

Частотные характеристики и передаточные функции колебательной механической системы

¹Кудин В.В., ¹Авсиевич А.М., ¹Авдонин А.В., ¹Самойлов И.Р., ²Кудин М.В.

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусская государственная академия авиации

Частотные и амплитудно-частотные характеристики элементов и в целом механических систем во многом определяют их надежность и качество протекания технологических процессов. По ЧХ и АЧХ можно судить о возможностях возникновения резонансов на разных технологических режимах и об устойчивости систем в отношении колебательных процессов.

Для определения частотных характеристик эффективным является описание входных и выходных колебательных воздействий с использованием комплексных чисел.

Пусть на вход линейного звена подается гармонический сигнал вида $f(t) = a_f \sin \omega t$. Учитывая, что $e^{i\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, данная функция примет вид $f(t) = a_f e^{i\omega t}$.

При входном сигнале $f(t) = a_f e^{i\omega t}$ и выходном сигнале $x(t) = b_x e^{i\omega t}$ отношение комплексных амплитуд выходного сигнала и входного гармонического сигнала называется частотной передаточной функцией или комплексным коэффициентом передачи звена $W(j\omega)$.

$$W(j\omega) = \frac{x(t)}{f(t)} = \frac{b_x e^{i\omega t}}{a_f e^{i\omega t}} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

Тогда амплитуда выходного сигнала будет определена $b_x = a_f W(j\omega)$.

Выделяя в $W(j\omega)$ действительную и мнимую части, можно записать:

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega) + j\operatorname{Im}W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ – модуль частотной передаточной функции;

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) \text{ – начальная фаза частотной передаточной функции.}$$

Следовательно, при подаче на вход линейной системы гармонического сигнала на ее выходе после затухания свободного движения установится гармонический сигнал с той же частотой, но с амплитудой $a_x = A(\omega) \cdot a_f$ и со сдвигом по фазе $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} (W(j\omega))$.