

РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ ЖИДКОСТИ И ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ НА ЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВДОЛЬ ЛИНИИ ТОКА СРЕДСТВАМИ MATHCAD PRIME 1.0

Вервейко Н.Д., Просветов В.И.

Incompressible frictionless flow along streamlines is obtained with a glance to relaxation time and size of microstructure. MathCAD's research shows that increase of relaxation time enhances velocity of energy dissipation.

Введение. В современных технологиях, использующих течение жидких материалов, характерный размер микроструктуры сопоставим с характерным размером течения, так что величину $h/L < 1$ необходимо учитывать [2, 10]. В случае высокоскоростных течений, течений с большими градиентами давлений время установления (релаксации) параметров течения τ в микрообъеме ΔV имеет тот же порядок, что и время восстановления параметров материала в микрообъеме $\frac{dV/dt}{V} = O(1/\tau)$ [3,4].

Ниже рассматривается течение жидкости с учетом времени релаксации τ и характерного размера микроструктуры h .

§ 1. Уравнения движения и неразрывности идеальной несжимаемой жидкости с учетом времени релаксации τ и характерного размера микроструктуры h .

Классическое уравнение движения идеальной несжимаемой жидкости может быть представлено в виде:

$$\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (1)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ – полная производная по времени, ρ_0 – плотность, v_i – компоненты вектора скорости, p – давление.

В случае учета характерного размера микроструктуры h представительного элемента градиент давлений представим в виде [9]:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2)$$

где $\frac{\partial p^*}{\partial x_i}$ – уточненная характеристика градиента давления, Δ – оператор Лапласа.

В уравнении движения (1) ускорение жидкой частицы представляет собой сеточную функцию времени, т.е. ускорение центра масс представительного элемента должны вычисляться в моменты времени с интервалом τ , а в промежутках между этими моментами времени происходит установление параметров течения. Переход от сеточной функции ускорений $\frac{dv_i}{dt}$ к функции непрерывного аргумента $w_i(t)$ требует разложение в ряд Тейлора в момент времени $(t + \tau)$ скорости частицы, что приводит к выражению ускорения жидкой частицы с учетом времени релаксации τ [3]:

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} + \tau \frac{d^2 v_i}{dt^2} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (3)$$

В случае пренебрежимо малых характерного размера h и времени релаксации τ ($h=0$ и $\tau=0$) выражения для градиентов давления (2) и ускорения центра масс представительного элемента (3) принимает классический вид.

Уравнение сохранения массы с учетом характерного размера микроструктуры h представимы в виде [1, 7]

$$\operatorname{div}(\bar{v}) + \frac{h^2}{6} \Delta \operatorname{div}(\bar{v}) = 0, \quad (4)$$

где $\operatorname{div}(\bar{v}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$.

§ 2. Уравнения движения и неразрывности идеальной несжимаемой жидкости вдоль линии тока с учетом времени релаксации τ и характерного размера микроструктуры h .

В случае использования локальной системы координат вдоль линии тока уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) = 0, \quad (5)$$

где v – модуль вектора скорости, l_k – компоненты единичного вектора касательного к линии тока.

Замкнутая система уравнений движения и неразрывности для компонент скорости и давления в случае учета времени релаксации τ и характерного размера микроструктуры h имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\frac{dv_i}{dt} + \tau \frac{d^2 v_i}{dt^2} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим уравнения движения и неразрывности (6) в проекции на касательное направление вдоль линии тока, для этого уравнение движения умножим на направляющий вектор l вдоль касательной к линии тока и положим $v_i = v_l$.

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} \right) + \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial l} \right) \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} \right) \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial l^3} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система уравнений является связанной системой уравнений в частных производных второго порядка по t для скорости и третьего порядка по пространственным координатам для скоростей и давлений.

Для решения поставленной задачи необходимо задать начальные условия для скоростей и ускорений, давления и скорость на границе, а также их первые и вторые производные по нормали к границе. Эти дополнительные условия позволят учесть граничный эффект от введения микроструктуры.

§ 3. Стационарное движение вдоль линии тока идеальной несжимаемой жидкости с учетом времени релаксации τ и характерного размера микроструктуры h .

