

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения  
Российской академии наук, Владивосток*

Известно, что множество природных и конструкционных материалов сопротивляются процессам растяжения и сжатия по-разному. Так, приложение различной по знаку нагрузки к твердым горным породам дает неодинаковый по модулю деформационный отклик [1]. Это же свойство характерно для литых металлов и, что совсем очевидно, для сыпучих сред [2] и связных грунтов [3]. Следовательно, в математической модели деформирования реальных материалов свободное состояние может оказаться сингулярной точкой пространства деформаций. Даже в случае линеаризации модельных соотношений наличие такой особой точки приводит к возникновению принципиально нелинейных динамических эффектов, которые не отмечаются линейной теорией упругости – ударным волнам, сигнотонам, полусигнотонам и простым разрывам [4]. В настоящей работе на примере решения простейших нестационарных задач указаны особенности распространения граничных возмущений по среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию.

Определяющие соотношения динамического деформирования изотропной разномодульной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат, вводя предположения о малости деформаций и отсутствии массовых сил:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho \dot{v}_i, & \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ v_i &= \dot{u}_i, & 2e_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i}, & \rho &= \rho_0^{-1} (1 - u_{k,k}). \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1)  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $u_i$ ,  $v_i$  – компоненты векторов перемещений и вектора скорости перемещений точек среды;  $\rho_0$ ,  $\rho$  – плотность среды в свободном и текущем состоянии; точкой обозначена частная производная функции по времени  $t$ , латинскими индексами после запятой – частная производная по независимым пространственным (эйлеровым) переменным  $x_i$  (для повторяющихся индексов проводится суммирование);  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Упругий потенциал  $W$  является функцией состояния, замыкающей систему модельных соотношений (1). В принятом адиабатическом приближении он зависит только от деформаций  $e_{ij}$ , а в изотропной среде полностью определяется главными инвариантами тензора деформаций  $I_1 = e_{kk}$ ,  $I_2 = e_{ik}e_{ki}$ . Для моделирования разномодульного поведения упругой среды воспользуемся подходом, подобным предложенному в [5, 6], добавив в упругий потенциал  $W(I_1, I_2)$  слагаемое с модулем от первого инварианта  $I_1$ :

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1|. \quad (2)$$

Коэффициенты  $\lambda$ ,  $\mu$  в зависимости (2) являются параметрами Ламэ, упругий модуль  $\nu > 0$  характеризует наличие микродефектов в материале (или степень разрушенности материала, если рассматриваются горные породы). Функция (2) при  $\nu = 0$  приводит соотношения (1) к известной линейной зависимости между напряжениями и деформациями – закону Гука. При ненулевом значении модуля  $\nu$  в наиболее простом случае одноосного деформирования ( $u_1 = u(x, t)$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ ) из соотношений (1), (2) получаем кусочно-линейную зависимость между напряжениями  $\sigma_{11} = \sigma$  и деформациями  $e_{11} = e$ :

$$\sigma = \{\lambda + 2\mu - 2\nu \text{Sign}(e)\}e, \quad \text{Sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } e > 0 \text{ (растяжение)}, \\ -1 & \text{при } e < 0 \text{ (сжатие)}. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что в зависимости (3) коэффициент пропорциональности между  $\sigma$  и  $e$  имеет при растяжении и сжатии различные значения ( $\rho a^2 = \lambda + 2\mu + 2\nu$  при  $e < 0$ ,  $\rho b^2 = \lambda + 2\mu - 2\nu$  при  $e > 0$ ), а точка  $e = 0$  – особая. Константы  $a$  и  $b$  ( $a > b$  при  $0 < \nu < \lambda/2 + \mu$ ) представляют собой фазовые скорости уравнения движения, записанного для одномерного случая:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, в областях сжатия среды  $c = a$ , при растяжении среды  $c = b$ . Если решение уравнения движения (4) представить в форме Даламбера:

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (5)$$

то неизвестные функции  $f(\xi(x, t))$  и  $g(\xi(x, t))$  могут быть определены для каждой конкретной краевой задачи в соответствии с заданными краевыми и начальными условиями.

