационной ползучести от напряжений в широком интервале температур вплоть до напряжений, равных пределу текучести материала. При напряжениях, приближающихся к пределу текучести, проявляется, как правило, нелинейный характер зависимости скорости ползучести от напряжений [91], показатель степени при напряжениях может достигать 2-3. В

исследовании [141], на основе экспериментальных данных, доказана линейная зависимость скорости деформации радиационной ползучести от приложенного напряжения, как при одноосном, так и при не одноосных испытаниях.

В 1973г. Дж. Фостер впервые предположил о взаимосвязи между РР и РП, что говорит о влиянии дозы облучения и температуры на РП. Им была предложена эмпирическая зависимость РП для сталей в виде

$$\frac{\varepsilon^c}{\sigma} = Bkt + D\varepsilon^s(T, kt), \quad (5.42)$$

где $\varepsilon^s(T, kt)$ – радиационное распухание стали; kt – уровень радиационных повреждений, рассчитываемого в зависимости от спектра нейтронов по числу сна; B, D – эмпирические коэффициенты. Например, для стали *AISI 304*: $B=8.5 \cdot 10^{-7}(\text{МПа} \cdot \text{сна})^{-1}$, $D=1 \cdot 10^{-2} \text{МПа}^{-1}$.

Позже в работе [94], на основе экспериментальных результатов, получены следующие зависимости для радиационной ползучести и распухания стали *304L* в случае не одноосного напряженного состояния

$$\dot{\varepsilon}_u^c = (B\Phi + D\dot{\sigma}_0)\sigma_u, \quad (5.43)$$

$$\dot{S} = \dot{S}_0(1 + P\sigma_0), \quad (5.44)$$

где $\dot{\varepsilon}_u^c$ – интенсивность скоростей деформаций радиационной ползучести;

σ_u – интенсивность напряжений;

B – коэффициент, характеризующий ползучесть в отсутствие распухания; D – коэффициент, учитывающий влияние распухания на ползучесть;

P – коэффициент, учитывающий влияние напряжения на распухание;

σ_0 – компонента шарового тензора напряжений;

$B=0.398 \dots 0.612 \text{ МПа}^{-1}(\text{нейтр}/\text{см}^2)^{-1}\text{ч}^{-1}$;

$$D=(0.32\dots 1.28)\cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1};$$

$$P=0.006 \text{ МПа}^{-1} \text{ (для холоднодеформированной стали 304);}$$

$$P=0,0078 \text{ МПа}^{-1} \text{ (для отожженной стали 304).}$$

Следует подчеркнуть, что до настоящего времени механизм взаимосвязи между распуханием и ползучестью до конца еще не изучен. Некоторые данные по этому вопросу можно найти, например, в исследовании [141].

На основании анализа многочисленных публикаций в [98] показано, что для стали 316ХД и стали 1.4981ХД при уровне радиационных повреждений не более 20–25 сна наблюдается линейная зависимость радиационной ползучести РП от уровня радиационных повреждений в диапазоне температур 280–500°С. При более высоких дозах такая линейность нарушается. Эти результаты не расходятся с гипотезой о взаимосвязи явлений РП и РР, если предположить существование инкубационного периода распухания при низком уровне радиационных повреждений (до 20-25 сна).

В монографиях [91,94] рекомендована следующая эмпирическая формула для радиационной ползучести (в случае одноосного напряженного состояния)

$$\varepsilon_{irr}^c = \varepsilon_l^c + \varepsilon_h^c, \quad (5.45)$$

где первое слагаемое характеризует низкотемпературную, а второе – высокотемпературную ползучесть. Первая компонента представляет собой линейную функцию напряжения, связанную с распуханием:

$$\varepsilon_l^c = B(\varphi t)\sigma\varphi t = \sigma\{A[1 - \exp(-\varphi t/B) + B_0\varphi t + C(R, \varphi t)]\} \quad (5.46)$$

A, B, B_0, C – характеристики материала, зависящие от температуры и дозы облучения.

$$\varepsilon_h^c = D(T, t, \varphi t)\sigma^m, \quad (5.47)$$

где D – константа материала, а показатель степени $m > 1$.

Д.Р. Оландер в [90] скорость радиационной ползучести оболочки из нержавеющей стали 316 определял по следующей формуле:

$$\dot{\varepsilon}_{irr}^c = \sigma_u 10^{-6} \left[\frac{A_1 \Phi_{\max}}{A_2} \exp\left(\frac{-\Phi_{\max} t}{A_2}\right) + A_3 \Phi_{\max} \exp(A_5 [T]) - A_4 \right] \quad (5.48)$$

где σ_u – интенсивность напряжений, МПа; T – температура (К), Φ_{\max} – максимальное значение плотности потока быстрых нейтронов с энергией $\bar{E} > 0,1$ МэВ, нейтрон/м²·с; t – время, ч; A_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) – эмпирические коэффициенты, равные соответственно: $A_1 = 0.7 \cdot 10^{-10}$, $A_2 = 1.47 \cdot 10^{25}$, $A_3 = 0,73 \cdot 10^{-35}$, $A_4 = 1.405$, $A_5 = 0.0027$.

А скорость тепловой ползучести в условиях облучения предлагалось задавать формулой

$$\dot{\varepsilon}_{th}^c = 77.4(-1.95 \cdot 10^{-11} \cdot 1.45 \exp[-1.45 \cdot 10^{-3} T] + 3 \cdot 10^{12} \exp[-1.02 \cdot 10^5 / 2] \sigma_u^{5.4}), \quad (5.49)$$

где σ_u – интенсивность напряжений, МПа; T – температура, °С.

В [93,98] был предложен следующий закон терморadiационной ползучести для широко используемых в атомном машиностроении хромоникелевых сплавов (например, ОХ16Н15МЗБ, Х18Н22В2Т2, Х15Н35В3Т, Х18Н10Т и др.).

$$\dot{\varepsilon}_u^c = (dce^{-ct} + B) \sigma_u^m + K_0 \exp(1,405 - 0,0027T_c) f \sigma_u, \quad (5.50)$$

где первая часть выражения задает термическую ползучесть, а вторая – радиационную.

Ползучесть облученных элементов конструкций на установившейся стадии предлагалось учитывать в [94,95] по более простой формуле

$$\dot{\varepsilon}_u^c = C \sigma_u^m + D \sigma_u, \quad (5.51)$$

где C, D – модули тепловой и радиационной ползучести; m – показатель тепловой ползучести ($5 < m < 6$). Например, при $m=5,4; 5,22$ значения модуля тепловой ползучести равны соответственно $2.35 \cdot 10^{-9} (\text{кгс}/\text{мм}^2)^{-5.4} \text{ч}^{-1}$ и $5.5 \cdot 10^{-22} (\text{кгс}/\text{мм}^2)^{-5.22} \text{ч}^{-1}$.