В случае стационарного движения вдоль линии тока уравнения движения и неразрывности представляют систему двух уравнений в частных производных скорости и давления:

$$\begin{cases} \rho_0 \left(v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} + \tau v_l \frac{\partial}{\partial l} \left(v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} \right) \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial l^3} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial}{\partial x_k} (v \cdot l_k) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Система двух дифференциальных уравнений (8) является связанной замкнутой системой уравнений третьего порядка для скоростей и давлений. Она должна рассматриваться как задача определения скорости вдоль линии тока и последующего определения давления. Заметим, что далее задача нахождения линии тока не рассматривалась. Он может быть сформулирована как условие сонаправленности векторов касательных к линии тока и вектора скорости.

Традиционно, при $h = 0$ и $\tau = 0$, задача течения жидкости вдоль линии тока решается постулированием давления. В таком случае уравнение движение интегрируется и решение представимо в виде интеграла Бернулли [5]:

$$\frac{\rho_0 v^2}{2} + p = E. \quad (9)$$

Рассмотрим уравнение движения для скорости вдоль линии тока при заданном давлении с учетом времени релаксации τ и характерного размера микроструктуры h

$$v \frac{dv}{dl} + \tau v \frac{d}{dl} \left(v \frac{dv}{dl} \right) = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dp}{dl} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 p}{dl^3} \right). \quad (10)$$

Уравнение (11) представляет собой сингулярно возмущенное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для скорости v . На рис. 1 представлена линия тока L , начальная и конечная точки M_1 и M_2 , а также вектор скорости [6].

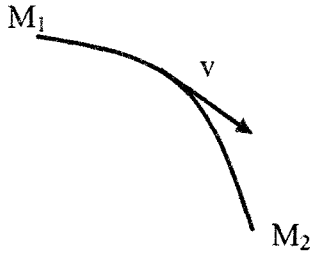


Рисунок 1 – Линия тока и скорость вдоль нее

Аналитическое выражение для данного уравнения построить не удастся. Однако качественный анализ этого уравнения показывает, что его левая часть может быть интерпретирована как приращение вдоль линии тока кинетической энергии и перенос градиента приращения кинетической энергии вдоль линии тока за время релаксации τ .

Дифференциальное уравнение (10) может быть представлено в виде:

$$dT + \tau v \frac{d}{dl} (dT) = - \left(dP + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dl^2} dP \right), \quad (11)$$

где $dT = d \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} \right)$ – приращение кинетической энергии.

Последнее уравнение свидетельствует о том, что в классическом случае, при $\tau = 0$, функция давления связана только с приращением кинетической энергии, а при наличии релаксации еще и с переносом градиента кинетической энергии со скоростью v . Таким образом, учет времени релаксации ведет к уменьшению приращения кинетической энергии в случае ее возрастания и замедления падения в случае ее убывания по сравнению с классическим случаем. Следовательно, сам эффект релаксации учитывает история изменения кинетической энергии.

§ 4. Численное решение дифференциального давления для скорости при постулированном законе изменения давления вдоль линии тока с использованием MathCAD Prime 1.0

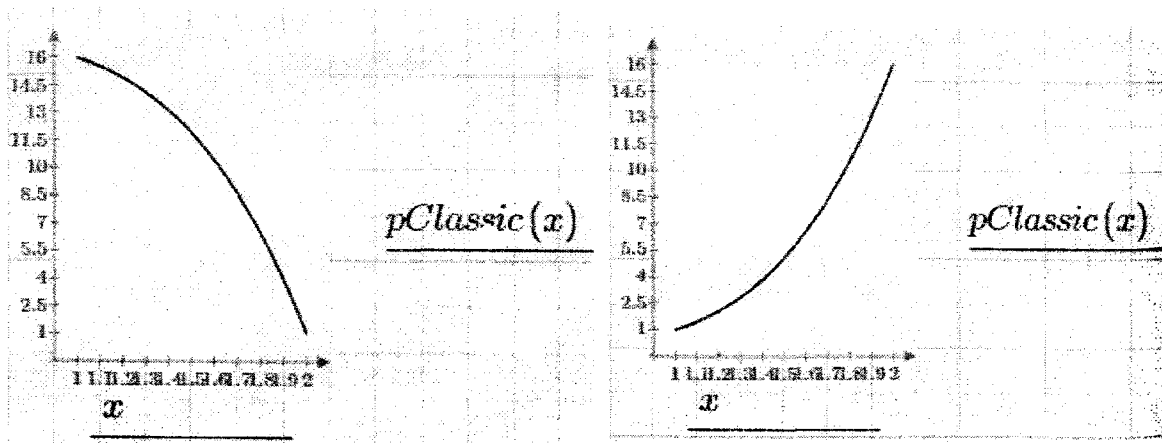
Для решения обыкновенного дифференциального уравнения (10) будем использовать встроенную функцию *Stiffb()*, реализующая Булирша-Штера (Bulirsch-Stoer) метод, разработанный специально для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что если правые части системы не являются гладкими или содержат разрывы, то лучше использовать метод Рунге-Кутты. В случае же гладкой системы метод Булирша-Штера позволяет добиться существенно большей точности, чем метод Рунге-Кутты. Не стоит забывать, что недостатком метода является то, что не для каждого набора точек возможна рациональная интерполяция, причём алгоритм не предусматривает обнаружение подобных ошибок

