



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

**Кафедра «Сопроотивление материалов
машиностроительного профиля»**

**С. В. Гончарова
М. В. Югова**

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Пособие

**Минск
БНТУ
2018**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»

С. В. Гончарова
М. В. Югова

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Пособие для студентов специальностей
1-36 01 01 «Технология машиностроения»;
1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск
БНТУ
2018

УДК 620.1 (075.8)

ББК 30.3я7

Г65

Р е ц е н з е н т ы:

канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Механика материалов и детали машин» Белорусского государственного аграрного технического университета *В. Н. Основин*;
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Физика твердого тела» Белорусского государственного университета *В. Г. Шепелевич*

Гончарова, С. В.

Г65

Расчет статически неопределимых балок: пособие для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения»; 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / С. В. Гончарова, М. В. Югова. – Минск : БНТУ, 2018. – 47 с.
ISBN 978-985-550-465-9.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений для самостоятельного освоения учебного материала и отработки навыков решения задач на тему «Расчет статически неопределимых балок» по курсу «Механика материалов» («Соппротивление материалов»). В пособии приведены основные методы расчета статически неопределимых балок.

Издание содержит необходимую информацию для самостоятельного изучения данной темы курса: основные сведения из теории, методики раскрытия статической неопределимости балок.

УДК 620.1 (075.8)

ББК 30.3я7

ISBN 978-985-550-465-9

© Гончарова С. В., Югова М. В., 2018

© Белорусский национальный
технический университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Статически неопределимые балки при изгибе	5
2. Основы метода сил	8
2.1. Примеры раскрытия статической неопределимости балок методом сил	13
Пример 1	13
Пример 2	15
Пример 3	19
3. Расчет неразрезных балок уравнением трех моментов.....	24
3.1. Примеры раскрытия статической неопределимости уравнением трех моментов	29
Пример 1	29
Пример 2	33
Пример 3	37
Рекомендуемая литература	42
Приложение	44

ВВЕДЕНИЕ

При изучении курса «Механика материалов» важное значение имеет практическое применение теоретических выводов. Данное пособие предназначено для усвоения студентами основ раздела «Статически неопределимые балки» и приобретения навыков раскрытия статической неопределимости. Существуют различные способы решения статически неопределимых балок. В пособии рассматриваются только основные из них: метод сил и решение с помощью уравнения трех моментов. По каждому методу представлены краткие сведения из теории и приведены примеры раскрытия статической неопределимости простейших балок.

1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Балки могут выполнять функции элемента конструкции лишь в тех случаях, если они неподвижны, то есть когда их точки перемещаются только в результате деформирования. В случае действия нагрузки только в одной плоскости неподвижность обеспечивается тремя связями (опорами). Эти связи являются необходимыми. Поскольку для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, то реакции необходимых связей могут быть найдены с помощью лишь одних уравнений статики. Такие балки называются статически определимыми.

Однако в балке из конструктивных соображений, для увеличения ее прочности и жесткости, может быть больше трех связей (реакций). В этом смысле некоторые связи являются лишними. Балки с лишними связями называются статически неопределимыми, поскольку реакции таких балок невозможно определить только при помощи уравнений статики. Степень статической неопределимости балки определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений статики.

Балки, изображенные на рис. 1.1, являются один раз статически неопределимыми, так как имеют четыре опорные реакции при трех уравнениях статики.

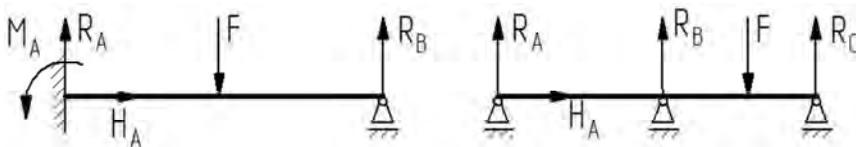


Рис. 1.1.

На рис. 1.2 представлены дважды и трижды статически неопределимые балки.

Выбор метода расчета статически неопределимой балки связан со степенью статической неопределимости. Если лишних связей не много (одна, две), то применяют общий метод: составляют возможные независимые уравнения статики, добавляют необходимые уравнения совместности деформаций (перемещений). Из совмест-

ного решения всех составленных уравнений определяют усилия в связях (реакции). Дальнейшие расчеты не отличаются от расчетов статически определимых балок.

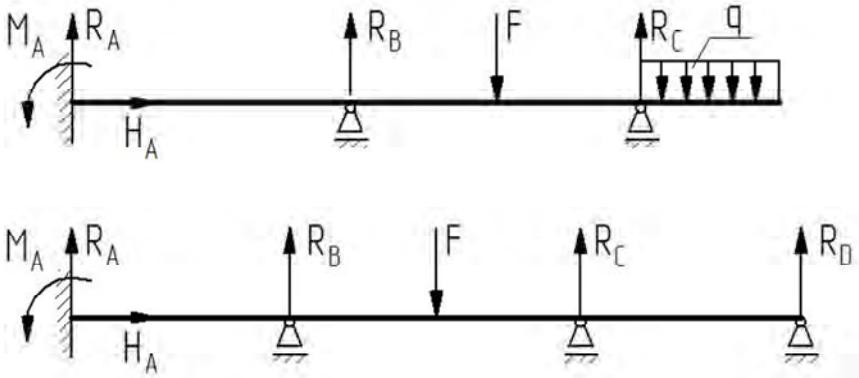


Рис. 1.2.

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 1.3.

Левая опора – жесткая заделка, имеющая три связи, правая – шарнирно-подвижная, имеющая одну связь. Для этой балки можно составить три уравнения статики, поэтому она имеет одну лишнюю связь. Найдем реакции связей из совместного решения уравнений статики и одного уравнения перемещений.

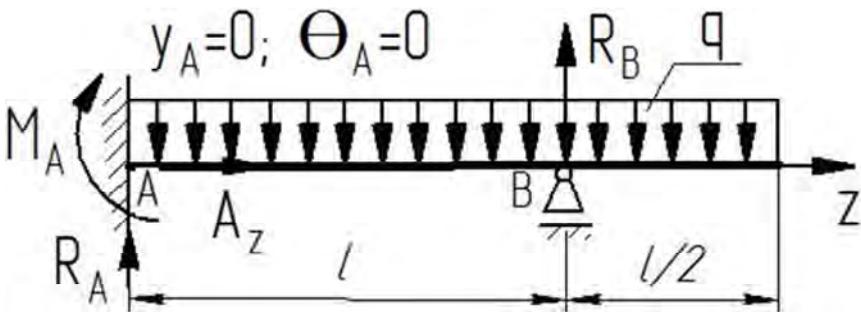


Рис. 1.3

Запишем уравнения статики:

$$1) \sum Z = 0; \quad R_z = 0;$$

$$2) \sum Y = 0; \quad R_A - ql,5l + R_B = 0;$$

$$3) \sum M_A = 0; \quad M_A + \frac{q(1,5)^2}{2} - R_B l = 0.$$

Запишем уравнение прогиба в опорном сечении B , применив обобщенное уравнение оси балки и приняв начало координат в защемлении:

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 l + M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{24} = 0.$$

В опорных сечениях балки перемещения сечений $y_A = y_B = 0$, $\theta_A = \theta_0 = 0$, $y_B = 0$. Сократив оставшиеся члены уравнения на $l^2/2$, получим:

$$M_A + R_A \frac{2l}{3} - \frac{ql^2}{12} = 0.$$

Аналогичное уравнение получим, составляя уравнение равновесия $\sum M_B = 0$:

$$M_A + R_A l - \frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{8} = 0.$$

Из совместного решения двух последних уравнений получим:

$$M_A = -\frac{ql^2}{16}; \quad R_A = \frac{7ql}{16} = 0.$$

Из третьего уравнения статики находим реакцию R_B :

$$R_B = \frac{17ql}{16} = 0.$$

Контроль результатов проводим по второму уравнению статики.

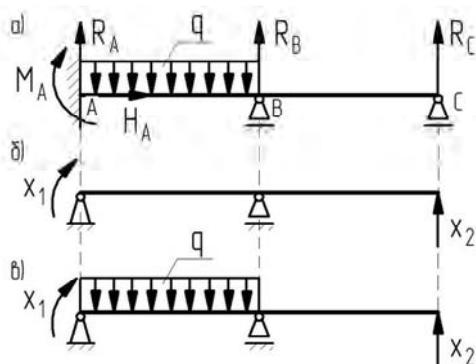
При раскрытии статической неопределимости рассматриваемой балки в качестве дополнительного применено обобщенное уравнение перемещений, записанное методом начальных параметров.

У неразрезных балок, которые перекрывают ряд пролетов и на своем пути не имеют ни разрезов, ни шарниров, степень статической неопределимости может быть высокой, а решение большого количества уравнений – трудоемким. В таких случаях дополнительные уравнения используют не для совместного решения с уравнениями статики, а для определения неизвестных усилий в лишних связях. Метод расчета, при котором система решается с неизвестными силами, называют методом сил.

2. ОСНОВЫ МЕТОДА СИЛ

Расчет по методу сил выполняется в следующем порядке:

1. Устанавливается степень статической неопределимости, то есть определяется число лишних связей (рис 2.1, а).



Заданная система:
 связей – 5;
 уравнений статики – 3;
 лишних связей – 2.

Основная система:
 $\Delta_1 = 0$;
 $\Delta_2 = 0$.

Эквивалентная система.

Рис.2.1

2. Выбирается основная система, которая получается из статически неопределимой балки путем удаления лишних связей (рис. 2.1, б). Основная система является статически определимой и должна быть геометрически неизменяемой (не превращаться в механизм).

Она выбирается по-разному, но с таким условием, чтобы решение уравнений для нее было наименее трудоемким.

Эквивалентная система получена путем загрузки основной системы заданными внешними силами и неизвестными усилиями X_1, X_2 (рис. 2.1, в).

3. Записываются условия эквивалентности основной системы заданной по перемещениям. Если у заданной системы отсутствуют перемещения в направлении отброшенных связей, то для основной системы записывают условия $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$, которые являются дополнительными уравнениями перемещений.