Обобщенное решение системы определяющих соотношений (1), (2) может не являться непрерывным на некоторой движущейся поверхности  $\Sigma(t)$ , на которой необходимо потребовать выполнения условий совместности разрывов. В случае, когда при условии непрерывности перемещений на поверхности  $\Sigma(t)$  рвутся их первые производные  $u_{i,j}$ , то по среде со скоростью  $G$  распространяется фронт сильного разрыва, на котором обязаны выполняться динамические и кинематические условия совместности первого порядка [7]:

$$[\sigma_{ij}]v_j = -\rho^+ G[v_i], \quad [v_i] = -G[u_{i,j}]v_j \quad \text{при} \quad [u_i] = 0. \quad (6)$$

В условиях (6) квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности разрывов  $\Sigma(t)$ :  $[m] = m^+ - m^-$ ,  $m^+$  – значение функции перед поверхностью,  $m^-$  – непосредственно за ней;  $v_j$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности  $\Sigma(t)$ .

Введем классификацию возможных разрывов решения уравнения движения (4), подобно принятому в [4]. Если в решении существует разрыв первых производных перемещений и при переходе через поверхность разрывов  $\partial u / \partial x$  меняет свой знак, то имеет место плоская одномерная *ударная волна* со скоростью распространения  $G_\alpha$ . *Сигнотон* со скоростью распространения  $G_\beta$  назовем плоскую одномерную поверхность разрыва первых производных перемещений, если при переходе через такую поверхность  $\partial u / \partial x$  не меняет знак. Если же с одной стороны от поверхности разрывов  $\partial u / \partial x = 0$ , а с другой стороны  $\partial u / \partial x \neq 0$ , то такую поверхность называем *полусигнотон* со скоростью  $G_\delta$ . Сигнотон и полусигнотон, со скоростью  $a$  назовем *быстрым*, а со скоростью  $b$  – *медленным*. Такая классификация определяет свойства плоских одномерных волн в кусочно-линейной упругой среде: ударная волна меняет значение фазовой скорости уравнения движения с  $b$  на  $a$ , сжимая предварительно растянутую среду (следует отметить, что обратный случай невозможен [8]); полусигнотон либо является передним фронтом распространения граничных возмущений по недеформированной среде (волной сжатия или волной разряжения в зависимости от вида граничного воздействия), либо возвращает ранее деформированную область среды в свободное состояние; сигнотон скачком изменяет величину уже существующих предварительных деформаций, не меняя при этом фазовой скорости уравнения движения.

Согласно соотношениям (6), на плоской одномерной ударной волне, сигнотоне и полусигнотоне необходимо выполнить условия

$$u^+ \Big|_{\Sigma(t)} = u^- \Big|_{\Sigma(t)}, \quad (\sigma^+ - \sigma^-) \Big|_{\Sigma(t)} = \rho^+ G^2 \left( \frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} \right) \Big|_{\Sigma(t)}, \quad (7)$$

где  $G$  – скорость распространения соответствующей поверхности сильных разрывов.

Используя условия (7), можно показать, что модуль скорости ударной волны необходимо удовлетворяет неравенству  $b < G_\alpha < a$ , а скорости сигнотона ( $G_\beta$ ) и полусигнотона ( $G_\delta$ ) постоянны и могут принимать значения  $a$  или  $b$  в зависимости от постановки задачи.

Описанные свойства плоских одномерных волн и соотношения для разрывов на них позволяют поставить ряд нестационарных краевых задач интенсивного одноосного деформирования и получить их аналитические решения.