Кроме того, в [148] представлены следующие зависимости для расчета термической и радиационной ползучести:

$$\dot{\epsilon}_u^c = 1.49 \cdot 10^{10} \sigma_u^{2.44} \exp(-63200/T), \quad (5.52)$$

где T измеряется по шкале Кельвина;

$$\dot{\epsilon}_u^c = 3.6 \cdot 10^{-22} B \sigma_u, \quad (5.53)$$

B – радиационная константа.

Автор исследования [103] для расчета ползучести нержавеющей аустенитной стали в условиях облучения (применительно к чехлам твэлов реактора на быстрых нейтронах) использовал нижеприведенные полуэмпирические выражения. Ползучесть чехлов в верхнем сечении складывалась из тепловой и радиационной составляющих по формуле

$$\dot{\epsilon}_u^c = 1.15 \cdot 10^{-8} \sigma_u + 3 \cdot 10^{-17} \sigma_u^5. \quad (5.54)$$

В центральном и нижнем сечениях чехлов учитывалась только радиационная составляющая ползучести, так как для области низких температур ползучесть имеет преимущественно радиационноактивный характер. Причем для центрального сечения принималось

$$\dot{\epsilon}_u^c = 2.3 \cdot 10^{-8} \sigma_u, \quad (5.55)$$

а для нижнего сечения

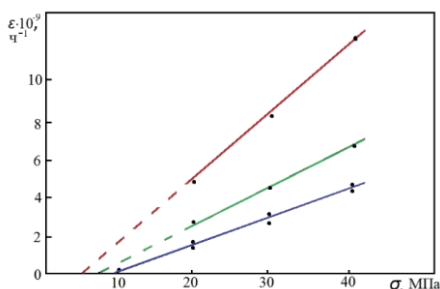
$$\dot{\epsilon}_u^c = 1.15 \cdot 10^{-8} \sigma_u. \quad (5.56)$$

Вопросы ползучести для делящегося материала имеют в основном прикладное значение в современной науке и технике: ядерное топливо для энергетических, исследовательских и транспортных реакторов. Дело в том, что процесс РП является одним из основных параметров, определяющих НДС компонентов оборудования любой ЯЭУ. Это обусловлено в первую очередь тем, что в настоящее время возникла потребность максимального использования прочностных и деформационных свойств материалов атомных аппаратов, что невозможно без разработки научных основ расчета долговечности. На практике РП при проектных уровнях облучения исследована в зависимости от напряжения, интенсивности облучения, температуры и структурных особенностей материала. По имеющимся в литературе данным скорость стационарной РП для урана при температуре меньше 1000 К линейно изменяется с напряжениями в интервале от 10 до 100 МПа (рис. 5.12). При высоких температурах влияние напряжения на скорость РП можно представить в виде суммы двух членов линейного радиационного и нелинейного термического (σ^n). Типичное значение n – 4.7. Для смешанного топлива во всем интервале температур закономерности изменения скорости ползучести аналогичны.

Следует добавить, что в области высоких температур (больше 1000°С) для ползучести делящегося материала справедлива термоактивационная зависимость (термическая ползучесть полностью вытесняет радиационную). Энергия активации ползучести практически не изменяется с изменениями при делении и близка по величине энергии активации, полученной без облучения. При низких температурах (до 900°С) наоборот: наблюдается слабая зависимость скорости ползучести от температуры и преобладает радиационноактивационная связь.

Экспериментально установлено, что на ранних стадиях облучения наблюдается непрерывное уменьшение скорости РП делящегося материала. То есть имеет место также некоторая нестационарная ползучесть. Опытные данные показывают, что это характерно до небольших выгораний делящегося материала. Как

правило, нестационарная РП описывается степенным законом типа $\varepsilon = Nt^m$. Где показатель степени m равен 0.45-0.75 и считается, что m не зависит от напряжения и интенсивности делений. Отметим, что последнее допущение является значительным упрощением таких моделей. Величина N принимается некоторой функцией от напряжений, температуры, интенсивности делений, плотности топлива и других параметров. Анализ нестационарной ползучести ядерных топливных композиций, представляющий особый интерес для расчетов НДС при пусках, выводах на мощность, расхолаживании и остановках энергетического ядерного реактора, а также для передвижных реакторных установок и транспортных ядерных реакторов, рассмотрен в исследованиях [95,133,138]. В них предлагаются соответствующие математические модели нестационарной РП для керамического и керметного топлива.



1 – $\Phi=0.4 \cdot 10^{20}$ нейтрон/см²; 2 – $\Phi=0.8 \cdot 10^{20}$ нейтрон/см²;
3 – $\Phi=1.2 \cdot 10^{20}$ нейтрон/см² с энергией $\bar{E} > 0.1$ МэВ

Рис. 5.12. Зависимость скорости ползучести диоксида урана от напряжения при облучении флюенсом [138]

Стационарная ползучесть делящегося материала в условиях облучения описана на основании внутриреакторных исследований в целом ряде работ [94,95,137,139,148,152]. В работе [133] приводится следующая общая зависимость, описывающая внутриреакторную установившуюся ползучесть (ч^{-1}) керамического топливного материала в широком интервале температур и напряжений

$$\dot{\varepsilon}^c = 5 \cdot 10^{-21} F \sigma_u + \frac{2.65 \cdot 10^{10} \sigma_u}{L^2 (d - 88)} \exp(-Q_T/RT). \quad (5.57)$$

где $Q_T=90$ ккал/моль; F – интенсивность деления, деление/(см³·с); σ_u , МПа, d – плотность материала относительно теоретической, %; L – размер зерна, мкм. Так, например, для описания стационарной ползучести топлива в интервале температур 300-1100°C используется следующее аппроксимирующее соотношение

$$\dot{\varepsilon}^c = 1.96 \cdot 10^{-20} \sigma_u F \exp(-13.7/RT). \quad (5.58)$$

Конкретно для двуокиси урана в области низких температур (200-900°C) рекомендуется выражение

$$\dot{\varepsilon}^c = (5.1 \pm 0.7) \cdot 10^{-12} F \sigma_u, \quad (5.59)$$

а для ползучести уран-плутониевого оксидного топлива при температурах 500-900°C предлагается использовать формулу вида

$$\dot{\varepsilon}^c = 1.78 \cdot 10^{-20} F \sigma_u. \quad (5.59)$$

Как видно, радиационное увеличение скорости ползучести пропорционально суммарным напряжениям и плотности делений в топливном материале. Заметим, что во всех приведенных выше зависимостях установившаяся скорость РП является линейной функцией возникающих напряжений.

