УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Леоненко Д.В., Зеленая А.С.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя, оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

В монографии [1] исследованы трехслойные стержни в терморадиационных полях. Деформация трехслойного упругопластического стержня на упругом основании рассмотрена работе [2]. Статья [3] посвящена изучению термоупругопластического изгиба круглой трехслойной пластины на деформируемом основании.

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании физически нелинейной прямоугольной трехслойной пластины, получены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, проведен численный анализ решения.

Постановка задачи. Рассматривается изгиб несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а заполнитель – нелинейно упругий. Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя (рис.1). Принимаем, что для изотропных несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе применим точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. Учитываем, что на границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует произвольная распределённая нагрузка, проекции которой на координатные оси: $q(x,y)$, $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$. За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x,y)$, $u_{ky}(x,y)$ и прогибы $w_k(x,y)$ срединных поверхностей несущих слоев $(k=1,2)$.

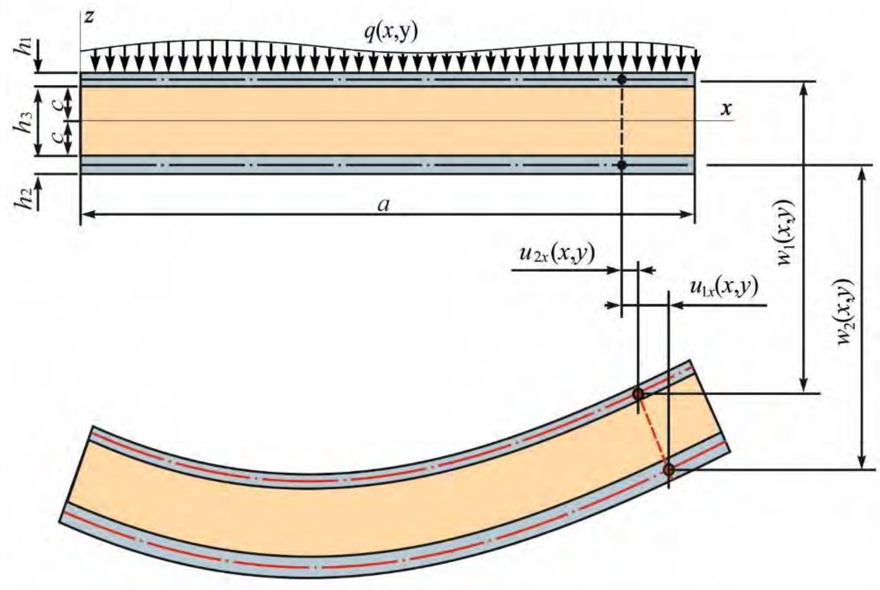

Рис.1. Расчетная схема

В слоях пластины применим физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций:

$$\begin{gathered} s_{ij}^{(k)} = 2G_k\left(1-\omega^{(k)}\left(\varepsilon_u^{(k)}\right)\right)э_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (i,j=x,y,z,\ k=1,2,3), \end{gathered} \tag{1}$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $э_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k-м слое; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_т^{(k)}$ следует положить равными нулю, $\varepsilon_т^{(k)}$ – предел текучести материала; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \le \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности заполнителя; G_k – сдвиговой модуль упругости материалов, K_k – объемный модуль упругости материалов.

Ранее в [4] были получены силовые уравнения равновесия для упругой пластины и соответствующие граничные условия. Они не зависят от физических уравнений состояния, поэтому справедливы и для упругопластической пластины.

Исходя из соотношений (1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом «ω») слагаемые:

$$\begin{gathered} \sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \\ \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_kэ_{ij}^{(k)} + 3K_k\varepsilon^{(k)}\delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k\omega^{(k)}э_{ij}^{(k)} \end{gathered} \tag{2}$$