Рассмотрим отражение плоской одномерной волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя. Пусть с момента времени  $t = 0$  на граничную плоскость  $x = 0$  упругого слоя начинает действовать сжимающая нагрузка, а вторая граница  $x = H$  остается свободной на протяжении всего процесса деформирования. Условие свободной границы имеет вид:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0. \tag{8}$$

Положим, что действие сжимающей нагрузки таково, что перемещения точек граничной плоскости  $x = 0$  при  $t \geq 0$  оказываются заданными положительной монотонно возрастающей функцией  $u(0,t) = \varphi(t) : \varphi(t) \geq 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(t) > 0$  (рис. 1а; рис. 2а). Тогда с момента времени  $t = 0$  граничные возмущения распространяются в слой посредством быстрого полусигнотона  $\Sigma_\delta(t)$  со скоростью  $a$  и координатой фронта  $x = at$  (рис. 1б; рис. 2б).

Согласно условиям (7) на поверхности  $\Sigma_\delta(t)$  и заданной на границе  $x = 0$  функции перемещений  $\varphi(t)$ , решение задачи в этом случае до момента времени  $t = H/a$  определяется соотношениями

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ 0 & \text{при } at \leq x \leq H. \end{cases} \tag{9}$$

В момент времени  $t = H/a$  полусигнотон  $\Sigma_\delta(t)$  отражается от свободной границы слоя  $x = H$ . Если для линейной среды решение аналогичной задачи после отражения известно, то в случае разномодульной среды возникает вопрос: сколько волновых фронтов отражается и какие они? Оказалось, что решающим фактором для ответа на данный вопрос является знак второй производной заданной на границе  $x = 0$  функции перемещений  $\varphi(t)$ . Если  $\varphi''(t) > 0$  (т. е. функция  $\varphi(t)$  – вогнутая, положительная монотонно возрастающая (рис. 1а)), то от свободной границы слоя отражается одна волна – сигнотон  $\Sigma_\beta(t)$  со скоростью  $a$  (рис. 1в), среда за фронтом  $\Sigma_\beta(t)$  продолжает находиться в сжатом состоянии. Решение задачи при  $t > H/a$  имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t - 2\frac{H}{a} + \frac{x}{a}\right) & \text{при } 2H - at \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - at. \end{cases} \tag{10}$$

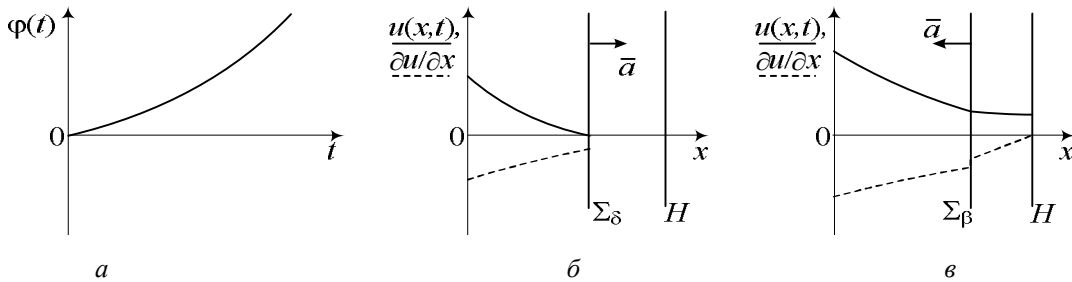


Рисунок 1 – Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: решение задачи при вогнутой положительной функции  $\varphi''(t)$  ( $\varphi''(t) > 0$ )

