УДК 539.3

Белорусский национальный технический университет, Минск

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Гончарова С.В.

In this paper we consider the operator method of constructing solutions of wave equations of thermoelasticity.

Представим дифференциальные уравнения термоупругости

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \gamma\Theta_{,i}, \tag{1}$$

$$\Theta_{,jj} - (1/\chi)\dot{\Theta} - \eta\dot{e} = -Q/\chi, \tag{2}$$

в более удобном для дальнейших рассуждений операторном виде

$$L_{ij}(u_j) + L_{i4}(\Theta) = -F_i, \tag{3}$$

$$L_{4i}(u_i) + L_{44}\Theta = -Q/\chi,\ i,j = 1,2,3. \tag{4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$L_{ij} = \Box_2^2\delta_{ij} + a\partial_i\partial_j,\ L_{i4} = -\gamma_0\partial_i,\ L_{4i} = -\eta\partial_t\partial_i,\ L_{44} = \Box_3^2,\ F_i = X_i/\mu,$$

$$\gamma_0 = \gamma/\mu,\ a = (\lambda+\mu)/\mu,\ \Box_2^2 = \nabla^2 - (1/c_2^2)^2\partial_t^2,\ \Box_3^2 = \nabla^2 - (1/\chi)\partial_t,$$

$$\partial_t = \partial/\partial t,\ \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\ \partial_1 = \partial/\partial x,\ \partial_2 = \partial/\partial y,\ \partial_3 = \partial/\partial z;$$

λ и μ – коэффициенты Ламе; $\chi = \lambda_0/c_\varepsilon$, $Q = w/\lambda_0$, λ_0 – коэффициент теплопроводности, w – большое количество тепла, производимого в единице объема за единицу времени, $c_\varepsilon = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_\varepsilon$ – удельная теплоемкость при постоянной деформации; $F_i = X_i/\mu$ – компоненты массовых сил; u_i и u_j – компоненты перемещений, ρ – плотность материала; $\gamma_0 = \gamma/\mu$, $\gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha_t$, α_t – коэффициент линейного термического расширения; $Q = T - T_0$, T - абсолютная температура точки M тела, T_0– температура, при котором тело находится в естественном состоянии; $\eta = \gamma T_0/\lambda_0$; $\dot{e} = \dot{\varepsilon}_{jj} = \dot{u}_j$, j – скорость изменения объема.

Уравнения (3) и (4) можно записать также в виде следующей таблицы, составленной из операторов и свободных членов:

	u_1	u_2	u_3	Θ	
I	$\Box_2^2+a\partial_1^2$	$a\partial_1\partial_2$	$a\partial_1\partial_3$	$-\gamma_0\partial_1$	$-F_1$
II	$a\partial_2\partial_1$	$\Box_2^2+a\partial_2^2$	$a\partial_2\partial_3$	$-\gamma_0\partial_2$	$-F_2$
III	$a\partial_3\partial_1$	$a\partial_3\partial_2$	$\Box_2^2+a\partial_3^2$	$-\gamma_0\partial_3$	$-F_3$
IV	$-\eta\partial_t\partial_1$	$-\eta\partial_t\partial_2$	$-\eta\partial_t\partial_3$	$\Box_3^2$	$-Q/\chi$

(5)

Введем четыре функции χ_i (i = 1, 2, 3, 4), связанные с перемещениями и температурой следующим образом:

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \chi_3 & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix}, \qquad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & \chi_4 & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix},$$

$$u_3=\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 & L_{14}\\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 & L_{24}\\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 & L_{34}\\ L_{41} & L_{42} & \chi_4 & L_{44}\end{vmatrix},\qquad \Theta=\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \chi_1\\ L_{21} & L_{32} & L_{23} & \chi_2\\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \chi_3\\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & \chi_4\end{vmatrix}.$$

Найдем эти определители, рассматривая операторы, как числа.