На основании принципа независимости действия сил запишем:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1F} = 0; \\ \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Первый индекс у перемещений Δ указывает, в направлении какой связи происходит перемещение; второй – усилие, которое вызвало это перемещение.

Смысл первого уравнения – отрицание угла поворота сечения балки у опоры A ; смысл второго – отрицание перемещения точки C оси балки по вертикали.

Перемещения от неизвестных сил X_1 и X_2 можно представить в виде: $\Delta_{11} = \delta_{11}X_1, \Delta_{12} = \delta_{21}X_2$, то есть определяют перемещения δ от единичных сил, приложенных по направлению соответствующих неизвестных X . Тогда уравнения перемещений примут вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Для любой дважды статически неопределимой балки эти уравнения будут такими же, поэтому их называют каноническими уравнениями метода сил. Их количество равно степени статической неопределимости балки. Для балки n раз статически неопределимой канонические уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты δ_{11} , δ_{12} и т. д. являются единичными перемещениями, т. к. вызваны единичными силами, и называются единичными коэффициентами. Перемещения Δ_{1F} , Δ_{2F} и т. д. вызваны заданными нагрузками и называются грузовыми коэффициентами или свободными членами.

4. Определяются единичные коэффициенты и свободные члены. Для этого в основной системе строятся эпюры моментов от единичных значений неизвестных $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ и от внешней нагрузки F . По формуле Мора и способу Верещагина путем перемножения соответствующих эпюр находят все коэффициенты:

$$\delta_{11} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz, \quad \delta_{12} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dz,$$

$$\Delta_{1F} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dz \quad \text{и т. д.}$$

В соответствии с теоремой о взаимности перемещений

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

5. Далее решаются канонические уравнения и определяются неизвестные силы X_1 и X_2 . Балка становится статически определимой.

6. Используя уравнение равновесия, находят остальные реакции опор.

Рассмотрим порядок расчета методом сил на простейшей статически неопределимой балке (рис. 2.2, а).

Балка является один раз статически неопределимой. Выберем в качестве основной системы консоль, нагруженную внешней силой F и лишней связью X_1 (рис. 2.2, б).

Дополнительное уравнение перемещений, выражающее равенство нулю перемещения точки B от сил F и X_1 , в канонической форме будет иметь вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где Δ_{1F} – перемещение от заданной нагрузки F по направлению силы X_1 (рис. 2.2, в);

δ_{11} – перемещение от силы $\bar{X}_1 = 1$ по ее направлению (рис. 2.2, з).

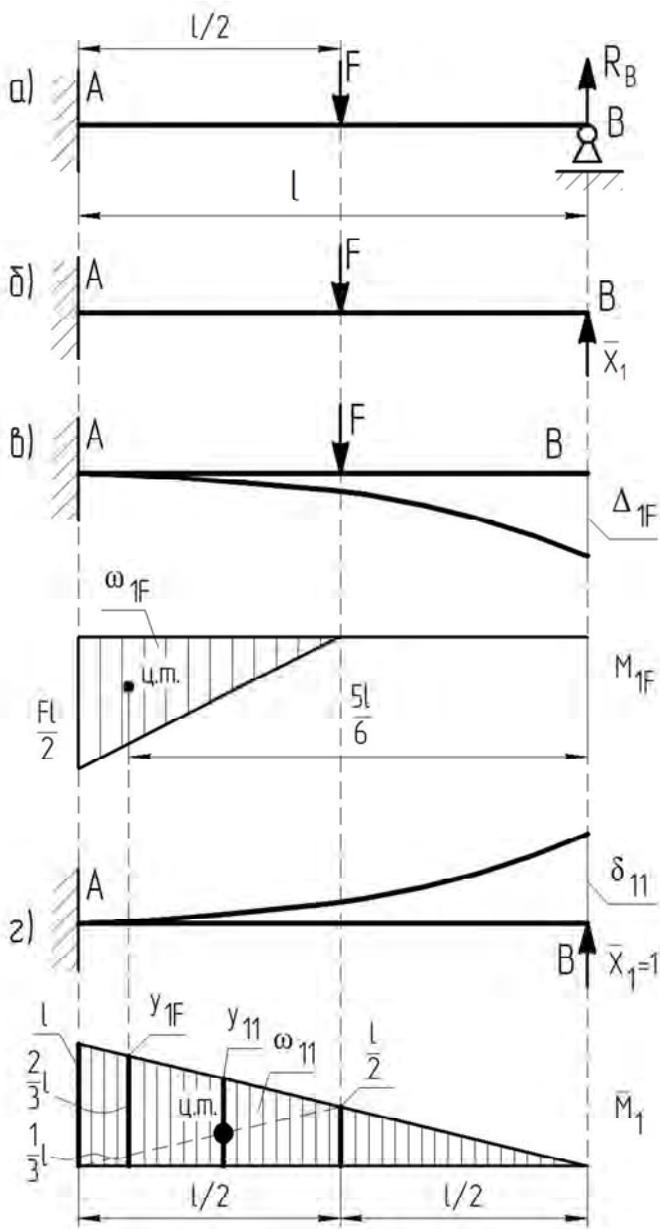


Рис. 2.2

Коэффициенты канонического уравнения определяются по методу Мора. К основной системе прикладывается нагрузка F и строится грузовая эпюра изгибающего момента M_F (рис. 2.2, в). Затем основная система загружается единичной силой $\bar{X}_1 = 1$ и строится единичная эпюра момента \bar{M}_1 (рис. 2.2, з).

Дальнейшие вычисления выполняются по способу Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} l \frac{2}{3} l}{EI} = \frac{l^3}{3EI},$$

$$\Delta_{1F} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dz = \frac{\omega_{1F} y_{1F}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \frac{Fl}{2} \frac{l}{2} \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \frac{l}{2} \right)}{EI} =$$

$$= -\frac{\frac{Fl^2}{8} \frac{5}{6} l}{EI} = -\frac{5Fl^3}{48EI},$$

где ω_{11} , ω_{1F} – площади единичной и грузовой эпюр соответственно (имеют вид треугольников);

y_{11} – ордината, проходящая через центр тяжести площади эпюры \bar{M}_1 ;

y_{1F} – ордината на единичной эпюре \bar{M}_1 , расположенная под центром тяжести площади эпюры M_F .

Знак минус перед Δ_{1F} означает, что эпюры \bar{M}_1 и M_F находятся по разные стороны от оси эпюры.

Подставляем полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение и находим X_1 :

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \frac{5Fl^3}{48EI} = 0, \quad X_1 = \frac{5}{16} F.$$

Найденное значение X_1 является искомой реакцией. Дальнейший расчет ведется как для обычной статически определимой балки.

2.1. Примеры раскрытия статической неопределимости балок методом сил

Пример 1. Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 2.3, а.

Решение. Балка является один раз статически неопределимой, так как число неизвестных реакций равно четырем, а уравнений статики можно составить три.

Выбираем основную систему: отбрасываем шарнирно-подвижную опору.

Основную систему загружаем заданной нагрузкой, заменяем ее действие на балку неизвестной силой X_1 (рис. 2.3, б) и получаем эквивалентную систему (рис 2.3, в).

Записываем одно каноническое уравнение, так как система один раз статически неопределена:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов уравнения используем метод Мора–Верещагина. Загружаем эквивалентную систему силой $\bar{X}_1 = 1$ и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 2.3, з), затем загружаем основную систему заданной нагрузкой и строим грузовую эпюру моментов M_F (рис. 2.3, д). Умножая эпюру \bar{M}_1 саму на себя, находим:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{8}{3EI}.$$

Перемножаем эпюры \bar{M}_1 и M_F , получим:

$$\Delta_{1F} = \frac{(M_F \bar{M}_1)}{EI} = \frac{\omega_{1F} y_{1F}}{EI} = \frac{20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right)}{EI} = \frac{30}{EI}.$$

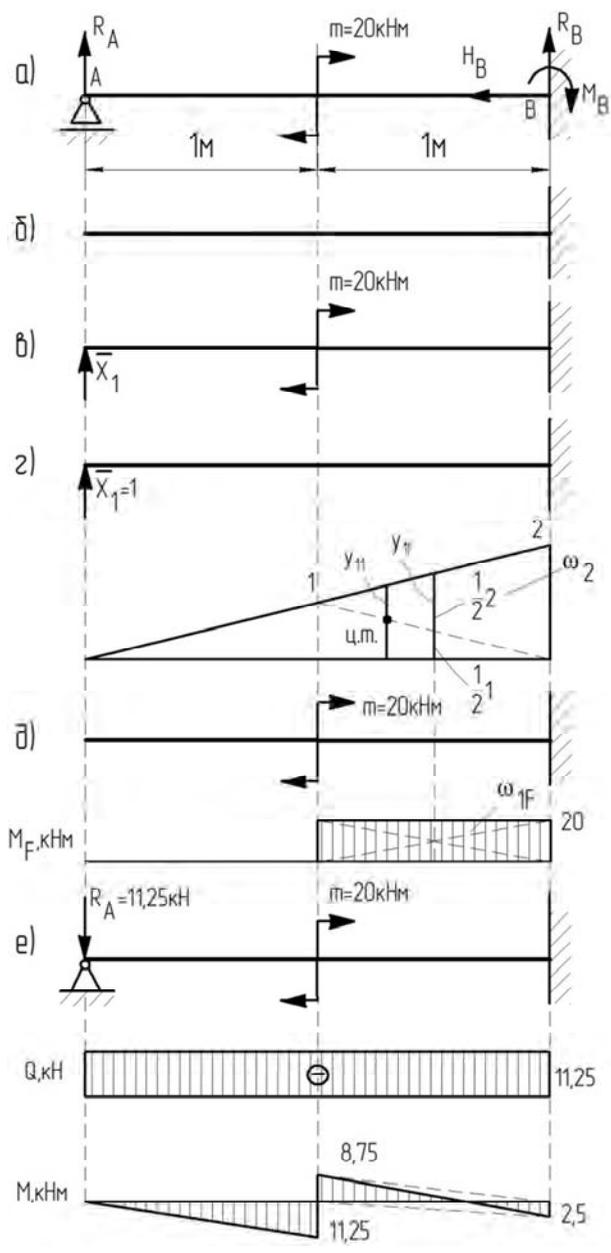


Рис. 2.3

Произведение имеет знак плюс, так как эпюры \bar{M}_1 и M_F находятся по одну сторону от оси эпюры.