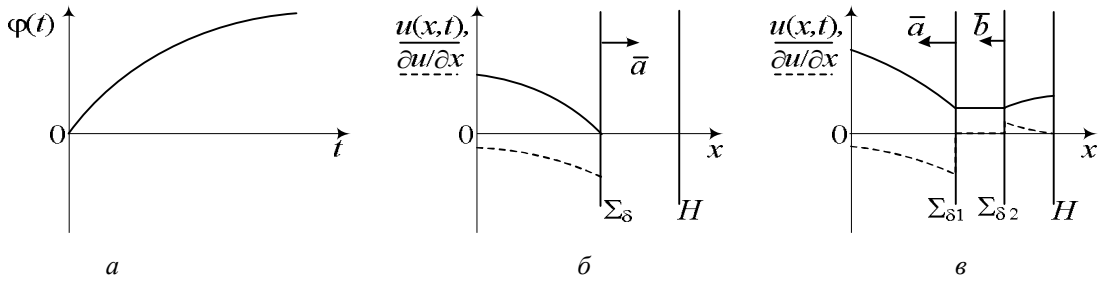


Рисунок 2 – Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: решение задачи при выпуклой положительной функции  $\varphi''(t)$  ( $\varphi''(t) < 0$ )

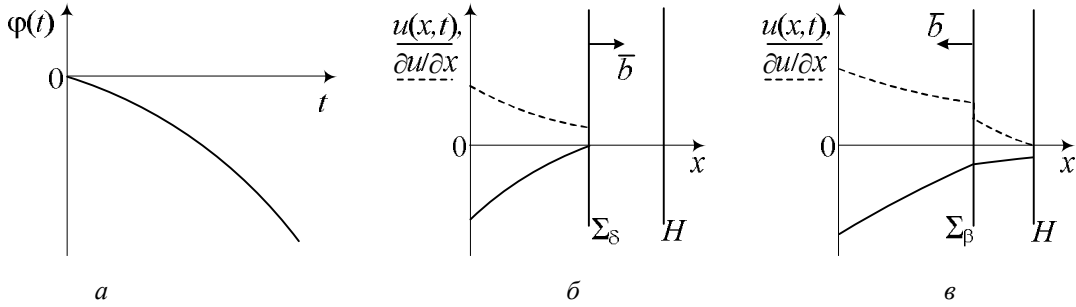


Рисунок 3. – Отражение волны разрежения от свободной границы слоя: решение задачи при выпуклой отрицательной функции  $\varphi''(t)$  ( $\varphi''(t) < 0$ )

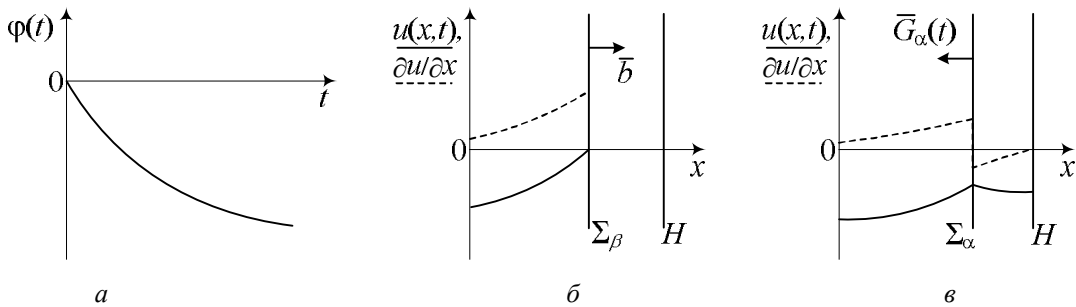


Рисунок 4 – Отражение волны разрежения от свободной границы слоя: решение задачи при вогнутой отрицательной функции  $\varphi''(t)$  ( $\varphi''(t) > 0$ )

В случае, когда функция  $\varphi(t)$  – выпуклая (т. е.  $\varphi''(t) < 0$  (рис. 2а)), от свободной границы слоя при  $t > H/a$  отражаются два волновых фронта (рис. 2в): быстрый полусигнотон  $\Sigma_{\delta 1}(t)$  со скоростью распространения  $a$  и координатой фронта  $x = 2H - at$  и медленный полусигнотон  $\Sigma_{\delta 2}(t)$  с координатой фронта  $x = (1 + b/a)H - bt$ , движущийся со скоростью  $b$ .