В [152] предлагается расчет радиационной ползучести делящегося материала (например, UO_2) определять величиной скорости радиационной ползучести для «прочностной» части топлива по следующей эмпирической формуле

$$\dot{\varepsilon}_{irr}^c = 0.265\theta(T) \cdot \Phi \Sigma_f \cdot 10^{-28} \sigma_c (1 + 0.125p^2), \quad (5.60)$$

где σ_c – напряжение в контактном подслое, МПа;

p – пористость по топливу;

$\theta(T)$ – температурная функция.

Q – объемное энерговыделение в топливе, Вт/м³;

E_f – энергия одного деления, Дж.

Таким образом, роль облучения в процессах ползучести конструкционных и делящихся материалов проявляется двояко. С одной стороны облучение увеличивает количество радиационных дефектов и их скоплений, препятствующих скольжению дислокаций, а с другой стороны – точечные радиационные дефекты способствуют переползанию краевых дислокаций, ускоряя деформацию. Причем вклад радиационных дефектов в ускорение ползучести под облучением является более существенным, чем в замедление через торможение движения дислокаций. Как следствие, наблюдается существенное снижение длительной прочности всех материалов под действием облучения. Нужно отметить, что при определенных условиях радиационная ползучесть может вытеснять термическую (и наоборот), механизмы которых, в целом, одинаковы и основаны на скольжении дислокаций. При облучении изменяется только природа процесса и плотность образующихся радиационных дефектов, приходящаяся на единицу длины дислокации. В тоже время, при РП происходит увеличение скорости переползания дислокаций, в результате чего скольжение дислокаций контролируется их переползанием. Характерным дополнительным элементом этого необратимого процесса является более узкий интервал температур, а также большая зависимость РП от флюенса и плотности потока нейтронов, чем от значения приложенного сдвигового напряжения.

5.4 Краткое обобщение влияния радиационных сред на механические характеристики материалов и поведение конструкций

На основе вышеизложенного, можно утверждать, что анализ экспериментальных данных показывает общую деградацию физико-механических свойств при облучении, причем недостаточная радиационная

стойкость присуща всем материалам. Как было показано, упругие характеристики конструкционных материалов мало зависят от уровня радиационного облучения, они связаны с плотностью стали и понижаются с ее уменьшением при увеличении РР. Изменения теплофизических характеристик под облучением являются небольшими и по своей абсолютной величине они сравнимы с погрешностью эксперимента. К тому же, эти изменения могут быть направлены как в сторону уменьшения, так и увеличения. На основании экспериментальных данных предложены многочисленные формулы чисто эмпирического или полумпирического характера. Как правило, эти зависимости не дают удовлетворительного согласия с опытом на большом интервале напряжения и носят частный характер, давая относительно удовлетворительное совпадение лишь на некоторых участках кривых ползучести. Из последних значительно лучше экспериментально изучена установившаяся стадия, для которой характерны перечисленные в разделе 5.3 общие зависимости между скоростью ползучести, напряжениями, температурой и облучением. Основным механизмом, контролирующим скорость ползучести, является термически активируемое скольжение дислокаций. В случае радиационного облучения общепринятой является модель скольжение-переползание. Причем роль облучения проявляется двояко. С одной стороны, радиационные дефекты и их скопления тормозят движение дислокаций. С другой стороны, точечные радиационные дефекты способствуют переползанию краевых дислокаций, ускоряя деформацию. Вклад радиационных дефектов в ускорение ползучести является более существенным, чем в замедление через торможение движения дислокаций.

В целом, анализ, представленный в настоящем разделе, позволяет сделать вывод о значительной зависимости процесса деформирования материалов от нейтронного облучения, радиационного формоизменения, радиационной ползучести, изменения скорости термической ползучести материала в радиационных потоках и влияния интенсивного терморadiационного нагружения на механические и теплофизические

свойства конструкционных и делящихся материалов. Облучение оказывает непосредственное влияние на размерные изменения материала, обусловленные в основном двумя причинами: ползучестью нагруженного образца, возрастающей под действием нейтронного облучения, и РР, проявляющимся в изменении линейных размеров ненагруженного образца в потоке нейтронов. Нарастание деформации ползучести может вывести из строя конструктивные элементы, работающие при высоких температурах и интенсивном облучении потоками частиц с большой энергией, так как такого рода деформации с течением времени могут стать недопустимо большими. Следовательно, допускаемые напряжения в таких деталях определяются не пределом текучести и прочности, а допускаемыми деформациями для заданного срока службы, которые зависят от условий нормальной эксплуатации. В этом состоит существенное отличие расчета конструктивных элементов, работающих при высокой и нормальной температурах в условиях высокоинтенсивного облучения. Вопрос об устойчивости к разрушению таких элементов является одним из важнейших и тесно связан с задачей о НДС конструкции в целом. В связи с этим подобные физически нелинейные задачи представляют как теоретический так и практический интерес.

Все это требует создания современных механико-математических моделей для корректного определения НДС неравномерно нагретых тел в условиях облучения потоками частиц с высокой энергией. Расчетные схемы этих моделей должны базироваться на вышеописанных общих закономерностях деформирования материалов в терморadiационных потоках, а уравнения, соответствующие указанным закономерностям, должны иметь структуру, позволяющую легко вводить в расчет силовые, тепловые и радиационные условия нагружения и учитывать их изменение во времени.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Получено новое численно-аналитическое решение уравнений термоупругости ортотропной микрослоистой среды, в случае, когда зависимость неоднородности от пространственных координат имеет экспоненциальный характер. На основе полученного решения вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности кончиков трещин, распространяющихся по границе скачка градиентов физико-механических параметров среды, что позволило более точно (на 15–20 %) решать задачи предельного состояния и прогнозировать направление распространения трещин.

2. Установлено, что меняя характер неоднородности в направлении перпендикулярном начальным трещинам можно управлять направлением и прогнозировать на 10–15% точнее угол роста трещины при достижении предельного состояния хрупкого разрушения.

3. Установлена нелокальность определяющих соотношений в неоднородных термоупругих средах, описываемая интегральными операторами, ядра которых зависят от комбинаций тензоров Грина и корреляционных (структурных) функций физико-механических параметров среды и обращающихся в случае сильной изотропии в коэффициенты эффективной термоупругой среды, вычисление которых дает результаты на 10–18% ближе к экспериментальным данным для реальных материалов.