Подставляем полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение и находим X_1 :

$$\frac{8}{3EI} X_1 + \frac{30}{EI} = 0, \quad X_1 = -11,25.$$

Найденное усилие X_1 является искомой реакцией:

$$X_1 = R_A = -11,25 \text{ кН.}$$

Для балки с известной реакцией R_A строим окончательные эпюры внутренних сил (рис. 2.3, e).

Сделаем проверку правильности определения величины X_1 . Перемножим окончательную эпюру моментов $M_{F\text{ок}}$ и единичную эпюру \bar{M}_1 , то есть найдем перемещение сечения A (по условию $\Delta_A = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{1}{EI} (M_{F\text{ок}} \bar{M}_1) = \frac{\omega_{1F\text{ок}} y_{1F}}{EI} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 11,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 8,75 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 1 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (-3,75 + 5,83 - 2,08) = 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 2.4.

Решение. Балка является один раз статически неопределимой.

Выбираем основную и эквивалентную системы, заменяя защемление шарнирно-неподвижной опорой с неизвестным моментом X_1 (рис. 2.4, б, в).

Уравнение перемещения имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Строим грузовую M_F и единичную \bar{M}_1 эпюры моментов (рис. 2.4, з, д).

Находим коэффициенты канонического уравнения методом Мора–Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EI} = \frac{4}{3EI},$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} (M_F \bar{M}_1) = \frac{-\omega_1 y_{11} - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3}{EI} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{EI} = -\frac{10}{3EI}.$$

Подставляем полученные коэффициенты в каноническое уравнение и находим X_1 :

$$\frac{4}{3EI} X_1 - \frac{10}{3EI} = 0, \quad X_1 = 2,5.$$

С учетом X_1 и заданной нагрузки определяем реакции опор для балки (рис. 2.4, е) и строим окончательные эпюры внутренних сил.

Проверка правильности вычислений:

$$\Delta_A = 0,$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} (M_{F_{ок}} \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0.$$

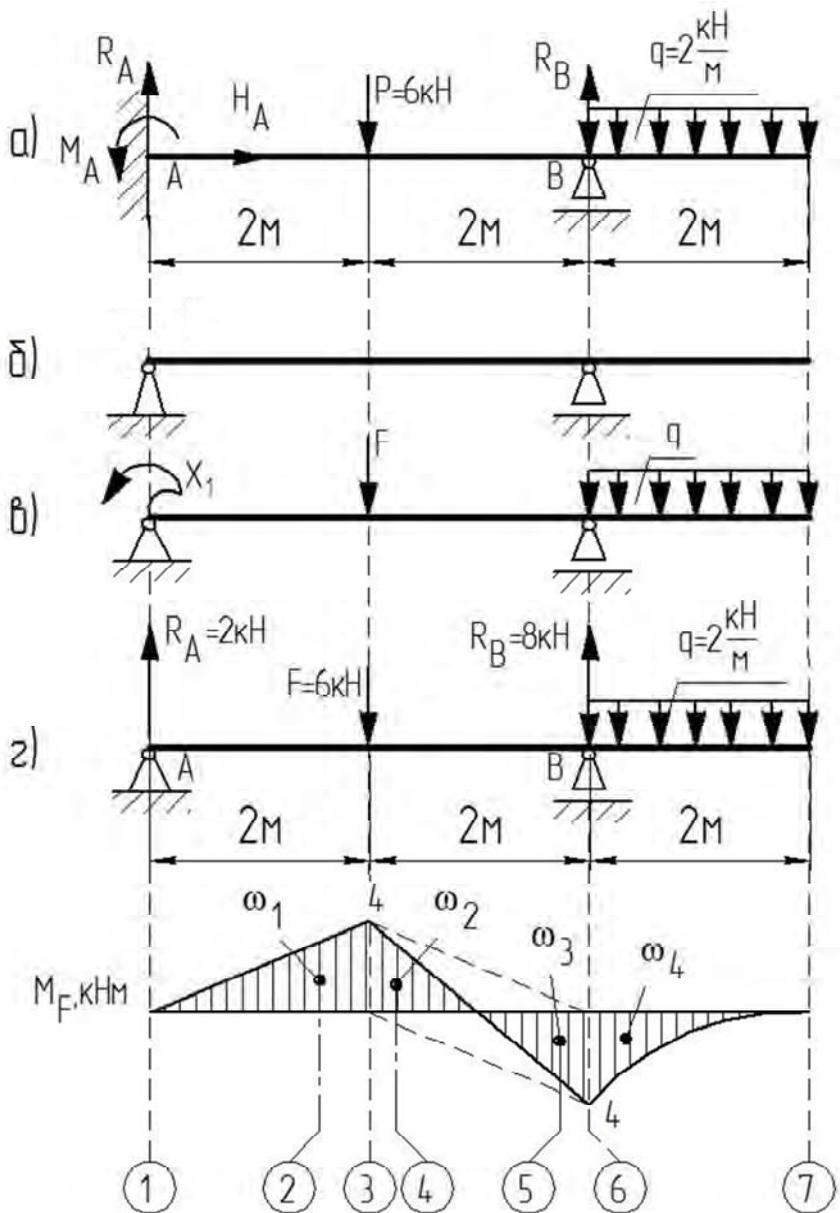


Рис. 2.4

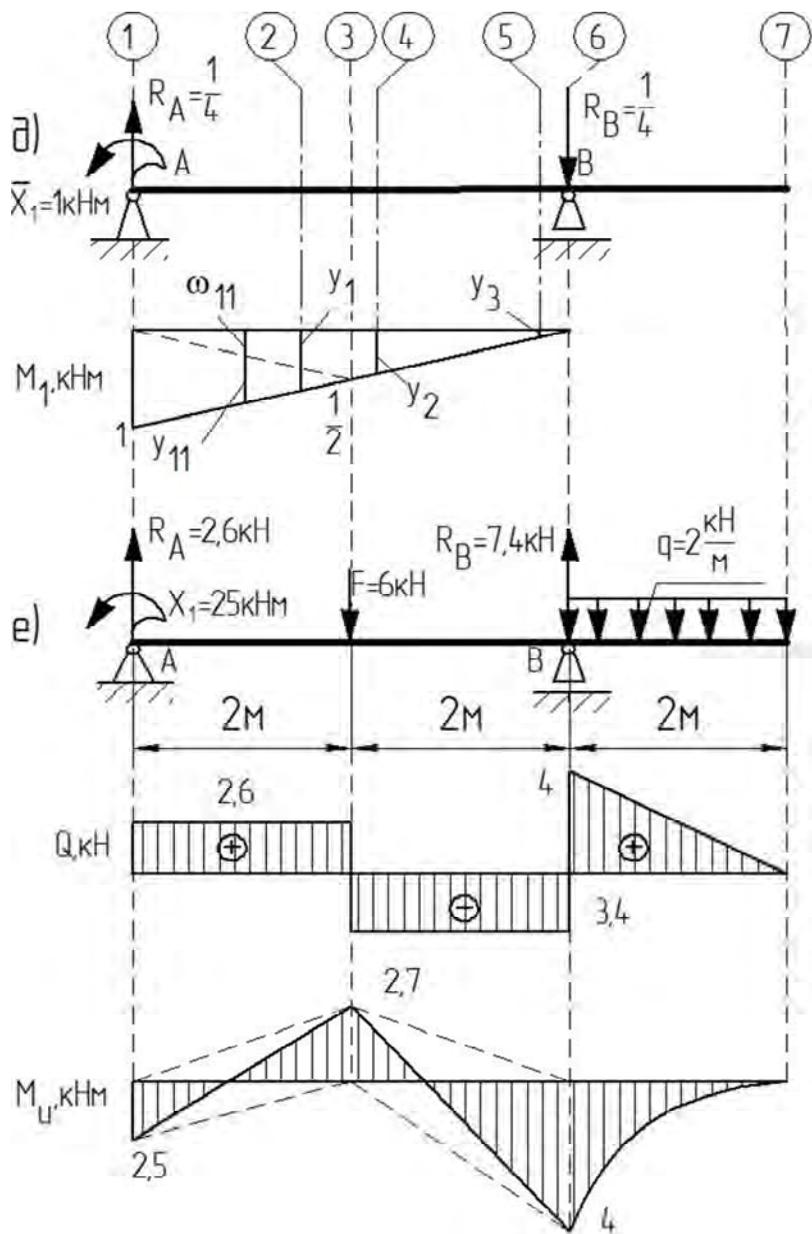


Рис. 2.4 (продолжение)

Пример 3. Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 2.5.

Решение. Балка является два раза статически неопределимой, так как число неизвестных реакций равно пяти, а уравнений статики можно составить три.

Записываем два канонических уравнения метода сил, так как система дважды статически неопределима:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Строим единичные эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_2 , грузовую эпюру M_F .

Находим единичные и грузовые коэффициенты канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI}(\bar{M}_1\bar{M}_1) = \frac{\omega_1 y_1}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4}{EI} = \frac{64}{3EI}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI}(\bar{M}_2\bar{M}_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{8}{3EI}, \\ \delta_{12} &= \frac{1}{EI}(\bar{M}_1\bar{M}_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 4\right)}{EI} = \frac{20}{3EI}. \end{aligned}$$

На основании теоремы о взаимности перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$.