С внутренними усилиями и обобщенными усилиями проведем аналогичные операции, разбивая на линейные и нелинейные составляющие. Подставив обобщенные усилия в систему уравнений равновесия для упругой пластины и преобразовав, получим систему уравнений физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{gathered} H_{1x}^0 - V_1^0,_y - P_{1x}^0,_x = p_x + H_{1x}^\omega - V_1^\omega,_y - P_{1x}^\omega,_x, \\ H_{1x}^0 + V_2^0,_y + P_{2x}^0,_x = H_{1x}^\omega + V_2^\omega,_y + P_{2x}^\omega,_x, \\ H_{1y}^0 - V_1^0,_x - P_{1y}^0,_y = p_y + H_{1y}^\omega - V_1^\omega,_x - P_{1y}^\omega,_y, \\ H_{1y}^0 + V_2^0,_x + P_{2y}^0,_y = H_{1y}^\omega + V_2^\omega,_x + P_{2y}^\omega,_y, \\ S_{1x}^0,_{xx} + H_2^0 - T_{1x}^0,_x - U_1^0,_{xy} + S_{1y}^0,_{yy} - T_{1y}^0,_y = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} + S_{1x}^\omega,_{xx} + H_2^\omega - T_{1x}^\omega,_x - U_1^\omega,_{xy} + S_{1y}^\omega,_{yy} - T_{1y}^\omega,_y, \\ S_{2x}^0,_{xx} - H_2^0 - T_{2x}^0,_x - U_2^0,_{xy} + S_{2y}^0,_{yy} - T_{2y}^0,_y = S_{2x}^\omega,_{xx} - H_2^\omega - T_{2x}^\omega,_x - U_2^\omega,_{xy} + S_{2y}^\omega,_{yy} - T_{2y}^\omega,_y, \end{gathered} \tag{3}$$

где H_{kx}, H_{ky}, V_k, P_{kx}, P_{ky}, S_{kx}, S_{ky}, H_k, T_{kx}, T_{ky}, U_k – обобщенные усилия (упругие – с индексом «0», нелинейные – с индексом «ω»).

С силовыми граничными условиями поступим аналогично, т.е. при $x = 0, a$ должны выполняться требования:

$$\begin{gathered} P_{1x}^0 = N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^\omega, \quad P_{2x}^0 = N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{rxy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{rxy}^{(2)} + V_2^\omega, \\ T_{1x}^0 - S_{1x}^0,_x - U_1^0,_y = Q_{rx}^{(1)} + (T_{1x}^\omega - S_{1x}^\omega,_x - U_1^\omega,_y), \\ T_{2x}^0 - S_{2x}^0,_x - U_2^0,_y = Q_{rx}^{(1)} + (T_{2x}^\omega - S_{2x}^\omega,_x - U_2^\omega,_y), \quad S_{1x}^0 = M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^\omega, \quad S_{2x}^0 = M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^\omega. \end{gathered}$$

При $y = 0, b$

$$\begin{gathered} P_{1y}^0 = N_{ly}^{(1)} + P_{1y}^\omega, \quad P_{2y}^0 = N_{ly}^{(2)} + P_{2y}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{lxy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{lxy}^{(2)} + V_2^\omega, \\ T_{1y}^0 - S_{1y}^0,_y = Q_{ly}^{(1)} + (T_{1y}^\omega - S_{1y}^\omega,_y), \quad T_{2y}^0 - S_{2y}^0,_y = Q_{ly}^{(2)} + (T_{2y}^\omega - S_{2y}^\omega,_y), \end{gathered} \tag{4}$$

$$S_{1y}^{0}=M_{ly}^{(1)}+S_{1y}^{\omega},\quad S_{2y}^{0}=M_{ly}^{(2)}+S_{2y}^{\omega},\quad U_{1}^{0}=Q_{lxy}^{(1)}+U_{1}^{\omega},\quad U_{2}^{0}=Q_{lxy}^{(2)}+U_{2}^{\omega}$$

Здесь $N_{rx}^{(1)}$, $Q_{rxy}^{(1)}$, $Q_{rx}^{(1)}$, $M_{rx}^{(1)}$, $N_{ly}^{(1)}$, $Q_{lxy}^{(1)}$, $Q_{ly}^{(1)}$, $M_{ly}^{(1)}$ – заданные усилия на торцах пластины в первом несущем слое (с индексом «2» – во втором несущем слое). Индекс r принимает значения $0, a$, индекс l – $0, b$, указывая, на каком конце пластины задано усилие.