4. Методы вычисления вероятностей образования кластеров и порога перколяции в процессе синтеза или накопления повреждений в микронеоднородных материалах, существенно изменяющих механические макроскопические свойства конструктивных элементов, что позволяет на 10–15% точнее прогнозировать величины коэффициента анизотропии или концентрации, при которых возникает перколяционный кластер.

5. Механико-математические модели для расчета напряжений и деформаций в квазистационарных задачах термоупругопластической микронеоднородной среды для полых конструкционных элементов

цилиндрической и сферической форм, а также в статических задачах для двухслойных цилиндрических и сферических тел, что дает более точные (на 5–10%) формулы для оценки напряжений предельного состояния, и границ упругопластических зон.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании, производстве и эксплуатации конструктивных элементов типа пластин, цилиндров и сфер из композитных материалов с анизотропной структурой и неоднородностями типа кусочно-одно-родной, микрослоистой градиентного типа, микронеоднородностью, плавно изменяющейся по объему тела. В соответствии с полученными соотношениями предложены критерии предельных состояний элементов конструкций при воздействии температурных нагрузок для хрупкого и пластического типа разрушений, что позволяет прогнозировать направление роста трещин и пластических зон.

Результаты могут быть использованы в производстве компонентов типа твэлов и их оболочек для ядерных реакторов и других деталей конструкций ядерных и химических реакторов с целью создания радиоактивных композитов, не разрушающихся хрупким образом при резких скачках температуры, а деформирующихся пластически, что обеспечит большую экологическую безопасность. При технологиях упрочнения, основанных на резких перепадах температуры, когда важно, чтобы в деталях реализовывалось предельное пластическое состояние. Аналогичные проблемы существуют в металлургии, геотермии, вулканологии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий — М., Мир, 1970. — С. 245.
2. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т. Д. Шермергор — М., 1977. — С. 399.
3. Канаун, С.К. Метод эффективного поля в механике композитных материалов/ С.К. Канаун, В.М. Левин. — Петрозаводск: изд-во ПГУ, 1993. — С. 598.
4. Перколяция и проводимость // Теория и свойства неупорядоченных материалов: сб. — М. Ми : 1997. — Вып.7. — С. 249–292.
5. Подстригач, Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Колано. — М. : Наука, 1984. — С. 368.
6. Каниболотский, М.А. Оптимальное проектирование слоистых конструкций / М.А. Каниболотский, Ю.С. Уржумцев. — Новосибирск : Наука; Сиб. отделение, 1989. — С. 175.
7. Богуславский, В. Н. Строительная теплофизика / В. Н. Богуславский — М.: Высш. шк., 1982. — С. 415.
8. Мерич, Р.А. Оптимизация коэффициентов теплопроводности изотропных и ортотропных тел / Р.А. Мерич // Теплопередача тр. амер. общества инж.-механиков — №3. — 1985. — С. 1–7.
9. Михайлов, В.В. Оптимизация многослойной теплоизоляции / В.В. Михайлов // Инж.-физ. журнал — №2, Т.39 — 1980. — С. 286–291.
10. Мацевитый, Ю.М. Идентификация теплофизических свойств твердых тел / Ю.М. Мацевитый, С.Ф. Лушненко, — Киев : Наукова думка, 1990. — С. 215.
11. Борухов, В.Т. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики / В.Т. Борухов, И.В. Гайшун, В.И. Тимошпольский. — Минск; Беларуская навука, 2009. — С. 173.

12. Прусов, И.А. Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов — Минск : Изд-во БГУ, 1978. — С. 200.
13. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус — М. : Физматлит, 1963. — С. 251.
14. Мелан, Э. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными тепловыми полями / Э. Мелан, Г.М. Паркус. — М. : Физматлит, 1958. — С. 263.
15. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругих трехслойных оболочек вращения в температурном поле // Теории оболочек и мембран в механике и биологии : матер. междунар. научн. конф./ под общей редакцией Г.И. Михасёва, Х. Альтенбаха, 16 – 20 ст. — Минск, 2013. — С. 248–250.
16. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием /Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. — М. : Физматлит, 2011. — С. 560.
17. Мелешко, И.Н. К приближенному решению одной задачи теплопроводности для круга с граничными условиями второго рода // Изв. вузов. Энергетика. — 2005. — №4. — С. 68–72.
18. Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер, — М.: Мир, 1964.
19. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко — Киев: Наукова думка, 1970.
20. Био, М. Термоупругость и термодинамика необратимых процессов // Механика : сб. переводов. — № 3. — 1956. — С. 56–72.
21. Си (Sih, G.C.). Теплопроводность в бесконечной среде с разрывными условиями на линиях // Теплопередача : труды Американского общества инженеров-механиков. — Киев: Наукова думка, 1965. — № 2. — С. 157–162.
22. Кит, Г.С. Термоупругое состояние плоскости, ослабленной двумя коллинеарными трещинами /Г.С. Кит, И.П. Лысый // ФХММ. — 1974. — № 2 — С. 84–87.

23. Постригач, Я.С. Определение температурных напряжений в окрестности теплопроводящих трещин / Я.С. Постригач, Г.С. Кит. // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — Киев : Наукова думка, 1967. — С. 194–201.
24. Ивлев, Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д.Д. Ивлев // ПМТФ. — 1967. — №. 6. — С. 88–128.
25. Adah-Tehrani, A. Thermal residual stresses in particulate metal-matrix composites: an elastic-plastic analysis / A. Adah-Tehrani // Topics in plasticity.— 1991. — P. 136–150.
26. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацишин. — Киев : Наукова думка, 1976.
27. Черепанов, Г.П. Механика композитных материалов / Г.П. Черепанов. — М.: Наука, 1979. — С. 341.
28. Прагер, В. Температурные напряжения в упруго-вязких конструкциях / В. Прагер // Механика: сб.— 1957. — № 1 (41) — С. 75–81.
29. Wand, A.I. Thermal and creep affects in work hardenug elastic-plastic solids / A.I. Wand, W. Prager // I. Aeronat. Sci. — 1954. — №21 — P. 343.
30. Erdogan, F.E. Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack / F.E. Erdogan, M. Ratwani // Int. J. Fract. Mech. — 1970. — P. 4, 6, 379–392.
31. Pietras, F. Thermoelastic Reformations of Cylindrical Multi- Layered Shells Using a Direct Approach / F. Pietras. // J. Therm. Stress — 2013. — P. 749–789.
32. Syria, K. Ultra fast cooling and its effect on the Mechanical Properbies of Steel / K. Syria, Pal Shiv Brat Singh and Stadio Chakraborty // J. Heat Transfer B6, 032 101 (2013), doi 10.1115/1.4025638.
33. Бахвалов, Н.С. Осреднение процессов в периодических структурах / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко, — М.: Наука, 1984. — С. 351.