Остановимся более подробно на нахождении u_1. Раскладывая определитель по первому столбцу, запишем

$$u_1=\begin{vmatrix} L_{22}L_{23}L_{24}\\ L_{32}L_{33}L_{34}\\ L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}\chi_1-\begin{vmatrix} L_{12}L_{13}L_{14}\\ L_{32}L_{33}L_{34}\\ L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}\chi_2+\begin{vmatrix} L_{12}L_{13}L_{14}\\ L_{22}L_{23}L_{24}\\ L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}\chi_3-\begin{vmatrix} L_{12}L_{13}L_{14}\\ L_{22}L_{23}L_{24}\\ L_{32}L_{33}L_{34}\end{vmatrix}\chi_4,$$

Прежде, чем вычислить все эти определители установим зависимость между $\Box_2^2$ и $\Box_1^2$. Имеем

$$c_2^2=\frac{\mu}{\rho},\ \ c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\mu}{\rho}=(a+1)c_2^2 \text{ или } c_2^2=\frac{c_1^2}{a+1}, \text{ где } a=\frac{\lambda+\mu}{\mu}, \text{ тогда}$$

$$\Box_2^2=\nabla^2-\frac{\partial_t^2}{c_2^2}=\nabla^2-\frac{a+1}{c_1^2}\partial_t^2=\nabla^2+a\nabla^2-\frac{a+1}{c_1^2}-a\nabla^2=(a+1)\left(\nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\right)$$

$$-a\nabla^2=(a+1)\Box_1^2-a\nabla^2.$$

Таким образом $\Box_2^2=(a+1)\Box_1^2-a\nabla^2$ или $\Box_2^2+a\nabla^2=(a+1)\Box_1^2$

$$\begin{vmatrix} L_{22}L_{23}L_{24}\\ L_{32}L_{33}L_{34}\\ L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}=L_{22}L_{33}L_{44}+L_{23}L_{34}L_{42}+L_{32}L_{43}L_{24}-L_{42}L_{33}L_{24}-$$

$$-L_{32}L_{23}L_{34}-L_{42}L_{33}L_{24}=\Box_3^2(\Box_2^2+a\partial_2^2)(\Box_2^2+a\partial_3^2)+a\eta\nu_0\partial_t\partial_2^2\partial_3^2+$$

$$+a\eta\nu_0\partial_t\partial_2\partial_3^2-(\Box_2^2+a\partial_3^2)\eta\nu_0\partial_t\partial_2^2-a^2\partial_2^2\partial_3^2\Box_3^2-(\Box_2^2+a\partial_2^2)\eta\nu_0\partial_t\partial_3^2=$$

$$=[\Box_2^2\Box_2^2+a\Box_2^2(\partial_2^2+\partial_3^2)]\Box_3^2-\eta\nu_0\partial_t\Box_2^2\partial_2^2-\eta\nu_0\partial_t\Box_2^2\partial_3^2=$$

$$=\{\Box_3^2[\Box_2^2\partial_2^2+a(\nabla^2-\partial_1^2)]-n\nu_0\partial_t(\nabla^2-\partial_1^2)\}\Box_2^2=\{\Box_3^2[(a+1)\Box_1^2-$$

$$a\partial_1^2]-n\nu_0\partial_t(\nabla^2-\partial_1^2)\}\Box_2^2=\{(a+1)\Box_1^2\Box_3^2-\partial_1^2(a\Box_3^2-n_2\nu_0\partial_t)=$$

$$=(\Omega-\partial_1^2\Gamma)\Box_2^2\chi_1.$$

Аналогично находим второе слагаемое в u_2

$$\begin{vmatrix} L_{12}L_{13}L_{14}\\ L_{32}L_{33}L_{34}\\ L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}=L_{12}L_{33}L_{44}+L_{13}L_{34}L_{42}+L_{32}L_{43}L_{14}-L_{42}L_{33}L_{14}-$$