Решение задачи, соответствующее случаю  $\varphi''(t) < 0$ , до момента  $t = H/a$  также имеет вид (9), а при  $t > H/a$  выражается соотношениями

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{H}{a} + \frac{H}{b} - \frac{x}{b}\right) + \varphi\left(t - \frac{H}{a} - \frac{H}{b} + \frac{x}{b}\right) & \text{при } \left(1 + \frac{b}{a}\right)H - bt \leq x \leq H, \\ \varphi\left(2\left(t - \frac{H}{a}\right)\right) & \text{при } 2H - at \leq x \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)H - bt, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - at. \end{cases}$$

Таким образом, упругий слой оказывается поделенным двумя отраженными волновыми фронтами на три области (рис. 2в). В зоне  $0 \leq x \leq 2H - at$  между нагружаемой границей слоя и передним

отраженным волновым фронтом  $\Sigma_{\delta_1}(t)$  продолжается сжатие среды под действием приложенной на границу  $x = 0$  нагрузки. Область  $(1 + b/a) \leq x \leq H$  между последним отраженным волновым фронтом  $\Sigma_{\delta_2}(t)$  и свободной границей слоя подвергается растяжению, в ней  $\partial u / \partial x > 0$  и фазовая скорость уравнения движения равна  $b$ . Зона  $2H - at \leq x \leq (1 + b/a)H - bt$  между фронтами  $\Sigma_{\delta_1}(t)$  и  $\Sigma_{\delta_2}(t)$  оказывается областью постоянных перемещений, в которой среда недеформирована и движется как жесткое целое. Скорость перемещений точек среды в этой зоне, согласно полученному решению, не зависит от пространственной координаты  $x$ :  $v(x, t) = 2\varphi'(2(t - H/a))$ .

Рассмотрим теперь случай, когда начиная с момента времени  $t = 0$  на одну из границ разномодульного упругого слоя толщины  $H$  действует одноосная растягивающая нагрузка, а вторая граница остается свободной. Такая постановка при  $t \geq 0$  имеет место, если перемещения точек граничной плоскости  $x = 0$  заданы отрицательной монотонно убывающей функцией  $u(0, t) = \varphi(t)$ :  $\varphi(t) \leq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(t) < 0$  (рис. 3а; рис. 4а). Отсутствие нагрузки на границе  $x = H$  задано условием (8). Тогда до момента времени  $t = H/b$  деформации в слой распространяются посредством медленного полусигнона  $\Sigma_{\delta}(t)$  – волны разряжения со скоростью  $b$  (рис. 3б; рис. 4б).

Среда за фронтом  $\Sigma_{\delta}(t)$  подвергается растяжению. Поле перемещений при  $0 \leq t \leq bt$  определяется в форме (5) аналогично предыдущему случаю, отличие состоит лишь в значении фазовой скорости уравнения движения ( $c = b$ ):

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq bt, \\ 0 & \text{при } bt \leq x \leq H. \end{cases}$$

Так же, как и при сжатии слоя, решение при  $t > H/b$  зависит от знака второй производной  $\varphi''(t)$  заданной на границе  $x = 0$  функции перемещений. Если  $\varphi''(t) < 0$ , т. е.  $\varphi(t)$  – отрицательная выпуклая функция (рис. 3а), то от свободной границы  $x = H$  отражается один волновой фронт – медленный сигнон  $\Sigma_{\beta}(t)$  со скоростью  $b$  (рис. 3в), за которым деформации уменьшаются, но среда продолжает находиться в растянутом состоянии. Перемещения точек среды при  $t > H/b$  будут иметь вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) + \varphi\left(t - 2\frac{H}{b} + \frac{x}{b}\right) & \text{при } 2H - bt \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - bt. \end{cases}$$