34. Кунин, И.А. Теория упругих сред с микроструктурой / И.А. Кунин — М.: Наука. — С. 415.
35. Морозов, Н.Ф. Композитные и дискретные модели в задаче устойчивости трехмерной нанопластины / Н.Ф. Морозов, Б.Н. Семенов, И.Е. Товстик // Теор. и прикл. мех., 2005. — №19 — С. 37–42.
36. Михасев, Г.И. Уравнения движения многоступенчатой углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек // Доклады НАН Беларуси. — 2011. — № 4 — С. 231–235.
37. Stom, R. Chirita Spatial Behaviour in the Strongly Elliptic Anisotropic Thermoelastic Materials / R. Stom. — 2007. — V. 30— P. 859–873.
38. Erdogan, F.E. Cracks in a Functionally Graded Piezoelectric Material Strip Under Mechanical and Transited Thermal Loading Conditions / F.E. Erdogan, M. Ratwani // J. Therm. Stress. — 2009 — V. 32.11. — P. 1103–1125.
39. Masond Molaei Nagabadi. Optimization of functionally Graded Materials in the slab symmetrically surface heated using transient analytical solution / Molaei Nagabadi Masond, Ehsan Taati, Hassan Basirat Tabrizi // I. Thermal Stresses. — 2014. — V. 37. — P. 2.
40. Ling, L. Stress concentration factor in matrix of a composite reinforced with transversely isotropic fibers / L. Ling, H. Zheng-Ming // J. Comp. Mater. — 2012. — P. 81–98.
41. Li, W. Microstructural characterization of non-equilibrated 4D carbon/carbon composites in ultrahigh temperature environment // J. Comp. Mater. — 2013. — P. 47, 529–537.
42. Chawla, N. Thermal expansion anisotropy in extruded SiC particle reinforced 2080 aluminium alloy matrix composites / Chawla, N., Denx, X., Schell. — М. // Science and Engineering. — 2006. — P. 314–322.

43. Esna Ashar, E. Fracture analysis of FRP-reinforced beams by orthotropic XFEM / E. Esna Ashar, S. Mohammadi. — 2012. — P. 46, 1367–1369.
44. Yiwand, B. Anisotropic Deformation and Damage Behaviour of Brittle-Ductile Laminated Composites in Bedding at High Temperature / B. Yiwand, Z. Yanehum // J. Comp. Mater. — 2005. — № 39. — P. 147–162.
45. The Development of Thermal Stresses in Polyimide Matrix Composite Materials as a Consequence of Three-dimensional Thermal Gradients-Analysis and Experiment / E. Drukker [et al.]. — 2005. — № 39. — P. 2143.
46. Литвинова, А.Ф. Температурные напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке, обусловленные локальным нагревом / А.Ф. Литвинова. // Обобщенные функции в термоупругости. — Киев: Наукова думка, 1980. — С. 106–112.
47. Ставров, В.П. Механика композиционных материалов / В.П. Ставров — Минск: БГТУ, 2008. — С. 260.
48. Richard, B. Encyclopedia of Thermal Stress / B. Richard, E.V. Hernatski. — 2013. — V.1.
49. Огибалов, П.М. Деформация трубы под действием внутреннего давления при переменной температуре / П.М. Огибалов // Инженерный сборник. — 1954. — Т. 20. — С. 36–42.
50. Прагер, В. Температурные напряжения в упруго-вязких конструкциях / В. Прагер // Механика. — 1957. — № 1 (41). — С. 75–81.
51. Lopes, D.A. Mechanical and thermal behavior of U-Mo and U-Nb-Zr Alloys / D.A. Lopes, T.A. Restivo, A.F. Podliha // J. Nucl. Mater. — 2013. — V. 440, issue 1–3. — P. 304–309.
52. Microstructural modeling of thermal conductivity of high burn-up missed oxide fuel // J. Nucl. Mater. — 2014. — V. 444, is. 1–3. — P. 161–169.

53. Stoucn, D. Thermal conductivity of heterogeneous LWR MOX fuels / D. Stoucn, M. Douker // J. Nucl. Mater. — 2013. — V. 442, is. 1–3. — P. 46–52.
54. Influence of SiC coating thickness on mechanical properties of SiC f / SiC composite / Y. Haijiao [et al.]. // J. Nucl. Mater. — 2013. — V. 442, is. 1–3. — P. 53–59.
55. Yansson, V. The nanostructure evolution Fe-C systems under irradiation at 600K / V. Yansson, M. Chiapetto, L. Materbal // J. Nucl. Mater. — 2013. — V. 443, is. 1–3. — P. 341–349.
56. Cermet fuel for fast reactor-Fabrication and characterization / M. Sunhir [et al.] // Y. Nucl. Mater. — 2013. — V. 442, is. 1–3. — P. 400–407.
57. Шилько, С.В. Эффект «упругой» приспособляемости (самоармирования) мультимодульных материалов / С.В. Шилько, Е.М. Петраковец, Ю.М. Плескачевский // Теор. и прикл. механика. — 2012. — № 27. — С. 130.
58. Яровая, А.В. Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня в условиях абляции / А.В. Яровая // Материалы, технологии, инструменты. — 2000. — № 3 — С. 23–25.
59. Ковальченко, Э. Радиационные повреждения тугоплавких соединений / Э. Ковальченко. — М. : Атомиздат, 1979. — С. 160.
60. Panteleenko, F.I. Temperature, stress in ct 3 steel plate during air-arc and welding process / F.I. Panteleenko, A. Heidari Monphared // J. of Engineering physics and thermophysics. — 2010. — V. 83, № 3. — P. 593–597.
61. Heidari Monphared, A. Математическое моделирование сварочных деформаций в тонких пластинах / А. Heidari Monphared, Ф.И. Пантелеенко, А.Ф. Пантелеенко // Вестник БНТУ, 2011. — Т.5. — С. 18–24.
62. Fenz, Z. Processes and Mechanisms of Welding Residual Stress and Distortions / Z. Fenz. // Wood head Publishing, 2005. — P. 343.