Подставим выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, w_1, w_2 в уравнения равновесия (3), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений прямоугольной физически нелинейной трехслойной пластины:

$$\begin{gathered}
a_1u_{1x}-a_1u_{2x}-a_4u_{1x},_{xx}-a_5u_{2x},_{xx}-a_{19}u_{1x},_{yy}-a_{18}u_{2x},_{yy}-a_{21}u_{1y},_{xy}-a_{23}u_{2y},_{xy}+a_2w_1,_x+\\
+a_3w_2,_x-2a_{24}w_1,_{xyy}+a_{25}w_2,_{xyy}-2a_6w_1,_{xxx}+a_7w_2,_{xxx}=p_x+p_\omega,\\[2ex]
-a_1u_{1x}+a_1u_{2x}-a_5u_{1x},_{xx}-a_9u_{2x},_{xx}-a_{18}u_{1x},_{yy}-a_{20}u_{2x},_{yy}-a_{23}u_{1y},_{xy}-a_{22}u_{2y},_{xy}-a_{10}w_1,_x-\\
-a_{17}w_2,_x-a_{24}w_1,_{xyy}+2a_{25}w_2,_{xyy}-a_6w_1,_{xxx}+2a_7w_2,_{xxx}=s_\omega,\\[2ex]
a_1u_{1y}-a_1u_{2y}-a_4u_{1y},_{yy}-a_5u_{2y},_{yy}-a_{19}u_{1y},_{xx}-a_{18}u_{2y},_{xx}-a_{21}u_{1x},_{xy}-a_{23}u_{2x},_{xy}+a_2w_1,_y+\\
+a_3w_2,_y-2a_{24}w_1,_{xxy}+a_{25}w_2,_{xxy}-2a_6w_1,_{yyy}+a_7w_2,_{yyy}=p_y+h_\omega,\\[2ex]
-a_1u_{1y}+a_1u_{2y}-a_5u_{1y},_{yy}-a_9u_{2y},_{yy}-a_{18}u_{1y},_{xx}-a_{20}u_{2y},_{xx}-a_{23}u_{1x},_{xy}-a_{22}u_{2x},_{xy}-a_{10}w_1,_y-\\
-a_{17}w_2,_y-a_{24}w_1,_{xxy}+2a_{25}w_2,_{xxy}-a_6w_1,_{yyy}+2a_7w_2,_{yyy}=r_\omega,\qquad (5)\\[2ex]
-a_2u_{1x},_x-a_2u_{1y},_y+a_{10}u_{2x},_x+a_{10}u_{2y},_y+2a_6u_{1x},_{xxx}+a_6u_{2x},_{xxx}+2a_6u_{1y},_{yyy}+a_6u_{2y},_{yyy}+\\
+2a_{24}u_{1x},_{xyy}+a_{24}u_{2x},_{xyy}+2a_{24}u_{1y},_{xxy}+a_{24}u_{2y},_{xxy}+a_{11}w_1,_{xx}+a_{11}w_1,_{yy}-a_{12}w_2,_{xx}-\\
-a_{12}w_2,_{yy}+a_{15}w_1,_{xxxx}+a_{15}w_1,_{yyyy}-a_{16}w_2,_{xxxx}-a_{16}w_2,_{yyyy}+a_{26}w_1,_{xxyy}-a_{28}w_2,_{xxyy}+\\
+a_8w_1-a_8w_2=q+\frac{p_x,_x h_1}{2}+\frac{p_y,_y h_1}{2}+q_\omega,\\
-a_3u_{1y},_y-a_3u_{1x},_x+a_{17}u_{2y},_y+a_{17}u_{2x},_x-a_7u_{1y},_{yyy}-a_7u_{1x},_{xxx}-2a_7u_{2y},_{yyy}-2a_7u_{2x},_{xxx}-\\
-2a_{27}u_{2y},_{xxy}-a_{25}u_{1y},_{xxy}-2a_{25}u_{2x},_{xyy}-a_{25}u_{1x},_{xyy}-a_{12}w_1,_{xx}-a_{12}w_1,_{yy}+a_{14}w_2,_{xx}+a_{14}w_2,_{yy}+\\
-a_{16}w_1,_{xxxx}-a_{16}w_1,_{yyyy}+a_{13}w_2,_{xxxx}+a_{13}w_2,_{yyyy}-a_{28}w_1,_{xxyy}+a_{27}w_2,_{xxyy}-\\
-a_8w_1+a_8w_2=g_\omega.
\end{gathered}$$

