

## ФІЗІКА

УДК 530.182

М. А. КНЯЗЕВ, Н. Г. БЛИНКОВА

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОСОЛИТОННЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ  
ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 30.04.2015)

**Введение.** Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) относится к числу наиболее хорошо изученных нелинейных уравнений в частных производных. Данное уравнение является интегрируемым, т. е. имеет решение не только в виде одиночного солитона, но и бесконечное количество решений, соответствующих связанным состояниям произвольного числа солитонов и (или) антисолитонов [1]. Каждому такому решению соответствует некоторый закон сохранения.

В настоящее время значительное внимание уделяется проблеме взаимосвязи между решениями уравнения КдФ и решениями уравнения Фридмана в космологии. Возможность такой взаимосвязи обусловлена нелинейным характером указанных уравнений. Эта проблема получила название дуализма гравитация/солитон [2].

Связь между решениями уравнения КдФ и уравнения Риккати широко применяется при изучении космологических моделей. Например, в работе [3] рассмотрены адиабатические солитоны уравнения КдФ в баротропических открытых космологических моделях. При этом для решения уравнения Фридмана [4] используется уравнение Риккати для параметра Хаббла и показана его связь с уравнением КдФ. Аналогичный подход применяется в [5, 6] при исследовании космологической жидкости Дарбу для объяснения космологического эффекта ускорения. При этом метод с применением адиабатических индексов оказывается эффективным, так как космологическое микроволновое излучение имеет характер гауссова и адиабатического [7]. Такой характер микроволнового излучения предсказывается в том числе и в инфляционной модели [8]. В целом же подход с использованием уравнения Риккати для решения нелинейных уравнений в частных производных находит все более широкое применение [9, 10].

В явном виде связь между уравнениями Фридмана и уравнением КдФ изучена в [2] для ряда космологических сценариев: инфляционной модели, циклической Вселенной и т. д. Для инфляционной модели получено выражение для постоянной Хаббла в зависимости от решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка для потенциальной функции. Предложенный подход предполагает явное вычисление производной Шварца [11]. В указанной работе было использовано односолитонное решение уравнения КдФ. Представляется интересным изучить, как изменятся полученные результаты, если вместо односолитонного решения использовать двухсолитонное. В настоящей работе рассмотрены математические аспекты указанной проблемы.

**Постановка задачи.** В работе [2] уравнение КдФ рассматривается в виде

$$u_t + \frac{3}{u_0}uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где  $u_0$  – некоторая константа,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$  и т. п.

При помощи замены зависимой переменной  $u \rightarrow -2u_0u$  это уравнение можно записать в стандартной форме

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2)$$

Односолитонное решение уравнения (2) известно [1]:

$$u(x,t) = -\frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\lambda}{2} (x - \lambda^2 t) \right], \quad (3)$$

где  $\lambda$  – постоянная. Если ввести новую независимую переменную  $\varphi = x - \lambda t$ , то уравнение КдФ можно записать в виде ОДУ следующего вида:

$$-\lambda^2 u' + u''' + \frac{3}{u_0} uu' = 0, \quad (4)$$

а его решение в виде  $u = u(\varphi)$ . Здесь посредством штриха обозначена производная по  $\varphi$ . Для тривиального решения  $u = 0$  преобразовании Бэклунда можно записать в виде

$$u = u_0 (\lambda^2 - 4y^2), \quad (5)$$

где  $y = y(\varphi)$  – новая неизвестная функция, являющаяся решением уравнения Риккати вида

$$y' + y^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0. \quad (6)$$

Решение данного уравнения удовлетворяет следующему ОДУ третьего порядка:

$$S[y(\varphi)] = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2 = -\frac{\lambda^2}{2}, \quad (7)$$

левая часть которого представляет собой производную Шварца. Именно свойства этой производной позволили установить аналогию между распространением солитона и динамикой Вселенной в инфляционной модели. В этой связи в качестве первого этапа исследования интересно посмотреть, как изменится уравнение (7), если использовать двухсолитонное решение уравнения КдФ.