$$-L_{32}L_{13}L_{44}-L_{43}L_{14}L_{12}=a\partial_1\partial_2(\Box_2^2+a\partial_3^2)\Box_3^2+a\partial_1\partial_3(-\nu_0\partial_3)(-\eta\partial_t\partial_2)+$$

$$+a\partial_3\partial_2(-\nu_0\partial_1)(-\eta\partial_t\partial_3)-(-\eta\partial_t\partial_2)(\Box_2^2+a\partial_3^2)(-\nu_0\partial_1)-a\partial_3\partial_2\cdot a\partial_1\partial_3\Box_3^2-$$

$$-(-\nu_0\partial_3)(-\eta\partial_t\partial_3)a\partial_1\partial_2=a\partial_1\partial_2\Box_2^2\Box_3^2-\eta\nu_0\partial_t\partial_1\partial_2\Box_2^2=\partial_1\partial_2(a\Box_3^2-$$

$$-\gamma_0\eta\partial_t)\Box_2^2=\partial_1\partial_2\Gamma\Box_2^2$$

$$\begin{vmatrix} L_{12}L_{13}L_{14}\\ L_{22}L_{23}L_{24}\\ L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}=L_{12}L_{23}L_{44}+L_{22}L_{43}L_{14}+L_{13}L_{24}L_{42}-L_{42}L_{23}L_{14}-$$

$$-L_{22}L_{13}L_{44}-L_{43}L_{24}L_{12}=a\partial_1\partial_2\cdot a\partial_2\partial_3\,\Box_3^2+(\Box_2^2+a\partial_2^2(-\eta\partial_t\partial_3)(-\nu_0\partial_1)+$$
$$+a\partial_1\partial_3(-\nu_0\partial_2)(-\eta\partial_t\partial_2)-(-\eta\partial_t\partial_2)a\partial_2\partial_3(-\nu_0\partial_1)-(\Box_2^2+a\partial_2^2)a\partial_1\partial_3\,\Box_3^2-$$
$$-(-\eta\partial_t\partial_2)(-\nu_0\partial_1)a\partial_1\partial_2=\eta\nu_0\partial_t\partial_1\partial_3\,\Box_2^2-a\partial_1\partial_3\,\Box_2^2\,\Box_3^2=$$
$$=-\partial_1\partial_3(\Box_3^2-\nu_0\eta\partial_t)\,\Box_2^2=-\partial_1\partial_3\Gamma\,\Box_2^2$$

$$\begin{vmatrix} L_{12}L_{13}L_{14} \\ L_{22}L_{23}L_{24} \\ L_{32}L_{33}L_{34}\end{vmatrix}=L_{12}L_{23}L_{34}+L_{22}L_{33}L_{14}+L_{13}L_{24}L_{32}-L_{32}L_{23}L_{14}-$$
$$-L_{22}L_{13}L_{34}-L_{33}L_{24}L_{12}=a\partial_1\partial_2\cdot a\partial_2\partial_3(-\nu_0\partial_3)+(\Box_2^2+a\partial_2^2)(\Box_2^2+a\partial_3^2)\times$$
$$\times(-\nu_0\partial_1)+a\partial_1\partial_3(-\nu_0\partial_2)a\partial_3\partial_2-a\partial_3\partial_2a\partial_2\partial_3(-\nu_0\partial_1)-(\Box_2^2+a\partial_2^2)a\partial_1\partial_3\times$$
$$\times(-\nu_0\partial_3)-(\Box_2^2+a\partial_3^2)(-\nu_0\partial_2)a\partial_1\partial_2=(\Box_2^2+a\partial_2^2)(-\nu_0\partial_1\,\Box_2^2-a\nu_0\partial_1\partial_3^2+$$
$$+a\nu_0\partial_1\partial_3^2)+\Box_2^2a\gamma_0\partial_1\partial_2^2=-\nu_0\partial_1(\Box_2^2)^2.$$