Здесь коэффициенты $a_1,\ldots,a_{28}$ определяются по формулам, полученным при решении упругой задачи. Нелинейные слагаемые

$$\begin{gathered}
p_\omega=H_{1x}^{\omega}-V_1^{\omega},_y-P_{1x}^{\omega},_x,\\
s_\omega=H_{1x}^{\omega}+V_2^{\omega},_y+P_{2x}^{\omega},_x,\\
h_\omega=H_{1y}^{\omega}-V_1^{\omega},_x-P_{1y}^{\omega},_y,\\
r_\omega=H_{1y}^{\omega}+V_2^{\omega},_x+P_{2y}^{\omega},_y,\qquad (6)\\
q_\omega=H_2^{\omega}-T_{1x}^{\omega},_x-U_1^{\omega},_{xy}+S_{1y}^{\omega},_{yy}-T_{1y}^{\omega},_y,\\
g_\omega=S_{2x}^{\omega},_{xx}-H_2^{\omega}-T_{2x}^{\omega},_x-U_2^{\omega},_{xy}+S_{2y}^{\omega},_{yy}-T_{2y}^{\omega},_y.
\end{gathered}$$

Далее применим метод «упругих» решений Ильюшина [5], так как точное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (5) получить не удалось.

Допустим, что в (5), (6) содержится малый параметр, например, все $\omega^{(k)} < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n-го приближения получаем систему уравнений:

$$a_1u_{1x}^n - a_1u_{2x}^n - a_4u_{1x}^n,_{xx} - a_5u_{2x}^n,_{xx} - a_{19}u_{1x}^n,_{yy} - a_{18}u_{2x}^n,_{yy} - a_{21}u_{1y}^n,_{xy} - a_{23}u_{2y}^n,_{xy} + a_2w_1^n,_x +$$
$$+ a_3w_2^n,_x - 2a_{24}w_1^n,_{xyy} + a_{25}w_2^n,_{xyy} - 2a_6w_1^n,_{xxx} + a_7w_2^n,_{xxx} = p_x + p_\omega^{n-1},$$

$$-a_1u_{1x}^n + a_1u_{2x}^n - a_5u_{1x}^n,_{xx} - a_9u_{2x}^n,_{xx} - a_{18}u_{1x}^n,_{yy} - a_{20}u_{2x}^n,_{yy} - a_{23}u_{1y}^n,_{xy} - a_{22}u_{2y}^n,_{xy} - a_{10}w_1^n,_x -$$
$$- a_{17}w_2^n,_x - a_{24}w_1^n,_{xyy} + 2a_{25}w_2^n,_{xyy} - a_6w_1^n,_{xxx} + 2a_7w_2^n,_{xxx} = s_\omega^{n-1},$$

$$a_1u_{1y}^n - a_1u_{2y}^n - a_4u_{1y}^n,_{yy} - a_5u_{2y}^n,_{yy} - a_{19}u_{1y}^n,_{xx} - a_{18}u_{2y}^n,_{xx} - a_{21}u_{1x}^n,_{xy} - a_{23}u_{2x}^n,_{xy} + a_2w_1^n,_y +$$
$$+ a_3w_2^n,_y - 2a_{24}w_1^n,_{xxy} + a_{25}w_2^n,_{xxy} - 2a_6w_1^n,_{yyy} + a_7w_2^n,_{yyy} = p_y + h_\omega^{n-1},$$

$$-a_1u_{1y}^n + a_1u_{2y}^n - a_5u_{1y}^n,_{yy} - a_9u_{2y}^n,_{yy} - a_{18}u_{1y}^n,_{xx} - a_{20}u_{2y}^n,_{xx} - a_{23}u_{1x}^n,_{xy} - a_{22}u_{2x}^n,_{xy} - a_{10}w_1^n,_y -$$
$$- a_{17}w_2^n,_y - a_{24}w_1^n,_{xxy} + 2a_{25}w_2^n,_{xxy} - a_6w_1^n,_{yyy} + 2a_7w_2^n,_{yyy} = r_\omega^{n-1}, \tag{7}$$