Большой интерес в данной задаче представляет случай, когда заданная на границе  $x = 0$  функция  $\varphi(t)$  – отрицательная вогнутая (рис. 4а), т. е.  $\varphi''(t) > 0$ . При таком воздействии на разномодульный упругий слой от свободной границы  $x = H$  отражается ударная волна  $\Sigma_{\alpha}(t)$  (рис. 4в). Скорость ее движения оказывается зависимой от времени:

$$G_{\alpha}(t) = b + F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t))\Big|_{t=H/b} \cdot t + \dots, \quad (11)$$

где  $F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t)) \geq 0$  – положительная функция, не приведенная здесь из-за ее громоздкости в общем случае. В момент отражения ( $t = H/b$ ) скорость ударной волны  $G_{\alpha}(t)$  равна  $b$ , а в последующие моменты времени начинает увеличиваться, стремясь достигнуть значения  $a$ . Появление такого эффекта объясняется тем, что перед фронтом  $\Sigma_{\alpha}(t)$  фазовая скорость уравнения движения меньше, чем за ним ( $b < a$ ), т. е. ударная волна движется из сжатой области слоя в растянутую. Фронт ударной волны  $\Sigma_{\alpha}(t)$  в соответствии с полученным выражением (11) для скорости  $G_{\alpha}(t)$  будет иметь координату  $x = H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi$ . Решение задачи при  $t > H/b$  в случае вогнутой отрицательной функции  $\varphi(t)$  можно записать в виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} \Phi(x,t, G_\alpha(t)) & \text{при } H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi, \end{cases}$$

где функция  $\Phi(x,t, G_\alpha(t))$  такова, что  $\partial u / \partial x < 0$  при  $H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi \leq x \leq H$ .

Таким образом, показано, что решения, полученные для разномодульной изотропной упругой среды с кусочно-линейной зависимостью между напряжениями и деформациями, существенным образом отличаются от решений аналогичных краевых задач линейной нормально изотропной упругой среды. Описанные результаты демонстрируют возможность возникновения нелинейных эффектов (сильных разрывов первых производных перемещений, областей постоянных перемещений) при описании динамического деформирования среды в рамках линейного приближения определяющих соотношений (1). Для этого оказалось достаточным выбрать упругий потенциал материала в виде кусочно-гладкой функции (2) с особенностью в области свободного состояния. Подобные результаты, полученные в рамках математической модели В.П. Мясникова и А.И. Олейникова, были представлены в [9], где рассматривался более широкий класс нестационарных краевых задач, в том числе возникновение ударной волны и области постоянных перемещений при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства.

*\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00360-а.*

### Резюме

В рамках кусочно-линейной модели динамического деформирования изотропной упругой среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию изучаются процессы распространения граничных возмущений. Показана возможность возникновения нелинейных эффектов (ударных волн, движущихся слоев недеформированной среды) при отражении плоских одномерных фронтов нагрузки и разгрузки от свободной границы разномодульного упругого слоя.

### Литература

1. Капустянский С.М. Анизотропия геоматериалов // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. 1987. Т. 18. С. 53–113.
2. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование и механике сыпучих сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с. ISBN 978-5-9221-0906-2.
3. Лушников В.В., Вулис П.Д., Литвинов Б.М. О соотношении модулей деформации при сжатии и растяжении грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1973. № 6. С. 18–19.
4. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
5. Мясников В.П. Геофизические модели сплошных сред // Материалы V Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике: тезисы докладов. М.: Наука, 1981. С. 263–264.
6. Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 153–159.
7. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с. ISBN 5-7442-0586-1.
8. Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711–717.
9. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6. № 1–2. С. 94–105. ISSN 1608-845X.

### Summary

*Within the piecewise linear model of dynamic deformation of an isotropic elastic medium with different resistance to tension and compression the propagation of boundary disturbances are studied. The possibility of occurrence of nonlinear effects (shock waves, moving layers of undeformed media) at reflection flat one-dimensional front of loading and unloading from the free boundary of multimodulus elastic layer are shown.*

Поступила в редакцию 15.11.2012