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI}(M_F\bar{M}_1) = \frac{-10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4\right)}{EI} - \\ &\quad - \frac{\frac{1}{2} \cdot 102 \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) - \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2\right)}{EI} = \\ &= \frac{-20 + 40 - \frac{80}{3} - \frac{500}{3}}{EI} = -\frac{520}{3EI}; \end{aligned}$$

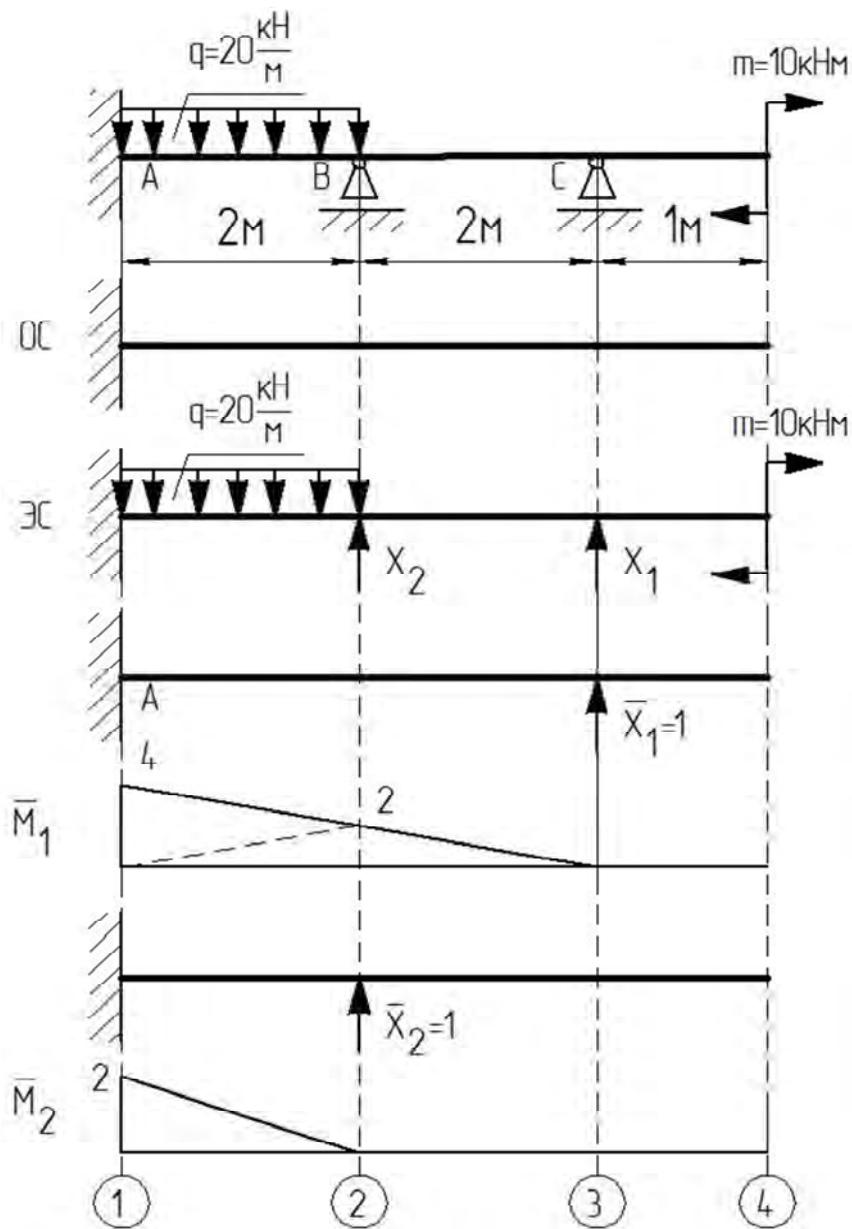


Рис. 2.5

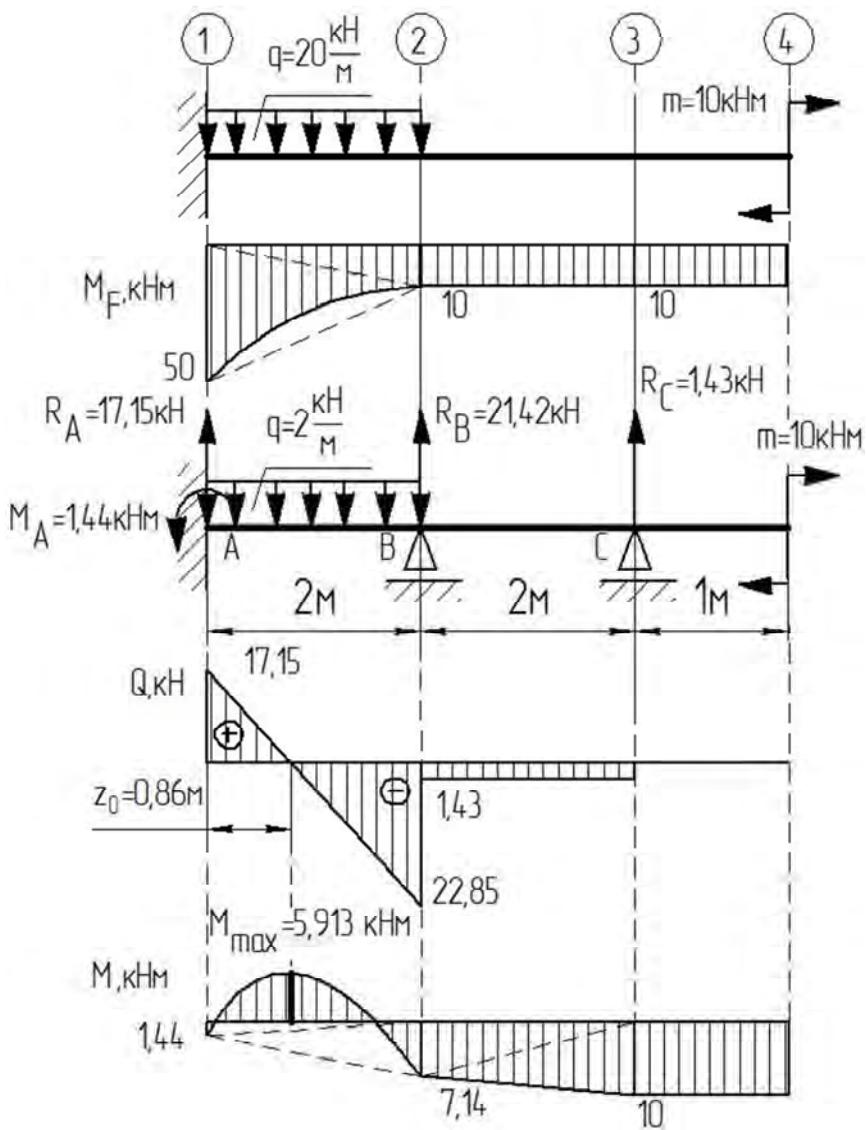


Рис. 2.5 (продолжение)

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} (M_F \bar{M}_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{EI} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{\frac{20}{3} - \frac{20}{3} - \frac{200}{3}}{EI} = -\frac{200}{3EI}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в канонические уравнения метода сил и находим X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{64}{3EI} X_1 + \frac{20}{3EI} X_2 - \frac{520}{3EI} = 0; \\ \frac{20}{3EI} X_1 + \frac{8}{3EI} X_2 - \frac{200}{3EI} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 64X_1 + 20X_2 - 520 = 0; \\ 20X_1 + 8X_2 - 200 = 0. \end{cases}$$

$$X_2 = \frac{200 - 20X_1}{8},$$

$$64X_1 + 20 \left(\frac{200 - 20X_1}{8} \right) - 520 = 0;$$

$$64X_1 + 500 - 50X_1 - 520 = 0;$$

$$X_1 = 1,43, \quad X_2 = \frac{200 - 20 \cdot 1,43}{8} = 24,42.$$

Найденные силы представляют собой реакции опор:

$$R_B = 21,42 \text{ кН}, \quad R_C = 1,43 \text{ кН}.$$

Находим остальные реакции опор из уравнений статики:

$$\sum M_A = 0, \quad -M_A - q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 2 + R_C \cdot 4 - m = 0,$$

$$M_A = -20 \cdot 4 \cdot 2 + 21,42 \cdot 2 + 1,43 \cdot 4 - 10 = -1,44 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\sum M_C = 0, M_A + q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 2 - R_A \cdot 4 - m = 0;$$

$$R_A = \frac{1,44 + 20 \cdot 2 \cdot 3 - 21,42 \cdot 2 - 10}{4} = 17,15 \text{ кН.}$$

Строим окончательные эпюры внутренних сил Q и M .

Делаем проверку. Вертикальные перемещения точек B и C должны быть равны нулю.

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{1}{EI} (M_F \bar{M}_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1,44 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} - \\ & - \frac{\frac{1}{2} \cdot 7,14 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{6,67 - 1,92 - 4,76}{EI} = \frac{6,67 - 6,68}{EI} = \frac{-0,01}{EI}. \end{aligned}$$

Погрешность: $\frac{0,01}{6,67} \cdot 100\% = 0,15\% < 1\% - \text{допустимо.}$

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{1}{EI} (M_F \bar{M}_1) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \left(\frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 7,14 \right)}{EI} + \\ & + \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 7,14 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right)}{EI} - \\ & - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,14 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right)}{EI} = \frac{-16,19 + 40 - 19,04 - 4,8}{EI} = \\ & = \frac{40 - 40,03}{EI} = \frac{-0,03}{EI}. \end{aligned}$$

Погрешность: $\frac{0,03}{40} \cdot 100\% = 0,075\% < 1\%$

3. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК УРАВНЕНИЕМ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Неразрезные балки характеризуются высокой степенью статической неопределенности, то есть большим количеством лишних связей (рис. 3.1, а). Весьма существенное значение при расчете этих балок имеет рациональный выбор основной системы. При выборе основной системы путем замены в ней лишних связей неизвестными усилиями (рис. 3.1, б) вычисление параметров канонического уравнения значительно усложняется, так как каждое уравнение содержит все неизвестные усилия.