63. Исследования теплообмена между плазменной дугой и поверхностью реза металлического листа / А.И. Веремейчик [и др.]. // Теор.и прикл. мех. — 2015. — Вып. 30. — С. 101–106.
64. Кулак, М.И. Фрактальная механика материалов / М.И. Кулак — Минск: Вышэйшая школа, 2002. — С. 304.
65. Физика фракталов / Тр. VI междунар. конф. по фракталам в физике — МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля, 1985. — С. 650.
66. Ван Кампен, Н.Т. Стохастические процессы в физике и химии / Н.Т. Ван Кампен — М.: Высшая школа, 1990. — С. 376.
67. Тихонов, В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов, — Москва, Советское радио, 1977. — С. 488.
68. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. — М., Ижевск, 2002. — С. 159.
69. Керметный твэл на основе микротоплива для АСММ с повышенными характеристиками и безопасностью / С.С. Гаврилин [и др.]. // Малая энергетика 21 — 24 ноября, 2006. — М., 2006. — С. 264–271.
70. Черников, А.С. Сферическое ядерное топливо для высокотемпературных применений / А.С. Черников, Е.К. Дьяков, С. Курбанов; Межд. конф. по технологиям высокотемпературных реакторов (НТР 2008) Вашингтон, США, 27 сент. — 01 окт. 2008».
71. Expanded hale method for arresting crack propagation: residual stress deterioration nying neutron defecting / B.I. Caron [et all]. // Physica B. — 2004. — V. 350, № 1 – 3. — P. 503.
72. Cermet Fuel Development for Advanced Nuclear Systems (Th, U) O2 in a Metal Matrix // Final Report from U.S. Department of Energy Nuclear Energy Research Initiative Project № 99 – 095, Edited by Sean M. McDeawitt, Pardue University School of Nuclear Engineering, 2003. — P. 52.
73. Phase Transformations of Name crystalline Martensitic Materials / T. Waitz, [et all]. // The Materials Gateway, MRS Bulletin. — 2009.— V. 34, iss. 11.

74. Шашков, А.Г. Волновые явления теплопроводности. Системно структурный прогноз / А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский. — Минск: Навука і тэхніка, 1983. — С. 279.
75. Козлов, В.П. Метод решения интегральных уравнений с неявными ядрами в области L- изображений / В.П. Козлов, Н.И. Юрчук, П.А. Мандрик // Вест. Белорус. гос. ун-та., 1999. — №2. сер.1 — С. 37–42.
76. Прусов, И.А. Об одном решении смешанной задачи термоупругости для анизотропной плоскости с эллиптическим отверстием / И.А. Прусов, Ю.В. Василевич // Вестн. Белорус. гос. ун-та. 1977. — № 1. — С. 1.
77. Магомедов, К.М. Теоретические основы геотермии / К.М. Магомедов — М.: Наука, 2001. — С. 277.
78. Физико-математические модели для теорий неразрушающего контроля теплофизических свойств / В.П. Козлов, Н.И. Юрчук, Н.А. Абдельразак // ИФЖ. — 1995. — № 6. — С.1011–1022.
79. Хрусталева, Б.М. Техническая термодинамика / Б.М. Хрусталева, А.В. Несенчук, В.Б. Романюк — Минск: Технопринт, 2000.
80. Качанов, Я.М. Основы теории пластичности / Я.М. Качанов — М.: Наука, 1969. — С. 420.
81. Ильюшин, А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М.: Наука, 1970.
82. Листовский, Е.Я. Теплодинамические свойства огнеупоров / Е.Я. Листовский, Н.А. Пучкелевич. — М. Металлургия, 1982. — С. 150.
83. Черепанов, Г.П. Механика разрушения / Г.П. Черепанов, Л.В. Ершов. — М.: Машиностроение, 1977. — С. 222.
84. Шемякин, Е.И. Динамическое разрушение твердых тел / Е.И. Шемякин, В.Д. Никифоровский. — М.: Наука, 1981. — С. 323.
85. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. — М.: Наука, 1966. — С. 260.

86. Ремнев Ю.И. О влиянии облучения на напряжения и малые деформации в твердом теле / Ю.И. Ремнев // ДАН СССР.–1959.– Т.124, №3 – С.59-62.
87. Ленский, В.С. Метод однородных приближений в несвязанных задачах терморadiационной упругости и пластичности / В.С. Ленский//Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1971. – Вып.11. – С.100-113.
88. Шевченко, Ю. Н. Уравнения терморadiационной пластичности/ Ю.Н. Шевченко//Тепловые напряжения в элементах конструкций.–1972. –Вып. 12.– С.39-52.
89. Ma, B.M. Radiation and creep analysis of strains and stresses in annular fuel elements / B. M. Ma, G. Murphy // Nuclear Structural Engineering. – 1965. – Vol. 1, №2. – P. 141–154.
90. Olander, D. R. Fundamental Aspects of Nuclear Reactor Fuel Elements/ D.R. Olander. – USA: Technical Information Center Energy Research and Development Administration, 1976. – 720p.
91. Лихачев, Ю. И. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов / Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко. - М.: Атомиздат, 1975. - 280 с.
92. Тутнов, А. А. Методы расчета работоспособности элементов конструкций ядерных реакторов. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 183 с.
93. Тутнов, А. А. Математическое моделирование поведения теплофизических, прочностных и надежностных характеристик твэлов энергетических реакторов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.14.03 / А.А. Тутнов, Рос. науч. центр "Курчат. Ин-т", Ин-т реактор. технологий и материалов. - М., 1998. - 54 с.
94. Куликов, И. С. Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б. Е. Тверковкин. - Минск: Навука і тэхніка, 1990. - 143с.
95. Куликов, И. С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / Под ред. В. Б. Нестеренко. - Минск: Наука и техника, 1984. - 103с.

96. Аналитическое решение уравнений линейной теории вязкоупругости. Применение к твэлам ядерных реакторов / Ю.А. Захарко, А.А. Прошкин, В.Ю. Пляшкевич [и др.]. - М., 1994. - 34 с. - (Препринт/ ИАЭ-5757/4)
97. Захарко, Ю. А. Разработка новых расчетных и экспериментальных методик по изучению активных зон и характеристик реактора ВВЭР: Аналит. метод расчета напряжений и деформаций в твэле. - М.: ЦНИИатоминформ, 1986. - 36 с.
98. Забудько, Л.М. Работоспособность ТВС быстрых реакторов/ Л.М. Забудько, Ю.И. Лихачев, А.А. Прошкин.-М.: Энергоатомиздат, 1988. -168с.
99. Вахромеева, В. В. Численный метод решения системы нелинейных уравнений распухания бесконечного цилиндрического топливного сердечника. -Обнинск, 1974. - 17с.
100. Богущ, В. Б. Исследование напряженно-деформированного состояния твэлов с металлическим топливом. - Обнинск, 1978. - 11 с. - (Препринт/Физ.-энерг. ин-т; ФЭИ-820)
101. Леончук, М. П. Термомеханическая модель цилиндрического твэла при осесимметричном нагружении / М. П. Леончук, Э. Х. Пыльченков, Л. И. Дворцова. - Обнинск, 1977. - 12 с.
102. Гонтарь, А.С. Моделирование высокотемпературного распухания диоксида урана и деформационного поведения твэла / А.С. Гонтарь, М.В. Нелидов// Атомная энергия. – 2007. – Т. 103, вып. 3. – С. 172–178.
103. Манукян, К.М. Расчет напряженно-деформированного состояния и параметров нелинейной механики разрушения конструкционных элементов активной зоны ЯЭУ: дис. ... канд. техн. наук: 05.14.03 / К.М. Манукян. – Москва, 1995. – 201 л.
104. Горохов В.А. Численное моделирование упруговязкопластического деформирования конструкций из нержавеющей сталей и

