УДК 539.3

Белорусский национальный технический университет, Минск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ И НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

Акимов В.А., Новиков А.А.

The paper presents the results of numerical experiments the convergence of orthogonal and nonorthogonal.

Создание соответствующих третьему тысячелетию технологий невозможно без привлечения более современных совершенных идей и новейших математических достижений. В этой связи очевидна актуальность математического метода разложения гладких функций в неортогональные ряды. Это продвижение вперед в теории рядов удалось осуществить за счет впервые разработанного в математике специального вида класса псевдодифференциальных операторов бесконечно высокого порядка [1].

Так как неортогональные ряды еще не достаточно изучены, установим некоторые их характерные особенности путем проведения численного эксперимента. Для определенности возьмем известную бесконечно дифференцируемую функцию $f(x) = exp(ax)$, где a – некоторый вещественный параметр. В качестве исходного базиса, по которому осуществляется разложение заданной гладкой функции $f(x)$, в ряд типа Фурье, возьмем неортогональную тригонометрическую систему функций $\{\sin\lambda_k x, \cos\lambda_k x\}_{k=0}^{k=\infty}$, где λ_k – корни некоторого трансцендентного уравнения $R(\lambda)=0$. В частности, если $\lambda_k = k$, то получим обычную ортогональную тригонометрическую систему базовых функций. Причем в [1] было установлено совпадение результатов разложения операторным методом с классическим методом Фурье:

$$\exp(ax)=\frac{sh(la)}{la}+\frac{2ash(la)}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{a^2+\delta_n^2}\left(\cos\delta_n x-\frac{\delta_n}{a}\sin\delta_n x\right)\right]. \qquad (1)$$

Используя операторный метод как обобщение метода Фурье получим разложение экспотенциальной функции в неортогональный ряд вида:

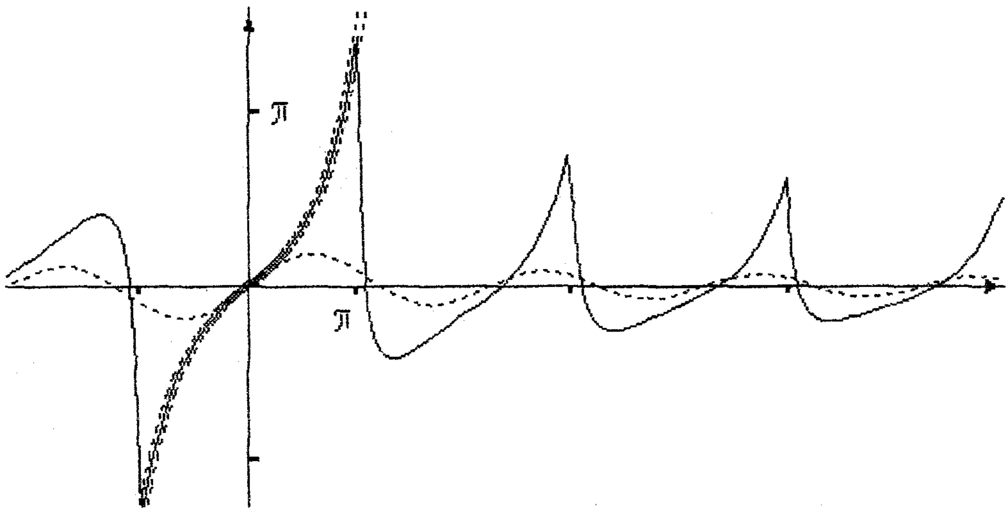
$$\exp(ax)=I_0(a)+2aI_0(a)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{I_1(\lambda_n)(a^2+\lambda_n^2)}\left(\sin\lambda_n x-\frac{a}{\lambda_n}\cos\lambda_n x\right)\right], \qquad (2)$$

где λ_n – корни функции Бесселя $I_0(\lambda_n)=0$, $I_0(a)$ и – модифицированные функции Бесселя. Достоверность полученного результата подтверждается применением теории вычетов для контурного интеграла $I=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n}\frac{z\sin zx-a\cos zx}{zI_0(z)(z^2+a^2)}dz$. Применяя операторный метод, запишем теперь разложение модифицированной функции Бесселя I₁(ax) в неортогональный ряд по функциям Бесселя первого порядка $I_1(\delta_n x)$, где $\delta_n=\frac{n\pi}{l}$.

$$I_1(ax)=\frac{2sh(la)}{l}\sum_{n+1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}\delta_n}{a^2+\delta_n^2}I_1(\delta_n x)\right]. \qquad (3)$$

Достоверность полученного результата также подтверждается применением теории вычетов в контурном интеграле $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_n}\frac{zI_1(zx)dz}{\sin zl(z^2+a^2)}$ совпадение этих и других результатов позволяет говорить о постановке операторного метода в один ряд с теорией вычетов. Кроме того в данной работе предпринята попытка проведения численного эксперимента в отношении выяснения численной рядов (1),(2),(3), а также выяснения скорости сходимости неортогональных рядов по сравнению с ортогональными.

Для количественной оценки аппроксимационных характеристик представления функции $I_1(x)$ частичными суммами S_n ряда по неортогональным функциям $J_1(kx)$ применялся метод численного эксперимента. Для количественного оценивания использовалось как точные вычисления $I_1(x)$, так и сравнение с аналогичными частичными суммами при разложении этой функции в ряд Фурье на интервале [-π, π]. Некоторые результаты эксперимента представлены в графической форме на рисунке 1.



Двойная пунктирная линия график $I_1(x)$, пунктирная линия – $J_1(x)$, сплошная линия – ряд по неортогональным функциям $J_1(kx)$

Проведенные вычисления показали высокие аппраксимационные характеристики исследуемого ряда для частичных сумм для n>100. В частности: наибольшее отклонение от $I_1(x)$, частичной суммы S_{320} ряда по $J_1(kx)$ равно 0,019, а для S_{320} ряда Фурье оно равно 0,32, среднеквадратичные отклонения на интервале [-π, π] также существенно отличаются 0,008 и 0,069 соответственно. Вне интервала [-π, π], построенный ряд сходится к функции, которая обладает такой же «псевдо» периодичностью как и все функции Бесселя $J_n(x)$, т.е. эффективно аппроксимируется простыми зависимостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости : монография. – Минск : Технопринт, 2003. – 101 с.

Поступила 14.11.11