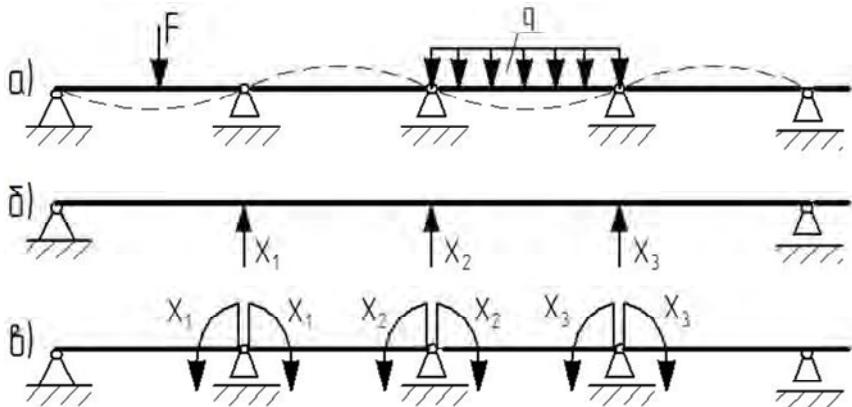


Рис. 3.1

В практических расчетах неразрезных балок принято выбирать основную систему путем постановки шарниров в промежуточных опорах балки, а в качестве неизвестных принимать значения опорных моментов (рис. 3.1, в). В этом случае, очевидно, основной системой будет система однопролетных балок, соединенных на опорах шарнирами. Тогда эквивалентная система при расчете будет представлять собой ряд простых шарнирно-опертых балок, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами по концам:

$$M_1 = X_1; \quad M_2 = X_2; \quad \dots; \quad M_{n+1} = X_{n+1}.$$

Канонические уравнения метода сил в этом случае могут быть записаны в другом виде. Дополнительное уравнение перемещений для каждой промежуточной опоры должно выражать условие равенства нулю взаимного угла поворота опорных сечений смежных балок. Поскольку каждая из двух опорных балок основной системы под действием внешних нагрузок в пролете и концевых моментов деформируется независимо от другой, то торцы двух смежных балок, примыкающих к одной опоре, например n -й (рис. 3.2), могут поворачиваться на некоторый угол $\Delta_n^{\text{лев}}$ и $\Delta_n^{\text{прав}}$.

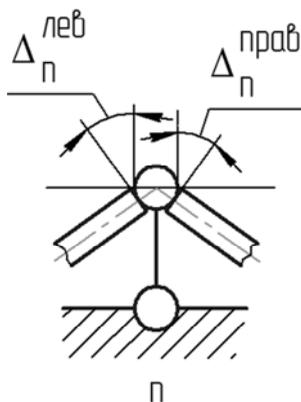


Рис. 3.2

Так как в исходной статически неопределимой неразрезной балке каждая пара таких сечений представляет собой одно сечение, то из условий сплошности их взаимный угол поворота должен быть равен нулю. Отсюда для каждой промежуточной опоры:

$$\Delta = \Delta^{\text{лев}} + \Delta^{\text{прав}} = 0.$$

Так как основная система состоит из отдельных, не связанных между собой однопролетных балок (рис. 3.3), то при раскрытии условия достаточно рассмотреть примыкающие к n -й опоре два пролета l_n и l_{n+1} .

Тогда условие, записанное в канонической форме, принимает вид:

$$\delta_{n,n-1} X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \Delta_{nF} = 0.$$

В соответствии с построениями, приведенными на рис. 3.1:

$$\Delta_{nF} = \frac{1}{EI_n} \omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}};$$

$$\delta_{n,n-1} = \frac{1}{EI_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EI_n}.$$

$$\begin{aligned} \delta_{n,n} &= \frac{1}{EI_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_n}{3EI_n} + \frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}} \delta_{n,n+1} = \\ &= \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}. \end{aligned}$$

С учетом этого и после соответствующих преобразований уравнение перемещений в канонической форме для опоры « n » будет иметь вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Уравнение записывается для каждого пролета балки и называется уравнением трех моментов, так как каждое из них независимо от степени неопределимости содержит не более трех неизвестных. В полученном уравнении трех моментов:

ω_n и ω_{n+1} – площади эпюр изгибающих моментов от заданной нагрузки в n и $n + 1$ пролетах, рассматриваемых как простые двухопорные балки.

a_n и b_{n+1} – расстояния от центров тяжести этих эпюр до $n-1$ (левой) и $n + 1$ (правой) опор соответственно.

Для балки n раз статически неопределимой составляется система из n уравнений трех моментов, решение которой позволяет определить неизвестные опорные моменты M_1, M_2, \dots, M_n .

Далее находятся опорные реакции неразрезной балки. Для чего каждый пролет рассматривается как простая двухопорная балка, нагруженная заданной внешней нагрузкой и найденными опорными моментами, и строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

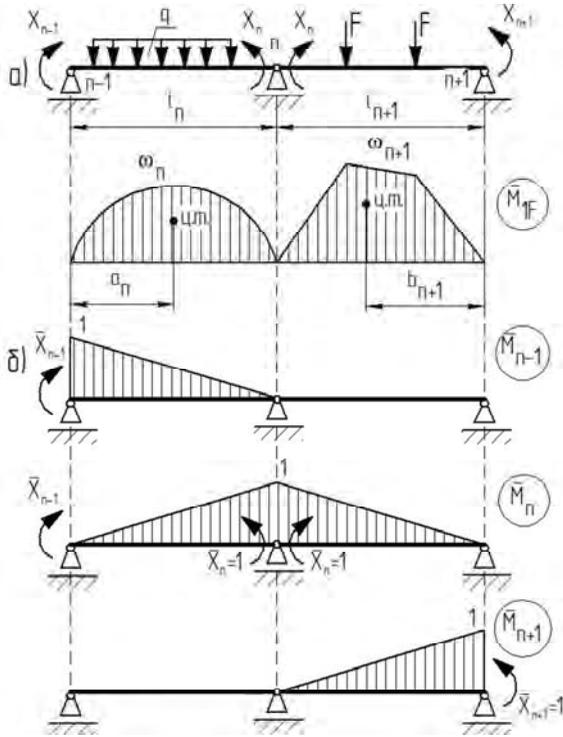


Рис. 3.3

После определения полных реакций опор строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Их получают совмещением эпюр Q и M , построенных для каждого пролета в отдельности. Поперечные силы и изгибающие моменты в произвольном сечении n -го пролета балки могут быть определены по формулам:

$$M_z = M_z^0 + M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} z;$$

$$Q_z = Q_z^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

где M_z и Q_z – изгибающий момент и поперечная сила от заданной внешней нагрузки в рассматриваемом сечении.

Некоторые особенности имеет расчет неразрезной балки с консолями и защемлениями (рис. 3.4).

При наличии нагруженной консоли нагрузка на нее приводится к опоре. Полученный при этом момент удобно учитывать в левой части уравнения трех моментов. В случае защемления вводится «нулевой» пролет длиной $l_1 = 0$.

При наличии на промежуточной опоре сосредоточенного момента его следует рассматривать как внешнюю нагрузку и относить к наименее нагруженному пролету либо делить в долях между смежными пролетами.

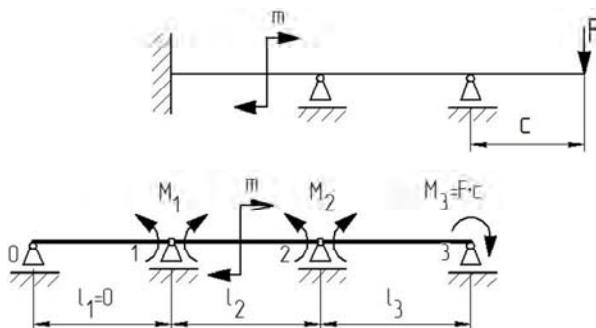


Рис. 3.4

Рекомендуемый порядок расчета неразрезной балки уравнением трех моментов:

1. Определяется степень статической неопределимости балки.
2. Изображается эквивалентная система.
3. Записываются уравнения трех моментов для каждой промежуточной опоры.
4. Для каждого пролета, рассматриваемого как отдельная двухопорная балка, строятся эпюры изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки.
5. Определяются правые части уравнений трех моментов.
6. Путем решения этих уравнений находят значения опорных моментов.
7. Определяются опорные реакции неразрезной балки.
8. Строятся окончательные эпюры Q и M .
9. Выполняется контроль правильности решения задачи.

3.1. Примеры раскрытия статической неопределенности уравнением трех моментов

Пример 1. Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 3.5.

Решение. Балка один раз статически неопределима.

Основной системой будет система двух однопролетных балок, соединенных на промежуточной опоре шарниром. Тогда эквивалентная система при расчете будет представлять собой две простые шарнирно-опертые балки, нагруженные заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами по концам

$$M_1 = X_1; \quad M_2 = X_2; \quad M_3 = X_3.$$

Записываем уравнение трех моментов

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right).$$

Согласно эквивалентной схеме определяем опорные моменты:

$$M_1 = 0, \quad M_3 = -m = -80 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

M_2 – неизвестный момент.

Строим эпюры изгибающего момента для каждой балки в отдельности и определяем правые части уравнения трех моментов:

$$\omega_1 a_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{40 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 135 \text{ кН}\cdot\text{м}^3,$$
$$\omega_2 b_2 = 0.$$

После подстановки и преобразований находим опорный момент M_2 :

$$2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1};$$

$$2M_2(l_1 + l_2) = -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1} - M_3 l_2;$$

$$M_2 = -3 \frac{\omega_1 a_1}{l_1(l_1 + l_2)} - \frac{M_3 l_2}{2(l_1 + l_2)};$$

$$M_2 = -3 \cdot \frac{135}{3 \cdot 6} - \frac{-80 \cdot 3}{2 \cdot 6} = -22,5 + 20 = -2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Момент получился отрицательный, поэтому меняем его направление.