**Двухсолитонное решение.** В общем случае двухсолитонное решение уравнение КдФ имеет вид [12]

$$u(x,t) = -2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{\lambda_2^2 \operatorname{cosech}^2(\gamma_2) + \lambda_1^2 \operatorname{cosech}^2(\gamma_1)}{(\lambda_2 \operatorname{cth}(\gamma_2) - \lambda_1 \operatorname{cth}(\gamma_1))^2}, \quad (8)$$

$$\gamma_1 = \lambda_1 x - 4\lambda_1^3 t + \delta_1, \quad \gamma_2 = \lambda_2 x - 4\lambda_2^3 t + \delta_2, \quad \delta_i = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{m_i(0)}{2\lambda_i} \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right) \right], \quad i = 1, 2,$$

где параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют тот же смысл, что и параметр  $\lambda$  в соотношении (3), а  $m_i(0)$  – нормировочные константы, появляющиеся при решении задачи рассеяния. Решение рассматриваемой нами задачи с использованием соотношения (8) представляется весьма громоздким. Гораздо проще исследовать предельные случаи двухсолитонного решения в моменты времени, значительно отстоящие в прошлое или будущее от момента времени взаимодействия его составляющих. В первом случае соотношение (8) можно представить в виде

$$u(x,t) = -2\lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 - \Delta) - 2\lambda_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 + \Delta), \quad (9)$$

где  $\Delta = \operatorname{arctg}(\lambda_1/\lambda_2)$ , а во втором

$$u(x,t) = -2\lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 + \Delta) - 2\lambda_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 - \Delta). \quad (10)$$

Видно, что солитонные компоненты взаимодействуют упруго и единственным результатом этого является дополнительный сдвиг по фазе. В обоих случаях двухсолитонное решение можно записать в виде

$$u(x,t) = u_1(x - 4\lambda_1^2 t) + u_2(x - 4\lambda_2^2 t). \quad (11)$$

По аналогии с решением в виде одиночного солитона введем две новые независимые переменные  $\varphi_1 = x - 4\lambda_1^2 t$  и  $\varphi_2 = x - 4\lambda_2^2 t$ , причем, поскольку различие между ними состоит только в  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , дифференцирование по этим переменным будем в обоих случаях одинаково обозначать штрихом, учитывая при вычислении производных очевидное отличие в коэффициентах.

**Построение уравнений.** Будем использовать формальное соотношение (11). Анализ фазовых сдвигов может быть проведен на заключительной стадии исследования. Подставим (11) в уравнение (1). В результате получим соотношение

$$-4\lambda_1^2 u_1' - 4\lambda_2^2 u_2' + u_1''' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} (u_1 u_2)' = 0. \quad (12)$$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$(u_1 u_2)' = 0, \quad (13)$$

то уравнение (12) расщепляется на два не связанных между собой уравнения и для каждой из составляющих решения (11) можно получить результаты, аналогичные результатам, полученным в работе [2] для односолитонного решения. Оценим, какие ограничения при этом накладываются на параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Подставим соотношение (9) в уравнение (13) и, считая время достаточно большим, опустим конкретные значения  $x$ , тогда можно получить соотношение вида

$$\frac{m_1(0)}{m_2(0)} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2 + \lambda_1)},$$

из которого можно сделать заключение о возможном значении одного из параметров  $\lambda_i$ ,  $i=1,2$ , если задан другой.

Рассмотрим случай, когда условие (13) не выполняется. Теперь уравнение (12) можно заменить одной из двух следующих систем уравнений:

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0, \quad (14)$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \quad (15)$$

или

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \quad (16)$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0. \quad (17)$$

В обоих случаях симметрия относительно замены индексов 1 и 2 очевидна.

Введем две новые функции  $y_1$  и  $y_2$  при помощи соотношений

$$u_1 = u_0(\lambda_1^2 - a_1 y_1^2), \quad (18)$$

$$u_2 = u_0(\lambda_2^2 - a_2 y_2^2). \quad (19)$$

Подставим соотношения (18) и (19), например, в уравнения (16) и (17). В результате получим систему уравнений, которую можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{(y_1^2)'''}{(y_1^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \quad (20)$$

$$\frac{(y_2^2)'''}{(y_2^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2. \quad (21)$$

Для предельного случая двухсолитонного решения данную систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка можно рассматривать как аналог уравнения (7).

**Преобразование системы уравнений для функций  $y_1$  и  $y_2$  при помощи производной Шварца.** Запишем для каждой из функций  $y_1$  и  $y_2$  уравнение вида (7):

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y_1''}{y_1'} \right)^2 = -\frac{\lambda_1^2}{2}, \quad (22)$$

$$\frac{y_2'''}{y_2'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y_2''}{y_2'} \right)^2 = -\frac{\lambda_2^2}{2}. \quad (23)$$

Это можно сделать, поскольку как для времени, удаленного в прошлое, так и для времени, соответствующего будущему, можно считать, что компоненты двухсолитонного решения практически не взаимодействуют друг с другом и их с хорошей точностью можно рассматривать как односолитонные решения.