- графитов при квазистатических терморadiационных нагружениях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / В.А. Горохов. – Н. Новгород, 2007. – 113 л.
105. Ghorbanpour, A.A. Buckling analysis of a cylindrical shell, under neutron radiation environment / A.A. Ghorbanpour, M. Ahmadi, A. Ahmadi, A. Rastgoo, H.A. Sepyani // Nuclear Engineering and Design. – 2012. – Vol. 242. – P. 1–6.
106. Karahan, A. A new code for predicting the thermo-mechanical and irradiation behavior of metallic fuels in sodium fast reactors / A. Karahan, J. Buongiorno // J. of Nuclear Materials. – 2010. – Vol. 396, №2-3. – P. 283–293.
107. Williamson, R.L. Enhancing the ABAQUS thermomechanics code to simulate multipellet steady and transient LWR fuel rod behavior / R.L. Williamson // J. of Nuclear Materials. – 2011. – Vol. 415, №1. – P. 74–83.
108. Hall, M.M. Stress state dependence of in-reactor creep and swelling: Part I: Continuum plasticity model / M.M. Hall // J. of Nuclear Materials. – 2010. – Vol. 396, №1. – P. 112–118.
109. Sercombe, J. Power ramped cladding stresses and strains in 3D simulations with burnup-dependent pellet-clad friction / J.Sercombe, I. Aubrun, C. Nonon // Nuclear Engineering and Design. – 2012. – Vol. 242. – P. 164–181.
110. Marchal, N. Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rods / N. Marchal, C. Campos, C. Garnier // Comput. Mater. Sci. – 2009. – Vol. 45. – P. 821–826.
111. Analysis of intermetallic swelling on the behavior of a hybrid solution for compressed hydrogen storage, Pt II Finite element method simulation / Chapelle D., Hocine A., Carbillet S., Boubakar M.L. // Materials and Design. – 2012 – Vol.36. – P. 459–469.
112. Suzuki, M. Analysis of mechanical load on cladding induced by fuel swelling during power ramp in high burn-up rod by fuel performance

- code FEMAXI-6 code / M. Suzuki, H. Uetsuka, H. Saitou // Nuclear Engineering and Design. – 2004a – Vol. 229. – P. 1–14.
113. Karthik, V. Austenitic Stainless Steels for Fast Reactors - Irradiation Experiments, Property Evaluation and Micro structural Studies / V. Karthik, S. Murugan, P. Parameswaran, C.N. Venkiteswaran, K.A.Gopal, N.G. Muralidharan, S. Saroja and K.V. Kasiviswanathan // Energy Procedia. – 2011. – Vol.7. – P.257–263.
114. Singh, B.N. Effects of neutron irradiation on microstructure and mechanical properties of pure iron/ B.N. Singh, A. Horsewell, P. Toft//Journal of Nuclear Materials. –1999. –Vol.271-272. – P.97–101.
115. Semenov, A.A. Modeling dislocation structure development and creep–swelling coupling in neutron irradiated stainless steel/ A.A. Semenov, C.H. Woo// J. of Nuclear Materials. – 2009. – Vol. 393, №3. – P. 409–417.
116. Budykin, N.I. Neutron-induced swelling and embrittlement of pure iron and pure nickel irradiated in the BN-350 and BOR-60 fast reactors / N.I. Budykin, E.G. Mironova, V.M. Chernov, V.A. Krasnoselov, S.I. Porollo, F.A. Garner // J. Nucl. Mater. – 2008. – Vol.375. – P.359–364.
117. Singh, B.N. Void swelling in cooper and copper allows irradiated with fission neutrons / B.N. Singh, A. Norsewell, D.S. Gelles, F.A. Garner // J. Nucl. Mater. – 1992. – Vol.192-194. – P.1172–1176.
118. Hall, M.M. Stress state dependence of in-reactor creep and swelling: Part I: Continuum plasticity model / M.M. Hall // J. of Nuclear Materials. – 2010. – Vol. 396, №1. – P. 112–118.
119. Garner, F.A. Swelling and creep observed in AISI 304 fuel pin cladding from three MOX fuel assemblies irradiated in EBR-II/ F.A. Garner, B.J. Makenas, S.A. Chastain // J. of Nuclear Materials.– 2011. – Vol. 413, №1. – P. 53–61.
120. Garnier, J. Irradiation creep of SA 304L and CW 316 stainless steels: Mechanical behaviour and microstructural aspects. Part I: Experimental results/ J. Garnier, Y. Brechet, M. Delnondedieu,

- C. Pokor, P. Dubuisson, A. Renault, X. Averty, J.P. Massoud// J. of Nuclear Materials. – 2011. – Vol. 413, №2. – P. 63–69.
121. Hall, M.M. Errata to: “Stress state dependence of in-reactor creep and swelling. Part I: continuum plasticity model”, Journal of Nuclear Materials 396 (2010) 112–118 and “Stress state dependence of in-reactor creep and swelling. Part II: experimental results”, Journal of Nuclear Materials 396 (2010) 119–129 / M.M. Hall Jr// J. of Nuclear Materials. – 2011. – Vol. 412, №2. – P. 278–279.
122. Hall, M.M. Stress state dependence of in-reactor creep and swelling. Part 2: Experimental results / M.M. Hall Jr, J.E. Flinn // J. of Nuclear Materials. – 2010. – Vol. 396, №1. – P. 119–129.
123. Kutty, T.R.G. Creep behaviour of U–6%Zr alloy by impression creep technique / T.R.G. Kutty, C.B. Basak, A. Kumar, R.P. Singh // Nuclear Engineering and Design. – 2012. – Vol. 242. – P. 164–181.
124. Turski, M. Residual stress driven creep cracking in AISI Type 316 stainless steel / M. Turski, P.J. Bouchard, A. Steuwer, P.J. Withers // Acta Materialia. – 2008. – Vol. 56, №14. – P. 3598–3612.
125. Yacout, A.M. Thermal creep modeling of HT9 steel for fast reactor applications/ A.M. Yacout, H.J. Ryu, Y.S. Kim // J. of Nuclear Materials. – 2011. – Vol. 409, №3. – P. 207–213.
126. Vanaja, J. Creep deformation and rupture behaviour of 9Cr–1W–0.2V–0.06Ta Reduced Activation Ferritic–Martensitic steel/ J. Vanaja, K. Laha, R. Mythili, K.S. Chandravathi, S. Saroja, M.D. Mathew// Materials Science and Engineering: A. – 2012. – Vol. 533. – P. 17–25.
127. Lathaa, S. Creep behaviour of 14Cr–15Ni–Ti stainless steel at 923 K / S. Lathaa, M.D. Mathewa, P. Parameswarana, K.B.S. Raob, S.L. Mannanc // Materials Science and Engineering: A. – 2010. – Vol. 527, №20. – P. 5167–5174.
128. Тимошенко, С.П. Теория упругости/ С.П. Тимошенко, Дж. Гудер. – М.: Наука, 1975. – 576с.