В качестве начальных условий использовалось значение скорости, вычисленное с помощью классического решения в виде интеграла Бернулли при заданной функции давления. Ниже приведены графики полной энергии для различных параметров времени релаксации и характерного размера микроструктуры при заданном перепаде давления в виде:

1) убывающей полиномиальной функции $P = 17 - x^4$ (рисунок 2 а)

2) возрастающей полиномиальной функцией $P = x^4$ (рисунок 2 б)

При этом функция скорости в случае $h = 0$ и $\tau = 0$ подбиралась таким образом, чтобы полная энергия системы в обоих случаях была одинаковой.



а) убывающая функция

б) возрастающая функция

Рисунок 2 – Постулирование давления

Представим полученные результаты в виде таблицы. Горизонтальной линией на графиках обозначена полная энергия системы в классическом случае.

Графики полной энергии для различных параметров времени релаксации и характерного размера микроструктуры при заданном законе распределения перепада давления

	n	Убывающая функция давления	Возрастающая функция давления
$\tau = 0.00005$	$n=10$		
	$n=100$		
$\tau = 0.00010$	$n=10$		
	$n=100$		
$\tau = 0.00015$	$n=10$		
	$n=100$		

$h = 0.02, h/\tau = 400,$

$h = 0.05, h/\tau = 1000$

$h = 0.04, h/\tau = 400$

$h = 0.01, h/\tau = 1000$

$h = 0.045, h/\tau = 300$

$h = 0.015, h/\tau = 1000$

На основании таблицы можно сделать вывод о том, что увеличение времени релаксации приводит к увеличению убывания полной механической энергии. Влияние параметр микроструктуры во многом зависит от постулированного закона распределения давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prosvetov, V.I. Modeling of flow of medium with homogeneous microstructure / V.I. Prosvetov, P.P. Sumets, N.D. Verveiko // International journal of mathematical models and methods in applied sciences Issue 3. – Vol. 5. – 2011 – P. 508–516.
2. Быкова, М.И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры: монография / М.И. Быкова, Н.Д. Вerveiko, П.П. Сумец, С.А. Шашкина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 192 с.
3. Вerveiko, Н.Д. Учет микроструктуры материала и его инерциальных свойств в моделях механики сплошной среды / Н.Д. Вerveiko, В.И. Просветов // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXII». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – С. 39–41.
4. Елизарова, Т.Г. Лекции. Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений / Т.Г. Елизарова. – М.: Физический факультет МГУ, 2005. – 224 с.
5. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 т. – Т. VI: Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физмат. лит., 1986. – 736 с.
6. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л.Г. Лойцянский – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
7. Просветов, В.И. Математические модели механики сплошной среды с учетом микроструктуры материала / В.И. Просветов // Труды молодых ученых: секция математика. – 2010. – Вып. 1-2 – С. 26–27.
8. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
9. Седов, Л.И. Механика сплошных сред / Л.И. Седов. – Т. 2. – М.: Наука, 1970. – 568 с.
10. Четверушкин, Б.Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды / Б.Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 4. – С. 27–39.

Поступила 10.11.11