Вычтем из уравнения (20) уравнение (21). Если в полученное соотношение подставить явно вычисленные производные от квадратов функций  $y_1$  и  $y_2$ , то можно получить уравнение вида

$$\frac{4}{3} S[y_2] - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_2''}{y_2} = \frac{4}{3} S[y_1] - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_1''}{y_1'} - \frac{y_1''}{y_1}. \quad (24)$$

Левая часть уравнения (24) зависит только от функции  $y_2$ , а правая – от функции  $y_1$ . Можно заключить, что левая и правая части этого уравнения равны некоторой константе. Следовательно, соотношение (24) описывает некоторую величину, инвариантную относительно перестановки индексов.

**Уравнение связи между функциями  $y_1$  и  $y_2$ .** Аналитическое решение системы уравнений (20), (21) в общем случае достаточно затруднено. Однако возможен частный случай, когда некоторое упрощение может быть реализовано. Введем следующие обозначения:

$$y_1^2 = m, \quad y_2^2 = n, \quad b_1 = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \quad b_2 = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2.$$

В данных обозначениях систему уравнений (22), (23) можно представить в виде

$$m''' - 3m'(m+n) = b_1 m', \quad (25)$$

$$n''' - 3n'(m+n) = b_2 n'. \quad (26)$$

Полученную систему достаточно просто исследовать при условии  $b_1 = b_2 = b$ . Сложим уравнения (25) и (26), тогда, если ввести новую функцию  $z = m + n$ , полученное уравнение можно записать следующим образом:

$$z''' - (3z + b)z' = 0. \quad (27)$$

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка вида (27) изучено достаточно хорошо [13]. В общем случае оно имеет вид

$$z''' = f(z)z', \quad (28)$$

а общее решение такого уравнения записывается следующим образом:

$$C_3 \pm x = \int [C_2 z + C_1 + 2 \int F(z) dz]^{-1/2} dz,$$

где  $x$  – независимая переменная,  $C_i$ ,  $i=1,2,3$ , – постоянные интегрирования, а функция  $F(z)$  определяется соотношением

$$F(z) = \int f(z) dz.$$

В нашем случае  $f(z) = 3z + b$ , и общее решение уравнения принимает вид

$$C_3 \pm x = \int [C_2 z + C_1 + bz^2 + z^3]^{-1/2} dz. \quad (29)$$

Достаточно просто интеграл (29) вычисляется при  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = b = 3$ , тогда из соотношения (29) получаем

$$C_3 \pm x = \pm \frac{2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

При указанных выше ограничениях выражение (30) описывает связь между компонентами двухсолитонного решения уравнения КдФ в тех случаях, когда время (по модулю) достаточно велико. Ясно, что в силу этих ограничений данное соотношение носит приближенный характер и дает только качественную картину поведения решения.

### Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
2. Lidsey J. E. // arXiv: astro-ph/1205.5641 [Electronic resource].
3. Haret C. R. // Mod. Phys. Lett. A. 2002. Vol. 17, N 11. P. 667–670.
4. Faraoni V. // Am. J. Phys. 1999. Vol. 67, N 8. P. 732–734.
5. Rosu H. C. // Mod. Phys. Lett. A. 2000. Vol. 15, N 15. P. 979–990.
6. Rosu H. C. // Mod. Phys. Lett. A. 2001. Vol. 16, N 17. P. 1147–1150.
7. Spergel D. N. et al // Astrophys. J. Suppl. 2003. Vol. 148, N 1. P. 97–118.
8. Khoury J., Seinhart P. J., Turok N. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, N 16. 161301.
9. Tao Geng, Wen-Rui Shan // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 372, N 10. P. 1626–1630.
10. Lou S. Y. // arXiv: nlin/1308.589 [Electronic resource].
11. Hille E. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York, 1976.
12. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М., 1983.
13. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

M. A. KNYAZEV, N. G. BLINKOVA

### RELATION BETWEEN ONE-SOLITON COMPONENTS OF TWO-SOLITON SOLUTION FOR THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

#### Summary

The system of third-order nonlinear differential equations for components of two-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation at  $t \rightarrow \pm \infty$  is constructed. The equation describing the relation between these components is derived, and a general solution of this equation is obtained for one special case.