Находим реакции опор для каждой балки с учетом нагрузки и найденного опорного момента.

$$\text{Пролет 1. } \sum M_1 = 0, -M_2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_{01} \cdot 3 = 0,$$

$$R_{01} = \frac{-2,5 + 40 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 59,2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_0 = 0, -M_2 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_{11} \cdot 3 = 0;$$

$$R_{11} = \frac{2,5 + 40 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 60,8 \text{ кН}.$$

$$\text{Пролет 2. } \sum M_1 = 0, M_2 - m + R_{22} \cdot 3 = 0;$$

$$R_{22} = \frac{80 - 2,5}{3} = 25,8 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2 = 0, M_2 - m + R_{12} \cdot 3 = 0;$$

$$R_{12} = \frac{80 - 2,5}{3} = 25,8 \text{ кН}.$$

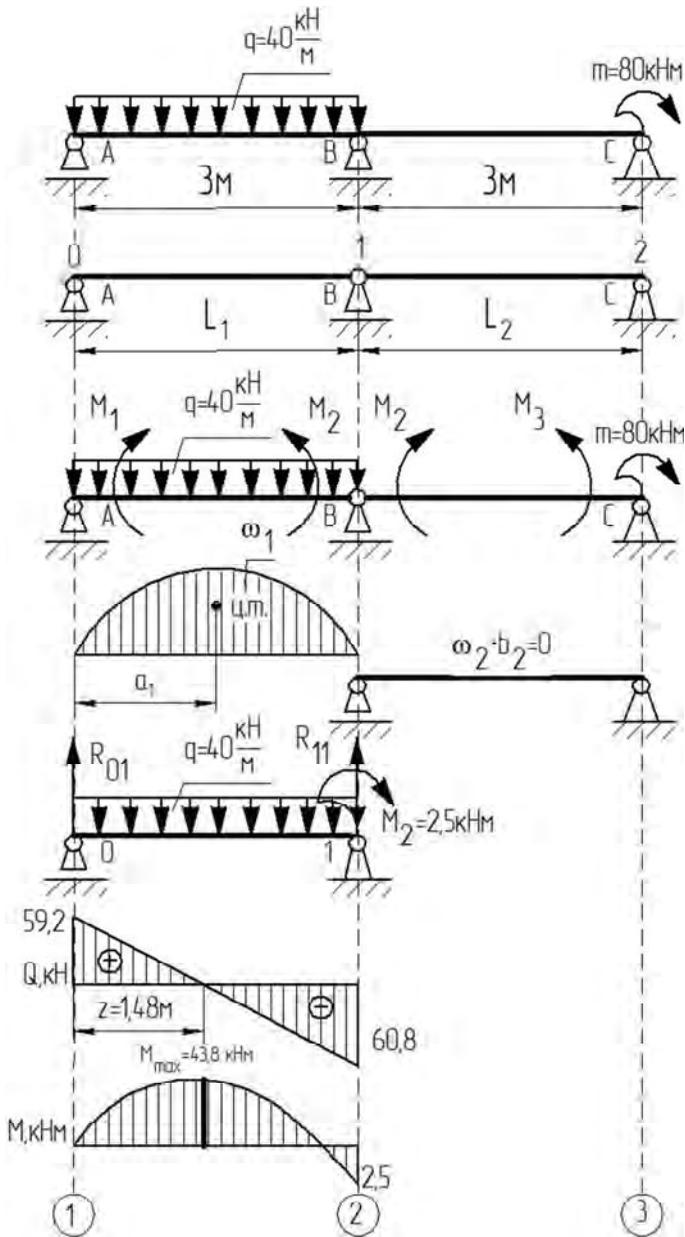


Рис. 3.5

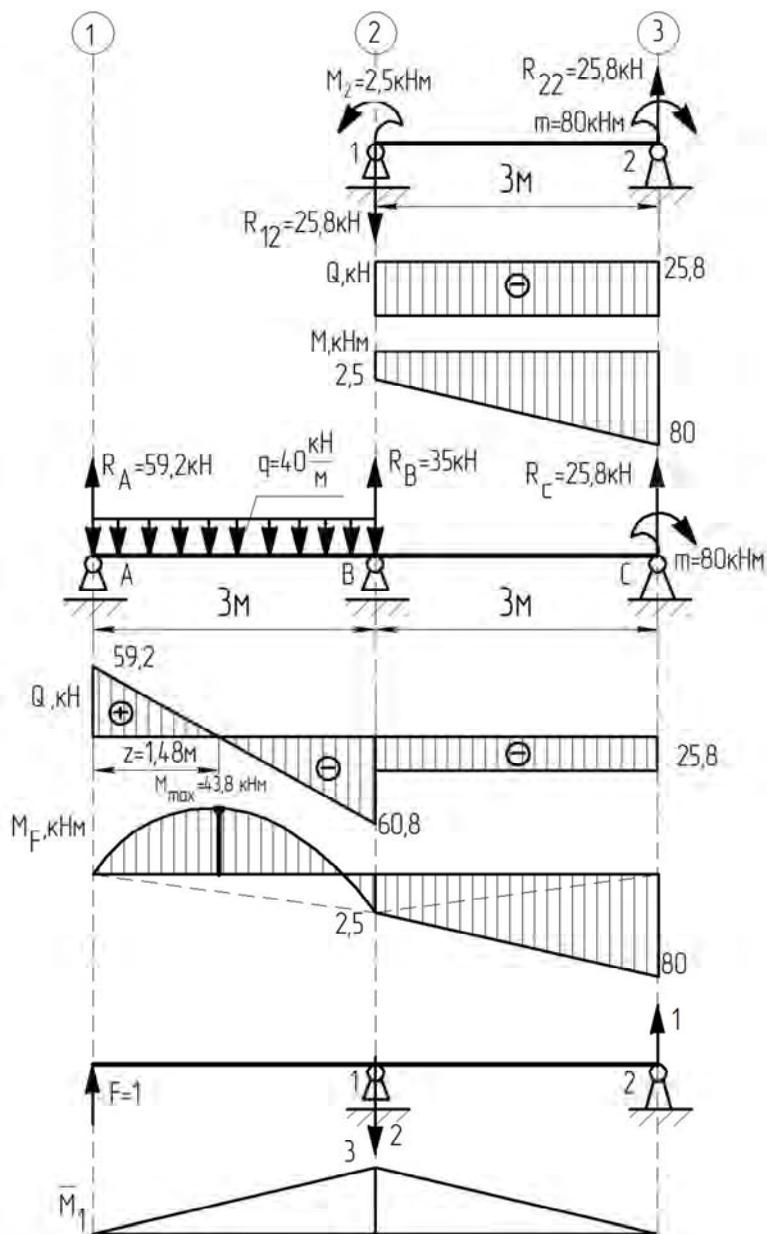


Рис. 3.5 (продолжение)

Строим эпюры по пролетам. Реакции на опорах балки будут равны

$$R_A = R_{01} = 59,2 \text{ кН};$$

$$R_B = R_{11} + R_{12} = 60,8 - 25,8 = 35 \text{ кН};$$

$$R_C = R_{12} = 25,8 \text{ кН}.$$

Выполним проверку правильности вычислений. Вертикальное перемещение точки A должно быть равным нулю

$$\Delta_A = 0,$$

$$\Delta_A = \frac{(M_F \bar{M}_1)}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{40 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = 0.$$

Погрешность равна нулю. Статическая неопределимость балки раскрыта.

Пример 2. Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 3.6.

Решение. Балка один раз статически неопределима. Рисуем приведенную, основную и эквивалентную системы.

Записываем уравнение трех моментов:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right).$$

Находим моменты в опорах:

$$M_1 = 0, \quad M_3 = m = q_2 \cdot 2 = 40 \text{ кНм}.$$

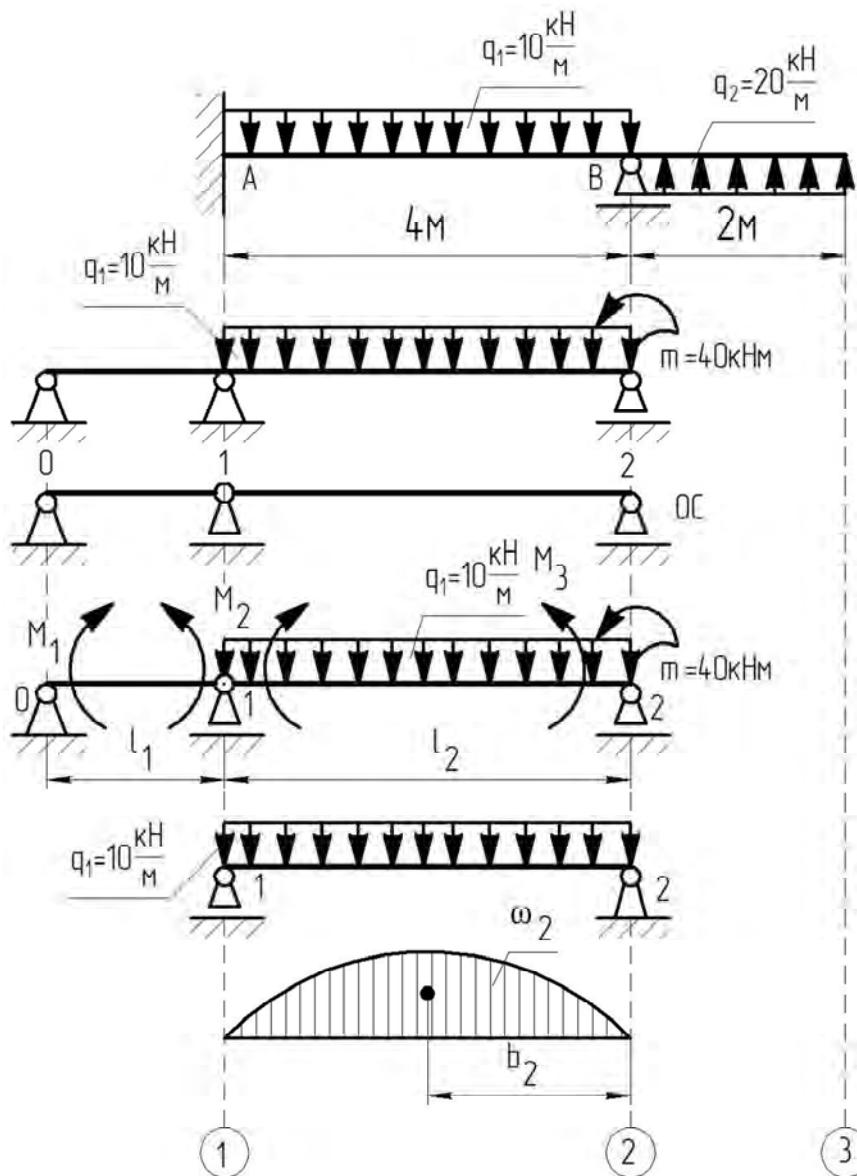


Рис. 3.6

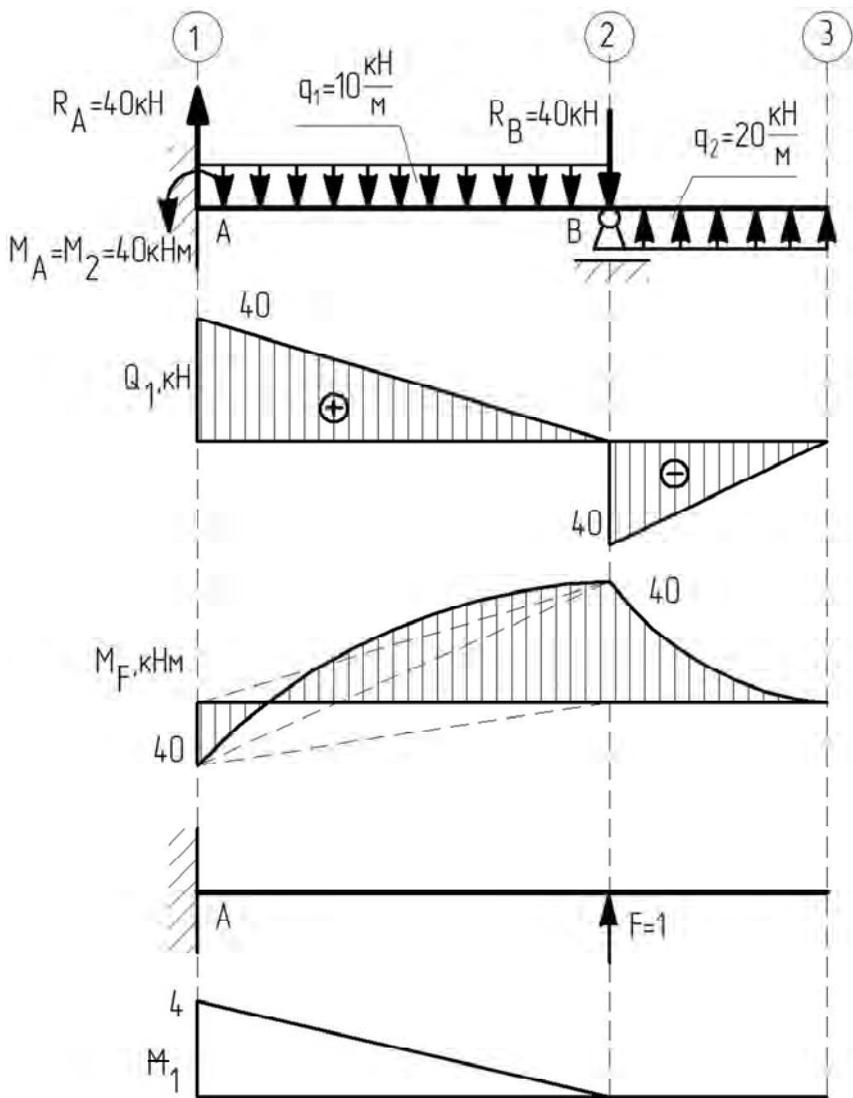


Рис. 3.6 (продолжение)

Момент m учитываем только один раз в уравнении трех моментов и не учитываем на втором пролете балки.

Строим эпюры изгибающего момента для каждой балки в отдельности и определяем правые части уравнения трех моментов:

$\omega_1 a_1 = 0$; $l_1 = 0$, так как это фиктивный (нулевой) пролет.

$$\omega_1 b_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 = 106,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3.$$

После подстановки в уравнение трех моментов и преобразований находим момент M_2 :

$$2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1};$$

$$M_2 = -3 \frac{\omega_1 a_1}{l_1(l_1 + l_2)} - \frac{M_3 l_2}{2(l_1 + l_2)};$$

$$M_2 = -3 \cdot \frac{106,67}{4 \cdot 4} - \frac{40 \cdot 4}{2 \cdot 4} = -20 - 20 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_A = M_2 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Находим реакции опор и строим эпюры внутренних сил:

$$\sum M_A = 0, M_A - q_1 \cdot 4 \cdot 2 + q_2 \cdot 2 \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = \frac{40 - 10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 5}{4} = 40 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, M_A + q_1 \cdot 4 \cdot 2 + q_2 \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = \frac{40 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 40 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность решения задачи. Вертикальное перемещение точки B должно равняться нулю:

$$\Delta_B = 0;$$

$$\Delta_B = \frac{(M_F \bar{M}_1)}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right) = 0.$$

Пример 3. Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 3.7.

Решение. Балка дважды статически неопределима. Выбираем основную систему путем постановки шарниров в промежуточные опоры балки.

Записываем систему уравнений трех моментов:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right); \\ M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \right). \end{cases}$$

В данном примере

$$M_0 = 0, \quad M_3 = 0, \quad l_1 = l_2 = l_3 = l, \\ M_2, \quad M_3 - \text{неизвестные моменты.}$$

Тогда получим

$$\begin{cases} 4M_1 l + M_2 l = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l} + \frac{\omega_2 b_2}{l} \right), \\ M_1 l + 4M_2 l = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{l} + \frac{\omega_3 b_3}{l} \right). \end{cases}$$

Строим эпюры изгибающих моментов и определяем правые части уравнений трех моментов:

$$\frac{\omega_1 a_1}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 2 \right) = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\frac{\omega_2 b_2}{l} = \frac{\omega_2 a_2}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{40 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{320}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_3 b_3}{l} &= \frac{\omega'_3 b'_3 - \omega''_3 b''_3}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Подставляем значения в систему уравнений. Получим

$$M_1 = -55 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_2 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Моменты отрицательны, поэтому меняем их направление на обратное (рис. 3.7, б).

Максимальное значение изгибающего момента на втором пролете определим по формуле:

$$M_z = M_z^0 + M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} z_0 = 38 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_z^0 = \frac{ql_2}{2} z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = 79,5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$z_0 = \frac{86,25}{q} = 2,16 \text{ м}.$$

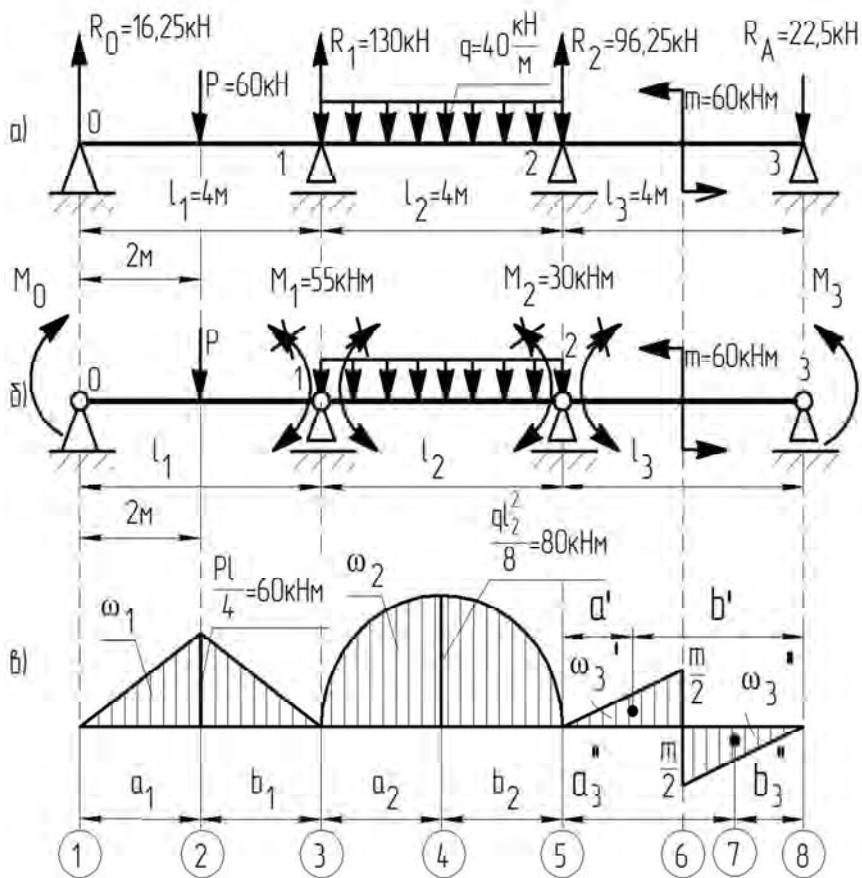


Рис. 3.7

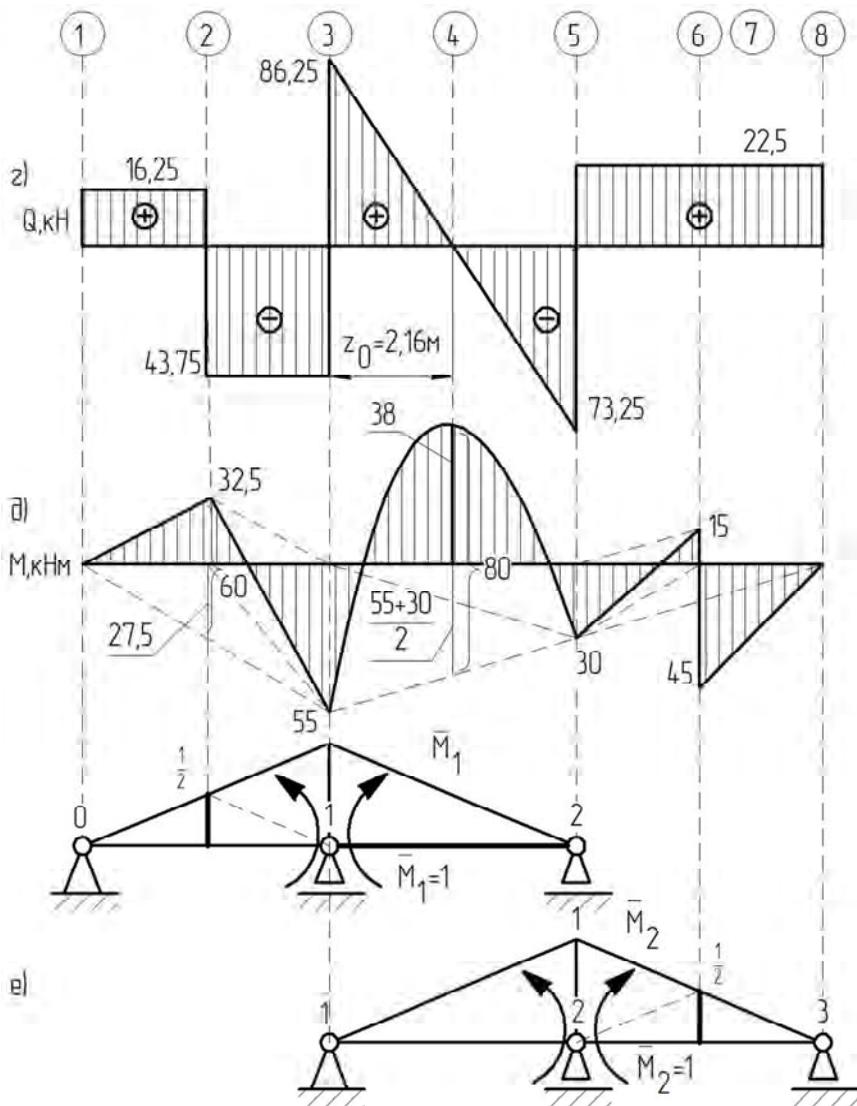


Рис. 3.7 (продолжение)