Полагая $\varphi_i=\Box_2^2\chi_i$, $i=1,2,3,4$ и подставляя в (6) значения найденных определителей, получаем

$$u_1=(\Omega-\partial_1^2\Gamma)\varphi_1-\partial_1\partial_2\Gamma\varphi_2-\partial_1\partial_3\Gamma\varphi_3+\gamma_0\partial_1\Box_2^2\varphi_4 \qquad (6)$$

Здесь $\Omega\equiv(1+a)\Box_1^2\,\Box_3^2-\gamma_0\eta\partial_t\nabla^2$, $\Gamma\equiv a\Box_3^2-\gamma_0\eta\partial_t$.

Далее запишем

$$u_2=-\begin{vmatrix} L_{21}L_{23}L_{24} \\ L_{31}L_{33}L_{34} \\ L_{41}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}\chi_1+\begin{vmatrix} L_{11}L_{13}L_{14} \\ L_{31}L_{33}L_{34} \\ L_{41}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}\chi_2-\begin{vmatrix} L_{11}L_{13}L_{14} \\ L_{21}L_{23}L_{24} \\ L_{41}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}\chi_3+\begin{vmatrix} L_{11}L_{13}L_{14} \\ L_{21}L_{23}L_{24} \\ L_{31}L_{33}L_{34}\end{vmatrix}\chi_4$$

$$u_3=\begin{vmatrix} L_{21}L_{22}L_{24} \\ L_{31}L_{32}L_{34} \\ L_{41}L_{42}L_{44}\end{vmatrix}\chi_1-\begin{vmatrix} L_{11}L_{12}L_{14} \\ L_{31}L_{32}L_{34} \\ L_{41}L_{42}L_{44}\end{vmatrix}\chi_2+\begin{vmatrix} L_{11}L_{12}L_{14} \\ L_{21}L_{23}L_{24} \\ L_{41}L_{42}L_{44}\end{vmatrix}\chi_3-\begin{vmatrix} L_{11}L_{12}L_{14} \\ L_{21}L_{22}L_{24} \\ L_{31}L_{32}L_{34}\end{vmatrix}\chi_4$$

$$\theta=-\begin{vmatrix} L_{21}L_{22}L_{23} \\ L_{31}L_{32}L_{33} \\ L_{41}L_{42}L_{43}\end{vmatrix}\chi_1+\begin{vmatrix} L_{11}L_{12}L_{13} \\ L_{31}L_{32}L_{33} \\ L_{41}I_{42}L_{43}\end{vmatrix}\chi_2-\begin{vmatrix} L_{11}L_{12}L_{13} \\ L_{21}L_{22}L_{23} \\ L_{41}L_{42}L_{43}\end{vmatrix}\chi_3+\begin{vmatrix} L_{11}L_{12}L_{13} \\ L_{21}L_{22}L_{23} \\ L_{31}L_{42}L_{43}\end{vmatrix}\chi_4.$$

После чего определяем остальные соотношения

$$\begin{aligned} u_2&=-\partial_2\partial_1\Gamma\varphi_1-(\Omega-\partial_2^2\Gamma)\varphi_2-\partial_2\partial_3\Gamma\varphi_3+\gamma_0\partial_2\Box_2^2\varphi_4,\\ u_3&=-\partial_3\partial_1\Gamma\varphi_1-\partial_3\partial_2\Gamma\varphi_2-(\Omega-\partial_3^2\Gamma)\varphi_3+\gamma_0\partial_3\Box_2^2\varphi_4, \qquad (7)\\ \Theta&=\eta\partial_t\partial_1\Box_2^2\varphi_1+\eta\partial_t\partial_2\Box_2^2\varphi_2+\eta\partial_t\partial_3\Box_2^2\varphi_3+(1+a)\Box_1^2\,\Box_2^2\varphi_4.\end{aligned}$$

Для нахождения разрешающих уравнений, входящих в решение функций $\varphi_i=1,2,3,4$ подставим (6) и (7) в (3) и (4). Определим разрешающее уравнение а примере функции φ_1.

