Jury, M. Mansour // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1987. – Vol. AC 32. – No 10. – P. 909-913.

УДК 517.6517.5

О приближенном представлении логарифмами решения одной дифференциальной вариационной задачи

Мелешко И.Н.
Белорусский национальный технический университет

Как известно, краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона эквивалентны задаче вариационного исчисления – о минимуме интеграла, для которого данное дифференциальное уравнение является уравнением Эйлера-Лагранжа. Например, задача о минимуме интеграла

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]dxdy, \qquad (1)$$

где область D – единичный круг с центром в начале координат при граничном условии Дирихле приводит к следующей краевой задаче Дирихле для уравнения Пуассона в единичном круге:

$$\Delta u=-1,\ r<1, \qquad (2)$$

$$u\big|_{r=1}=f(\varphi),\ -\pi\le\varphi\le\pi. \qquad (3)$$

С помощью теории логарифмического потенциала и рядов Фурье точное решение краевой задачи (2), (3) представимо в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|1-r|<1}\ln\left|\frac{1-z\bar{t}}{t-z}\right|d\sigma, \qquad (4)$$

где $r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi,\ t=\rho e^{i\tau},\ z=re^{i\tau}$. Получены формулы для вычисления интегралов в правой части (4) и на их основе сконструировано эффективное приближенное представление логарифмами задачи о минимуме интеграла (1) при условии (3):

$$u(r,\varphi)\approx\frac{1}{4}(1-r^2)+$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\left\{h+2\,\mathrm{Im}\left[\ln\left(1-ze^{-i\left(\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i\left(\varphi_k-\frac{h}{2}\right)}\right)\right]\right\}f(\varphi_k), \qquad (5)$$

где $h = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, $\varphi_k = kh,\ k = -n, \ldots, -1, 0, \ldots, n.$. Получена равномерная по r и φ $(r \le 1,\ -\pi \le \varphi \le \pi)$ оценка погрешности приближенного решения (5). К задаче о минимуме интеграла (1) приводит задача из теории упругости о равновесии растянутой упругой мембраны. Если мембрана однородная, то интеграл (1) с точностью до постоянного множителя определяет ее потенциальную энергию при малых прогибах.

УДК 517.4

Решение одной задачи оптимизации динамической системы управления в условиях неопределенности

Матвеева Л.Д.
Белорусский национальный технический университет

Пусть в задаче терминального управления

$$J(u) = c'x(t_*) \to \max,\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = x_0,\ Hx(t_*) = g, \qquad (1)$$

$u = (u_1(t), \ldots u_2(t), \ldots, u_r(t))-$ r – вектор управляющих воздействий и при этом $|u(t)| \le 1,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, r\},\ t \in T = [t_0,\ t_*]$ задано некоторое (экспертное) управление $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \ldots, \tilde{u}_r(t)),\ t \in T$, которое не является допустимым. Данному экспертному управлению $\tilde{u}(t)$ соответствует траектория $\tilde{x}(t),\ t \in T$, не удовлетворяющая терминальному ограничению, т.е. $Hx(t_*) \ne g$. В этом случае для задачи (1) формулируется специальная задача первой фазы:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} \omega_i \to \min,\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = x_0,\\ 0 \le \omega_i \le \omega_i^*,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, m\},\end{gathered} \qquad (2)$$

где

$$\omega_i^* = \begin{cases} g_1 - h_i'\tilde{x}(t_*),\ i \in I^+, \\ h_i'\tilde{x}(t_*) - g_1,\ i \in I^-, \end{cases} \quad I^+ = \{i \in I : h_i'\tilde{x}(t_*) \le g_i\},\ I^- = \{i \in I : h_i'\tilde{x}(t_*) > g_i\}.$$

Совокупность $v = (u,\ \omega)$ из кусочно-постоянных управляющих воздействий $u(t),\ t \in T$ и m – вектор ω назовем обобщенным управляющим воздействием задачи первой фазы. Очевидно, $v = (u,\ 0)$ будет допустимым управлением в задаче (1). Задача (2) решается разработанным ранее автором