$$-a_2u_{1x}^n,_x - a_2u_{1y}^n,_y + a_{10}u_{2x}^n,_x + a_{10}u_{2y}^n,_y + 2a_6u_{1x}^n,_{xxx} + a_6u_{2x}^n,_{xxx} + 2a_6u_{1y}^n,_{yyy} + a_6u_{2y}^n,_{yyy} +$$
$$+ 2a_{24}u_{1x}^n,_{xyy} + a_{24}u_{2x}^n,_{xyy} + 2a_{24}u_{1y}^n,_{xxy} + a_{24}u_{2y}^n,_{xxy} + a_{11}w_1^n,_{xx} + a_{11}w_1^n,_{yy} - a_{12}w_2^n,_{xx} -$$
$$- a_{12}w_2^n,_{yy} + a_{15}w_1^n,_{xxxx} + a_{15}w_1^n,_{yyyy} - a_{16}w_2^n,_{xxxx} - a_{16}w_2^n,_{yyyy} + a_{26}w_1^n,_{xxyy} - a_{28}w_2^n,_{xxyy} +$$
$$+ a_8w_1^n - a_8w_2^n = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} + q_\omega^{n-1},$$
$$-a_3u_{1y}^n,_y - a_3u_{1x}^n,_x + a_{17}u_{2y}^n,_y + a_{17}u_{2x}^n,_x - a_7u_{1y}^n,_{yyy} - a_7u_{1x}^n,_{xxx} - 2a_7u_{2y}^n,_{yyy} - 2a_7u_{2x}^n,_{xxx} -$$
$$- 2a_{27}u_{2y}^n,_{xxy} - a_{25}u_{1y}^n,_{xxy} - 2a_{25}u_{2x}^n,_{xyy} - a_{25}u_{1x}^n,_{xyy} - a_{12}w_1^n,_{xx} - a_{12}w_1^n,_{yy} + a_{14}w_2^n,_{xx} +$$
$$+ a_{14}w_2^n,_{yy} - a_{16}w_1^n,_{xxxx} - a_{16}w_1^n,_{yyyy} + a_{13}w_2^n,_{xxxx} + a_{13}w_2^n,_{yyyy} - a_{28}w_1^n,_{xxyy} + a_{27}w_2^n,_{xxyy} -$$
$$- a_8w_1^n + a_8w_2^n = g_\omega^{n-1}.$$

Здесь n – номер приближения, величины p_ω^{n-1}, s_ω^{n-1}, h_ω^{n-1}, r_ω^{n-1}, q_ω^{n-1}, g_ω^{n-1}, соответствующие нелинейным слагаемым (6). На первом шаге приближения $(n=1)$ они принимаются равными нулю, после этого вычисляются по результатам предыдущей итерации и называются дополнительными «внешними» нагрузками. Дополнительные «внешние» нагрузки служат поправками на пластичность материалов внешних слоев и физическую нелинейность заполнителя

$$p_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)},_y - P_{1x}^{\omega(n-1)},_x,$$
$$s_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)},_y + P_{2x}^{\omega(n-1)},_x,$$
$$h_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)},_x - P_{1y}^{\omega(n-1)},_y,$$
$$r_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)},_x + P_{2y}^{\omega(n-1)},_y, \tag{8}$$
$$q_\omega^{n-1} = H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)},_x - U_1^{\omega(n-1)},_{xy} + S_{1y}^{\omega(n-1)},_{yy} - T_{1y}^{\omega(n-1)},_y,$$
$$g_\omega^{n-1} = S_{2x}^{\omega(n-1)},_{xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)},_x - U_2^{\omega(n-1)},_{xy} + S_{2y}^{\omega(n-1)},_{yy} - T_{2y}^{\omega(n-1)},_y.$$

Применение рассмотренного метода «упругих» решений Ильюшина позволяет сводить краевую задачу последовательно на каждом шаге приближения к соответствующей линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

В качестве граничных условий можно принять или силовые (4) или кинематические условия. Примем кинематические условия свободного опирания рассматриваемой упругопластической пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда для торцевых сечений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\text{при } x=0,a \qquad u_{kx}^n,_x = u_{ky}^n = w_k^n = w_k^n,_{xx} = 0, \\ &\text{при } y=0,b \qquad u_{ky}^n,_y = u_{kx}^n = w_k^n = w_k^n,_{yy} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где k – номер слоя, n – номер приближения.

Решение системы дифференциальных уравнений предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (9):

$$\begin{aligned} u_{1x} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{1xmp}^n \cos\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & u_{2x} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{2xmp}^n \cos\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, \\ u_{1y} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{1ymp}^n \sin\frac{\pi px}{a}\cos\frac{\pi my}{b}, & u_{2y} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{2ymp}^n \sin\frac{\pi px}{a}\cos\frac{\pi my}{b}, \\ w_1 &= \sum_{m,p=0}^{\infty} W_{1mp}^n \sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & w_2 &= \sum_{m,p=0}^{\infty} W_{2mp}^n \sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, \end{aligned} \tag{10}$$

где U_{1xmp}^n, U_{2xmp}^n, U_{1ymp}^n, U_{2ymp}^n, W_{1mp}^n, W_{2mp}^n – неизвестные амплитуды перемещений на n-м шаге.