$$(\Box_2^2+a\partial_1)(\Omega-\partial_1^2\Gamma)\varphi_1+a(\partial_1\partial_2)(-\partial_2\partial_1)\Gamma\varphi_1+a\partial_1\partial_3(-\partial_3\partial_1)\Gamma\varphi_1-$$
$$\gamma_0\partial_1\eta\partial_t\partial_1\,\Box_2^2\varphi_1+\frac{X_1}{\mu}=0$$

Раскроем скобки и перепишем данное уравнение в виде:

$$[\Box_2^2\Omega-a\partial_1^2\Omega-\Box_2^2\partial_1^2\Gamma-a\partial_1^2(\partial_1^2+\partial_1^2+\partial_3^2)\Gamma-\gamma_0\partial_t\eta\partial_1^2\,\Box_2^2]\varphi_1+\frac{X_1}{\mu}=0.$$

Или $[\Box_2^2\Omega - a\partial_1^2\Omega - \Box_2^2\partial_1^2\Gamma - a\partial_1^2\nabla^2\Gamma - \gamma_0\partial_t\eta\partial_1^2\Box_2^2]\varphi_1 + \dfrac{X_1}{\mu} = 0$, т.к. было учтено равенство $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \nabla^2$. На основании известного ранее () тождества $\Box_2^2 + a\nabla^2 = (a+1)\Box_1^2$ это равенство примет вид:

$$[\Box_2^2\Omega + a\partial_1^2\Omega - (a+1)\partial_1^2\Box_1^2\Gamma - \gamma_0\partial_t\eta\partial_1^2\Box_2^2]\varphi_1 + \frac{X_1}{\mu} = 0.$$

Теперь распишем втрое и третье слагаемые

$$a\partial_1^2\Omega - (a+1)\Box_1^2\partial_1^2\Gamma = \partial_1^2[a(1+a)\Box_1^2\Box_3^2 - \gamma_0\eta\partial_t\nabla^2 - (a+1)\Box_1^2 a\Box_3^2 +$$
$$+ (a+1)\Box_1^2\gamma_0\eta\partial_t] = \gamma_0\eta\partial_t\partial_1^2[(a+1)\Box_1^2 - a\nabla^2] = \gamma_0\eta\partial_t\partial_1^2\Box_2^2,$$

Здесь еще раз было учтено соотношение $()a+1)\Box_1^2 - a\nabla^2 = \Box_2^2$.

Теперь равенство приобретает вид:

$$[\Box_2^2\Omega + \gamma_0\eta\partial_t\partial_1^2\Box_2^2 - \gamma_0\eta\partial_t\partial_1^2\Box_2^2]\varphi_1 + \frac{X_1}{\mu} = 0,$$

или

$$\Box_2^2\Omega\varphi_1 + \frac{X_1}{\mu} = 0. \tag{8}$$

Подставляя сюда Ω, перепишем это уравнение в виде:

$$\Box_2^2[(1+a)\Box_1^2\Box_3^2 - \gamma_0\eta\partial_t\nabla^2]\varphi_1 + \frac{X_1}{\mu} = 0.$$

Поделив это уравнение на $1 + a = 1 + \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}$ и учитывая, что

$$(1+a)\mu = \lambda + 2\mu = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\rho = c_1^2\rho u\frac{\gamma_0}{a+1} = \frac{\gamma}{\mu} \div \frac{\lambda+2\mu}{\mu} = \frac{\gamma}{\lambda+2\mu} = m,$$

Окончательно получим:

$$\Box_2^2[\Box_1^2\Box_3^2 - m\eta\partial_t\nabla^2]\varphi_1 + \frac{X_1}{c_1^2\rho} = 0. \tag{9}$$

Аналогично после элементарных, но достаточно громоздких преобразований, получаем разрешающие соотношения для оставшихся функций и в результате получим систему четырех уравнений

$$\Box_2^2[\Box_1^2\Box_3^2 - m\eta\partial_t\nabla^2]\varphi_i + X_i/(c_1^2\rho) = 0,\ i = 1,2,3, \tag{10}$$

$$[\Box_1^2\Box_3^2 - m\eta\partial_t\nabla^2]\psi + Q\mu/(\chi c_1^2\rho) = 0. \tag{11}$$

где $\psi = \Box_2^2\varphi_4$, $m = \dfrac{\gamma}{\lambda+2\mu}$.