Выполним проверку путём перемножения эпюры изгибающих моментов M на единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{(M\bar{M}_1)}{EI} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{3EI} (-500 + 500) = 0, \end{aligned}$$

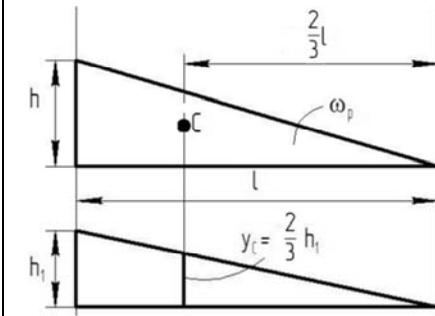
$$\begin{aligned} \frac{(M\bar{M}_2)}{EI} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (-350 + 350) = 0. \end{aligned}$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1967 (1986; 1999). – 552 (512; 591) с.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М.: Высшая школа, 1968 (1973; 1987). – 424 (328; 367) с.
3. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1975 (1989). – 742 (624) с.
4. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.
5. Бородин, Н. А. Сопротивление материалов: учебное пособие / Н. А. Бородин. – М.: Дрофа, 2001. – 288 с.
6. Горшков, А. Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М.: Физматлит, 2002. – 544 с.
7. Механика материалов: учебное пособие / Ю. В. Василевич [и др.]. – Минск: БНТУ, 2005. – 155 с.
8. Качурин, В. К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В. К. Качурин. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
9. Винокуров, Е. Ф. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балькин, И. А. Голубев. – Минск: Наука и техника, 1988. – 464 с.

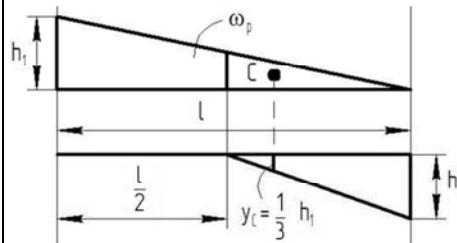
Перемножение эпюр по методу А. Н. Верещагина

$$K = \omega_F y_c$$



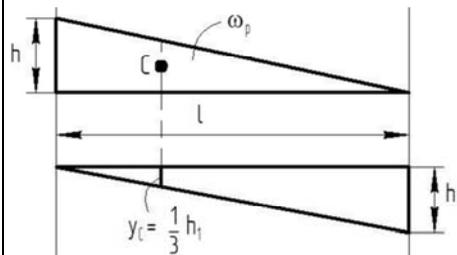
$$K = \frac{1}{2} h l \frac{2}{3} h_1$$

Примечание. Если эпюры расположены по одну сторону от оси, то они перемножаются со знаком «плюс», если по разные – со знаком «минус»



$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} h_1$$

Примечание. Перемножение эпюр выполняется по участкам

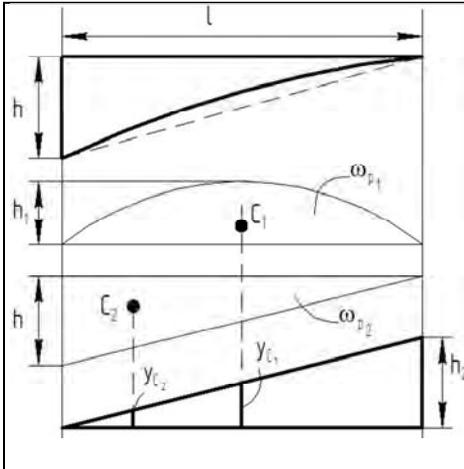


$$K = -\frac{1}{2} h l \frac{1}{3} h_1$$

Примечание. Если обе эпюры линейные, то безразлично умножается площадь первой эпюры на ординату второй или наоборот

	$K = \omega_{F1} y_{C1} + \omega_{F2} y_{C2} =$ $= -hl \frac{1}{2} h_2 - \frac{1}{2} (h_1 - h) l \frac{2}{3} h_2$ <p><i>Примечание.</i> Перемножение эпюр возможно только в том случае, когда хотя бы одна из них линейная</p>
	$y_{C1} = h_3 + \frac{1}{2} (h_2 - h_3);$ $y_{C2} = h_3 + \frac{1}{3} (h_2 - h_3);$ $K = \omega_{F1} y_{C1} + \omega_{F2} y_{C2} =$ $= -hl \left(h_3 \frac{1}{2} (h_2 - h_3) \right) -$ $-\frac{1}{2} l (h_1 - h) \left(h_3 + \frac{1}{3} (h_2 - h_3) \right)$
	$h = \frac{ql^2}{8}, \quad \omega_F = \frac{2}{3} hl,$ $K = -\frac{2}{3} hl \left(h_2 + \frac{1}{2} (h_1 - h_2) \right)$ <p><i>Примечание.</i> Если одна из эпюр криволинейна, всегда берется площадь криволинейной фигуры</p>

	$y_{C1} = h + \frac{1}{3}(h_1 - h);$ $y_{C2} = h + \frac{2}{3}(h_1 - h);$ $K = \frac{1}{2}lh_3(h + \frac{2}{3}(h_1 - h)) - \frac{1}{2}lh_2(h + \frac{1}{3}(h_1 - h)).$ $\Delta ABD = \omega_{F1}, \Delta ABF = \omega_{F2}$
	<p>Чистая квадратичная парабола</p> $h = \frac{ql^2}{8}, \quad \omega_F = \frac{1}{3}hl,$ $K = \frac{1}{3}hl \frac{3}{4}h_1$
	<p>Кубическая парабола</p> $\omega_F = \frac{1}{4}hl;$ $K = -\frac{1}{4}hl \frac{4}{5}h_1$

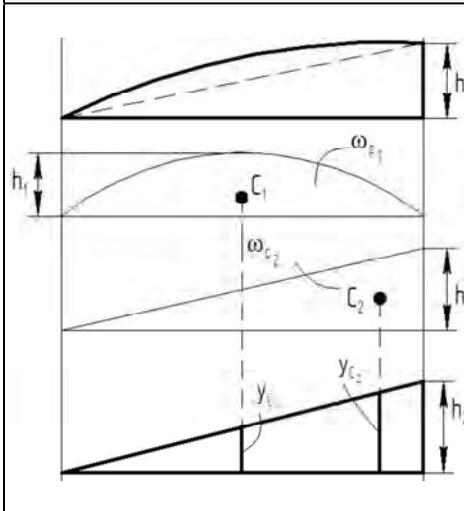


$$y_{c1} = \frac{1}{2}h_2;$$

$$y_{c2} = \frac{1}{3}h_2;$$

$$K = \omega_{F1}y_{c1} + \omega_{F2}y_{c2} = \\ = \frac{2}{3}h_1l\frac{1}{2}h_2 - \frac{1}{2}hl\frac{1}{3}h_2,$$

$$\text{где } h = \frac{ql^2}{8}$$

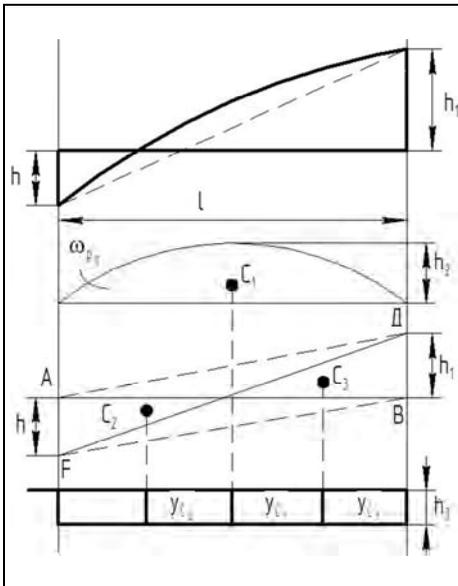


$$y_{c1} = \frac{1}{2}h_2;$$

$$y_{c2} = \frac{2}{3}h_2;$$

$$K = \omega_{F1}y_{c1} + \omega_{F2}y_{c2} = \\ = \frac{2}{3}h_1l\frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}hl\frac{1}{3}h_2,$$

$$\text{где } h_1 = \frac{ql^2}{8}$$



$$\Delta ABD = \omega_{F3};$$

$$\Delta ABF = \omega_{F2};$$

$$K = \omega_{F1}y_{C1} + \omega_{F2}y_{C2} =$$

$$= -\frac{2}{3}h_2l \frac{1}{2}h_3 + \frac{1}{2}hlh_3 - \frac{1}{2}h_1lh_3;$$

$$h_2 = \frac{ql^2}{8}.$$

Примечание. Если одна эпюра сложная, она разбивается на простейшие и перемножение выполняется для каждой простейшей фигуры

Учебное издание

ГОНЧАРОВА Светлана Валерьевна
ЮГОВА Марина Витальевна

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК**

Пособие для студентов специальностей
1-36 01 01 «Технология машиностроения»;
1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»

Редактор *Е. С. Кочерго*
Компьютерная верстка *Ю. С. Кругловой, Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 28.02.2018. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,18. Тираж 100. Заказ 238.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.