Поперечную и дополнительную «внешнюю» нагрузку в слоях пластины представим в виде разложения в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m,p=0}^{\infty} q_{mp} \sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & q_{mp} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ p_\omega^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} p_{\omega mp}^{n-1} \cos\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & p_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p_\omega^{n-1}(x,y)\cos\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ s_\omega^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} s_{\omega mp}^{n-1} \cos\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & s_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a s_\omega^{n-1}(x,y)\cos\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ h_\omega^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} h_{\omega mp}^{n-1} \sin\frac{\pi px}{a}\cos\frac{\pi my}{b}, & h_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a h_\omega^{n-1}(x,y)\sin\frac{\pi px}{a}\cos\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ r_\omega^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} r_{\omega mp}^{n-1} \sin\frac{\pi px}{a}\cos\frac{\pi my}{b}, & r_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a r_\omega^{n-1}(x,y)\sin\frac{\pi px}{a}\cos\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ q_\omega^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} q_{\omega mp}^{n-1} \sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & q_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p_\omega^{n-1}(x,y)\sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ g_\omega^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} g_{\omega mp}^{n-1} \sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, & g_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a g_\omega^{n-1}(x,y)\sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{11}$$

После подстановки перемещений (10), нагрузок и дополнительных усилий (11) в систему (7) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U_{1xmp}^n, U_{2xmp}^n, U_{1ymp}^n, U_{2ymp}^n, W_{1mp}^n, W_{2mp}^n:

$$\begin{aligned} &b_1U_{1xmp}^n + b_2U_{2xmp}^n + b_{11}U_{1ymp}^n + b_{12}U_{2ymp}^n + b_3W_{1mp}^n + b_4W_{2mp}^n = p_{\omega mp}^{n-1}, \\ &b_2U_{1xmp}^n + b_5U_{2xmp}^n + b_{12}U_{1ymp}^n + b_{13}U_{2ymp}^n + b_6W_{1mp}^n + b_7W_{2mp}^n = s_{\omega mp}^{n-1}, \\ &b_{11}U_{1xmp}^n + b_{12}U_{2xmp}^n + b_{14}U_{1ymp}^n + b_{15}U_{2ymp}^n + b_{16}W_{1mp}^n + b_{17}W_{2mp}^n = h_{\omega mp}^{n-1}, \\ &b_{12}U_{1xmp}^n + b_{13}U_{2xmp}^n + b_{15}U_{1ymp}^n + b_{18}U_{2ymp}^n + b_{19}W_{1mp}^n + b_{20}W_{2mp}^n = r_{\omega mp}^{n-1}, \\ &b_3U_{1xmp}^n + b_6U_{2xmp}^n + b_{16}U_{1ymp}^n + b_{19}U_{2ymp}^n + b_8W_{1mp}^n + b_9W_{2mp}^n = q_{mp} + q_{\omega mp}^{n-1}, \\ &b_4U_{1xmp}^n + b_7U_{2xmp}^n + b_{17}U_{1ymp}^n + b_{20}U_{2ymp}^n + b_9W_{1mp}^n + b_{10}W_{2mp}^n = g_{\omega mp}^{n-1}. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров m и p, вычисляются по формулам, введенным ранее в [4].

Численная апробация решения. Численное исследование проводилось для трехслойной пластины, набранной из материалов Д16Т – ПТФЭ – Д16Т. Размеры пластины: $a = 1$ м, $b = 1$ м, $h_1 = 0{,}04$ м, $h_2 = 0{,}02$ м, $h_3 = 0{,}2$ м. Механические характеристики материалов взяты из монографии [6]. Нагрузка с интенсивностью $q = 12$ МПа равномерно распределена по всей поверхности первого несущего слоя пластины. Ее величина подбиралась таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени, но деформации оставались в рамках теории малых упругопластических деформаций.

Рис. 2 *а*)–*г*) показывает процесс сходимости метода упругих решений на примере прогибов и продольных перемещений первого и второго слоя при изгибе упругопластической пластины.