Отметим, что структура проводимых преобразований достаточно однообразна и базируется на тождествах вида $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \nabla^2$ и $(1+a)\Box_2^2 - a\nabla^2 = \Box_1^2$. Все остальные операции носят алгебраический характер, связанный с раскрытием скобок и использовании обозначений $\Omega = (1+a)\Box_1^2\Box_3^2 - \gamma_0\eta\partial_t\nabla^2$ и $\Gamma = a\Box_3^2 - \gamma_0\eta\partial_t$.

Структура разрешающих уравнений такова, что первое уравнение получено из перемещений содержащих φ_1, второе – из φ_2, третье – из φ_3. Убедимся в том, что если подставить в первое уравнение перемещения, содержащие φ_2, φ_3 и ψ, то получим нули:

$$\varphi_2 : (\Box_2^2 + a\partial_1^2)(-\partial_1\partial_2\Gamma) + a\partial_1\partial_2(\Omega - \partial_2^2\Gamma) + a\partial_1\partial_3(-\partial_3\partial_2\Gamma) -$$

$$\gamma_0\partial_1\eta\partial_t\partial_2\,\Box_2^2=\partial_1\partial_2[-\Box_2^2\Gamma-a(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\Gamma+a\Omega-\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2]=$$

$$=\partial_1\partial_2[-a\,\Box_2^2\,\Box_3^2+\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2-a\nabla^2\Gamma+a\Omega-\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2]=$$

$$\partial_1\partial_2[a\,\Box_2^2\,\Box_3^2-a\nabla^2 a\,\Box_3^2+a\nabla^2\gamma_0\eta\partial_t+a(a+1)\,\Box_1^2\,\Box_3^2-a\gamma_0\eta\partial_t]=$$

$$a\partial_1\partial_2\,\Box_2[(1+a)\,\Box_2^2-a\nabla^2-\Box_2^2]=a\partial_1\partial_2\,\Box_2^2(\Box_2^2-\Box_2^2)=0.$$

$$\varphi_3:(\Box_2^2+a\partial_1^2)(-\partial_1\partial_3\Gamma)+a\partial_1\partial_3(-\partial_2\partial_3\Gamma)+a\partial_1\partial_3(\Omega-\partial_3^2\Gamma)-$$

$$\gamma_0\partial_1\eta\partial_t\partial_3\,\Box_2^2=\partial_1\partial_3[-\Box_2^2\Gamma-a(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\Gamma+a\Omega-\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2]=$$

$$=\partial_1\partial_3[-a\,\Box_2^2\,\Box_3^2+\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2-a\nabla^2\Gamma+a\Omega-\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2]=$$

$$\partial_1\partial_3[-a\,\Box_2^2\,\Box_3^2-a\nabla^2 a\,\Box_3^2+a\nabla^2\gamma_0\eta\partial_t+a(a+1)\,\Box_1^2\,\Box_3^2-a\gamma_0\eta\partial_t\nabla^2]=$$

$$a\partial_1\partial_3\,\Box_3^2[(1+a)\,\Box_2^2-a\nabla^2-\Box_2^2]=a\partial_1\partial_3\,\Box_3^2(\Box_2^2-\Box_2^2)=0.$$

$$\psi:(\Box_2^2+a\partial_1^2)\gamma_0\partial_1+a\partial_1\partial_2\gamma_0\partial_2+a\partial_1\partial_3\gamma_0\partial_3-\gamma_0\partial_1(1+a)\,\Box_1^2=$$

$$\gamma_0\partial_1[\Box_2^2+a(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)-(1+a)\,\Box_1^2]=\gamma_0\partial_1[\Box_2^2-a\nabla^2-(1+a)\,\Box_1^2]=$$

$$\gamma_0\partial_1[\Box_2^2+a\nabla^2-(1+a)\,\Box_1^2]=\gamma_0\partial_1(\Box_2^2-\Box_2^2)=0.$$