129. Рябов, В. М. Действие излучения на конструкционные материалы / В.М. Рябов. - 2-е изд., доп. - М.: МЭИ, 1990. - 58 с.
130. Киселевский, В. Н. Изменение механических свойств сталей и сплавов при радиационном облучении / В. Н. Киселевский. - Киев: Ин-т пробл. прочности, 1977. - 103 с.
131. Киселевский, В. Н. Прочность конструкционных материалов ядерных реакторов / В. Н. Киселевский. - Киев: Наук. думка, 1990. - 163с.
132. Тутнов, А. А. Расчетное моделирование набухания топливных материалов по модели квазистатических пор / А. А. Тутнов, А. И. Ульянов, К. К. Желтухин. - М., 1984. - 25 с. - (Ин-т атом. энергии им. И. В. Курчатова; ИАЭ-3999/4)
133. Малыгин, В. Б. Разработка модели радиационной ползучести керамического топлива на основе расчетно-экспериментальных исследований: дис. ... канд. техн. наук: 01.04.07 / В.Б. Малыгин. - М., 1979. - 142 л.
134. Писаренко, Г. С. Прочность и пластичность материалов в радиационных потоках / Г.С. Писаренко. - Киев: Наук. думка, 1979. - 284 с.
135. Лапин, С. С. Повышение стойкости нержавеющей сталей против радиационного набухания при облучении высокоэнергетическими частицами: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / С.С. Лапин. - Екатеринбург, 1993. - 111 л.
136. Кобылянский, Г. П. Радиационный рост и радиационная ползучесть сплавов: Обзор. информ. / Г. П. Кобылянский, В. К. Шамардин, В. М. Косенков. - Дмитровград, 1982. - 34 с.
137. Павлий, К. В. Радиационная ползучесть диоксида урана применительно к переходным и базовым режимам эксплуатации ТВЭЛА ВВЭР: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07/ К.В. Павлий. - Ташкент, 1989. - 152 л.
138. Бондаренко, А. И. Радиационная ползучесть и скольжение дислокаций. - Обнинск: Физ.-энерг. ин-т, 1983. - 27 с.

139. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: В 2-х т. / Под ред. Г. С. Писаренко. - Киев: Наук. думка, 1980.
140. Бородин, В.А. Влияние микроскопических процессов в ядрах дислокаций на кинетику их переползания и радиационную ползучесть материалов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / В.А Бородин. – М.: , 1986. – 176 л.
141. Годунов, С. К. Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 177 с.
142. Годунов, С. К. Разностные схемы: Введ. в теорию / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. - М.: Наука, 1977. – 439 с.
143. Прочность. Устойчивость. Колебания : Справочник. В 3-х т. / Под общ. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. - М. : Машиностроение, 1968.
144. Термопрочность деталей машин: Теория. Эксперим. исследования. Расчет / Под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. И. А. Биргера и д-ра техн. наук, проф. Б. Ф. Шорра. - М. : Машиностроение, 1975. – 455 с.
145. Todreas, N.E. Nuclear Systems I. Thermal Hydraulic Fundamentals / N.E. Todreas, M.S. Kazimi. – New York: Hemisphere Publishing Co, 1990.
146. Reuss, P. Neutron physics / P. Reuss. – Paris: EDP Sciences, 2008.
147. Малыгин, В.Б. Эксплуатационные свойства материалов тепловыделяющих элементов энергетических реакторов / В.Б. Малыгин. – М.: Моск. инж.-физ. ин-т, 1989. – 76 с.
148. Hashimoto, N. Relationship between hardening and damage structure in austenitic stainless steel 316LN irradiated at low temperature in the HFIR / N. Hashimoto, J.P. Robertson // Journal of Nuclear Materials. –1999. –Vol.273. –P.95-101.
149. Агапова, Н.П. Исследование структуры и механических свойств стали ОХ16Н15МЗБ, облученной ионами гелия / Н.П. Агапова,

- И.Н. Африканов, Ф.П. Бутра [и др.] // Атомная Энергия. –1976. – Т.41. – С.314-317.
150. Реутов, В.Ф. Радиационная повреждаемость материалов при облучении высокоэнергетическими легкими заряженными частицами: дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.07/ В.Ф. Реутов – Алма-Ата, 1990. –372 л.
151. Тутнов, А. А. Изменения размеров изделий из реакторных материалов под действием температуры и облучения: Обзор / А.А. Тутнов - М., 1984. - 55 с.
152. Платонов, П. А. Действие облучения на теплопроводность и электропроводность реакторного графита /П.А. Платонов. - М.: Ин-т атомной энергии им. И. В. Курчатова, 1976. - 25 с.
153. Власов, Н.М. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей / Н.М. Власов, И.И. Федик. – М.: ЦНИИАтоминформ, 2001. – 208 с.
154. Лихачев, Ю. И. Методы расчета на прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов / Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко, В. В. Попов. - М. : Энергоатомиздат, 1982. - 87 с.
155. Shankara, V. Proton irradiation creep of beta-silicon carbide/ V. Shankara, G. S. Wasb // J. of Nuclear Materials. – 2011. – Vol. 418, №1. – P. 198–206.

Научное издание

ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ Юрий Михайлович
ЧИГАРЕВА Юлия Анатольевна
ШИРВЕЛЬ Павел Иванович

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ
В УСЛОВИЯХ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ**

Подписано в печать 23.11.2018. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,31. Уч.-изд. л. 10,41. Тираж 100. Заказ 934.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.