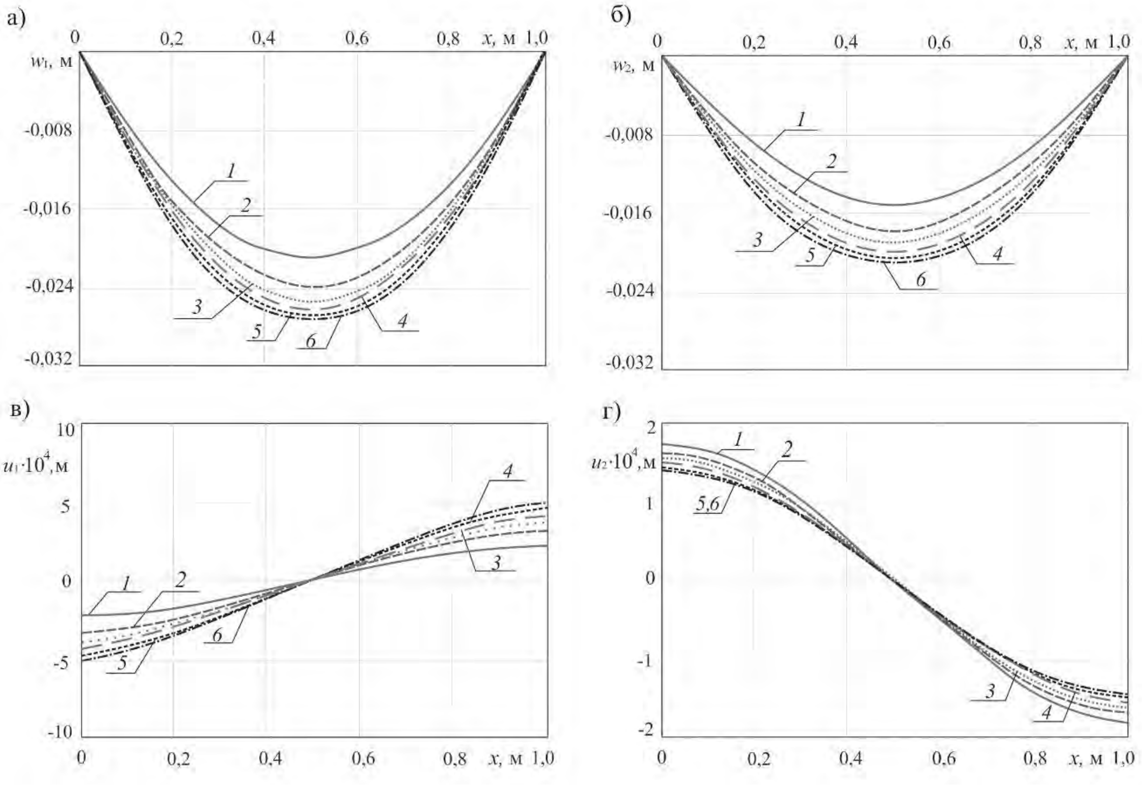

Рис. 2. Сходимость метода «упругих» решений

Номер кривой соответствует номеру итерации. Кривая *1* является решением упругой задачи. Перемещения 2-й итерации отличается от первой на 13 %. При каждой последующей итерации разница между перемещениями уменьшается. За искомое решение принято 6-е приближение, различие между кривыми *5* и *6* составляет менее 1%. При дальнейшем численном исследовании сходимости было обнаружено стремление к нулю между предыдущей и последующей итерацией.

Из рис. 2 *а*), *б*) следует, что упругопластические прогибы несущих слоев пластины больше упругих на 28%. Из рис.2 *в), г)* очевидно, что продольные перемещения первого несущего слоя увеличиваются на 29%, а продольные перемещения второго несущего слоя уменьшаются на 15%.

Вывод. Таким образом, решена краевая задача изгиба прямоугольной трехслойной пластины со слоями, проявляющими упругопластические свойства. Метод «упругих» решений в нашем случае показал хорошую сходимость. Отличие 6-й итерации от 5-й составляет менее 1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.*
2. *Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.*
3. *Starovoitov, E.I. Thermoelasticoplastic bending of circular three-layer plate on the deformable foundation / E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D.V. Leonenko // Actual Problems of Aviation and Aerospace Systems: processes, models, experiment. – 2009. – T.14, 1(28). – P. 115–128.*
4. *Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. научн. тр. – Гомель: БелГУТ, 2017. – Вып. 10. – С. 67−74.*
5. *Ильюшин, А.А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М. : Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.*
6. *Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 343 с.*