Таким образом, имеет место обобщенное условие ортогональности: разрешающие уравнения получаются за счет диагональных элементов матрицы, в то время как остальные дают нули. Этот результат полностью согласуется с теоретическими разработками, изложенными в [1, 2], если установить, что полученные разрешающие уравнения представляют собой определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}L_{11}L_{12}L_{13}L_{14}\\L_{21}L_{22}L_{23}L_{24}\\L_{31}L_{32}L_{33}L_{34}\\L_{41}L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}.$$

Убедимся в этом непосредственно, раскрыв его, например, по первому столбцу.

$$\det=(\Box_2^2+a\partial_1^2)\begin{vmatrix}L_{22}L_{23}L_{33}\\L_{32}L_{33}L_{34}\\L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}-a\partial_1\partial_2\begin{vmatrix}L_{12}L_{13}L_{14}\\L_{32}L_{33}L_{34}\\L_{42}L_{43}L_{44}\end{vmatrix}+\partial_1\partial_3\begin{vmatrix}L_{11}L_{12}L_{14}\\L_{21}L_{23}L_{24}\\L_{41}L_{42}L_{44}\end{vmatrix}-\eta\partial_t\partial_1\begin{vmatrix}L_{12}L_{13}L_{14}\\L_{22}L_{23}L_{24}\\L_{32}L_{33}L_{34}\end{vmatrix}$$

Подставляя сюда вычисленные ранее значения определителей, получим:

$$\det=(\Box_2^2+a\partial_1^2)(\Omega-\partial_1^2\Gamma)\,\Box_2^2-a\partial_1^2\partial_2^2\Gamma-a\partial_1^2\partial_3^2\,\Box_2^2\Gamma-\gamma_0\eta\partial_t\partial_1^2(\Box_2^2)^2=$$

$$=\Box_2^2[\Box_2^2\Omega+a\partial_1^2\Omega-\partial_1^2\,\Box_2^2\Gamma-a\partial_1^2\nabla^2\Gamma-\gamma_0\eta\partial_t\partial_1^2\,\Box_2^2]=\Box_2^2\{\Box_2^2\Omega+$$

$$+\partial_1^2[a(1+a)\,\Box_2^2\,\Box_3^2-a\gamma_0\eta\partial_t\nabla^2-\Box_2^2 a\,\Box_3^2+\Box_2^2\gamma_0\eta\partial_t-a^2\nabla^2\,\Box_3^2+$$

$$+a\nabla^2\gamma_0\eta\partial_t-\gamma_0\eta\partial_t\,\Box_2^2\}=\Box_2^2\{\Box_2^2\Omega+a\partial_1^2\,\Box_3^2[(1+a)\,\Box_2^2-a\nabla^2-\Box_2^2\}=$$

$$=\Box_2^2[\Box_2^2\Omega+a\partial_1^2\,\Box_3^2(\Box_2^2-\Box_2^2)]=\Box_2^2\,\Box_2^2\Omega.$$

Отметим тот факт, что все проводимые преобразования базируются на теории определителей, а также на утверждении А.И. Лурье о том, что операторы дифференцирования подчинены тем же формальным правилам сложения и умножения, что и алгебраические величины [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье, А.И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / А.И. Лурье // Труды Ленингр. индустр. ин-та. – 1937. – Т. 3, № 6. – С. 31–36.
2. Байда, Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости / Э.Н. Байда. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 232 с.

Поступила 16.11.11