УДК 539.3

ЛОКАЛЬНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

[1]Плескачевский Ю.М., [2]Журавков М.А., [3]Старовойтов Э.И.

[1]Национальная Академия наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет Минск, Беларусь
[1]Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Введение. Современные тенденции в строительстве и машиностроении диктуют всё новые и новые требования к конструкциям и изделиям. Необходимость повышения прочностных характеристик непрерывно возрастает, а условия эксплуатации становятся всё более жесткими. В связи с этим широкое применение в технике и строительстве получили многослойные, в том числе трехслойные, конструкции. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий.

В монографиях [1–3] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. Работа [4] посвящена исследованию квазистатического деформирования упругих геометрически нелинейных многослойных стержней. В статьях [5, 6] исследовано деформирование сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев. Изотермическое динамическое поведение слоистых элементов конструкций при непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в работах [7–9]. Статьи [10, 11] посвящены исследованию колебаний трехслойных пластин, возникающих вследствие теплового или радиационного ударов. Анализ деформирования физически нелинейных трехслойных пластин проведен в публикациях [12–14]. Исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней с несжимаемым заполнителем посвящены статьи [15–18]. Деформирование упругих трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем в температурном поле при непрерывных нагрузках рассмотрено в статье [19]..

Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом нагружении *трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем при локальных нагрузках*. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

Постановка краевой задачи. Рассматривается деформирование несимметричного по толщине трехслойной балки в температурном поле под действием локальной поперечной поверхностной нагрузки $q(x)$, распределенной в интервале $a \le x \le b$ (рис. 1). Для изотропных несущих слоёв стержня приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается сдвиг и обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. На стержень действует тепловой поток интенсивности q_t, направленный перпендикулярно несущему слою *1*. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей *несущих* слоёв, h_k – толщина k-го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), b_0 – ширина стержня.

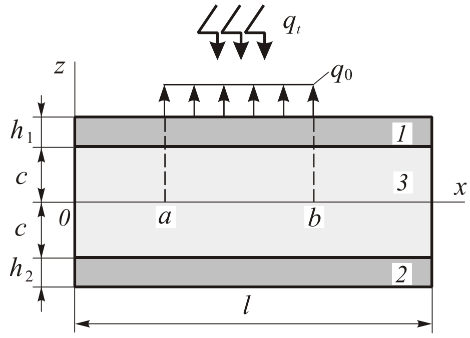

Рис. 1. Схема нагружения стержня

В качестве физических уравнений состояния в слоях стержня используются термоупругие соотношения закона Гука:

$$s_i^{(k)} = 2G_k(T_k)\text{э}_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3\text{э}_{xz}^{(3)},$$
$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (i = x, z;\ k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

где $s_i^{(k)}, \text{э}_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k-го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – приращение температуры, отсчитываемое от начального значения T_0.

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур стержня теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0, вычислять с достаточной точностью по формуле [7]:

$$T = \frac{qH}{\lambda}\left\{\tau + \frac{1}{2}(s + \frac{c+h_2}{H})^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left[\pi n\left(s + \frac{c+h_2}{H}\right)\right]e^{-n^2\pi^2\tau}\right\},$$
$$\tau = \frac{at}{H^2}, \quad a = \sum_{k=1}^{3}\lambda_{tk}h_k \Big/ \sum_{k=1}^{3}\rho_k C_k h_k, \quad H = \sum_{k=1}^{3}h_k\ .. \tag{2}$$

где λ_{tk}, ρ_k, C_k – теплопроводность, плотность и теплоемкость материала k-го слоя.

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$:
в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right)w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \le z \le c + h_1),$$
$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right)w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \le z \le -c);$$

в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right),$$
$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right)w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right)w_2 \quad (-c \le z \le c), \tag{3}$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Искомые перемещения будут удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений равновесия [2, 4]:

$$a_1u_1 - a_1u_2 - a_4u_{1,xx} - a_5u_{2,xx} + a_2w_{1,x} + a_3w_{2,x} - 2a_6w_{1,xxx} + a_7w_{2,xxx} = p,$$
$$-a_1u_1 + a_1u_2 - a_5u_{1,xx} - a_9u_{2,xx} - a_{10}w_{1,x} - a_{17}w_{2,x} - a_6w_{1,xxx} + 2a_7w_{2,xxx} = 0,$$
$$-a_2u_{1,x} + a_{10}u_{2,x} + 2a_6u_{1,xxx} + a_6u_{2,xxx} + a_{11}w_{1,xx} -$$
$$-a_{12}w_{2,xx} + a_{15}w_{1,xxxx} - a_{16}w_{2,xxxx} + a_8w_1 - a_8w_2 = q - q_t, \tag{4}$$
$$-a_3u_{1,x} + a_{17}u_{2,x} - a_7u_{1,xxx} - 2a_7u_{2,xxx} - a_{12}w_{1,xx} + a_{14}w_{2,xx} - a_{16}w_{1,xxxx} + a_{13}w_{2,xxxx} - a_8w_1 + a_8w_2 = q_t.$$

где температурные добавки q_t и коэффициенты $a_1, \dots, a_{17}$, вычисляемые через геометрические и упругие параметры слоев, определяются с учетом температуры

$$q_t = -\frac{3b_0 h_3 K_3 \alpha_{03} T_3}{2cb_0}, \quad a_1 = \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_3 = \frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \quad a_5 = \frac{K_3^+ c}{3}, \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}, \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}, \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c},$$

$$a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \quad a_{10} = \frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6},$$

$$a_{12} = \frac{K_3^-(h_1+h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)\left(1+\frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3 c}{6}, \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6},$$

$$a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, \quad a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}, \quad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12},$$

$$a_{17} = \frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad K_k^+(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k), \quad K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k).$$

В качестве граничных условий принимаем кинематические условия свободного опирания рассматриваемого трехслойного стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в торцевых поперечных сечениях $x = 0,\ l$ (l – длина стержня) должны выполняться следующие требования:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{5}$$

Общее решение краевой задачи.

Решение системы дифференциальных уравнений (4) предполагается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (5):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\ w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

где U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m} – искомые амплитуды перемещений.

Внешнюю нагрузку и температурные составляющие в слоях стержня также представляются в виде разложений в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l}\int_0^l q(x)\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\mathrm{d}x, \\ p &= \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad p_m = \frac{2}{l}\int_0^l p(x)\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\mathrm{d}x, \\ q_t &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{tm} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad q_{tm} = \frac{2}{l}\int_0^l g_t(x)\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7}$$

После подстановки перемещений (6) и нагрузок (7) в систему дифференциальных уравнений (4) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m} при m-ой гармонике:

$$\begin{cases} b_1 U_{1m} + b_2 U_{2m} + b_3 W_{1m} + b_4 W_{2m} = p_m, \\ b_2 U_{1m} + b_5 U_{2m} + b_6 W_{1m} - b_7 W_{2m} = 0, \\ b_3 U_{1m} + b_6 U_{2m} + b_8 W_{1m} + b_9 W_{2m} = q_m - q_{tm}, \\ b_4 U_{1m} - b_7 U_{2m} + b_9 W_{1m} + b_{10} W_{2m} = q_{tm}. \end{cases} \tag{8}$$

где коэффициенты b_i зависят от параметра m и от температуры через коэффициенты a_n.

Решение системы (8) будем получать численно для различных локальных нагрузок. Далее по формулам (6) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (2), деформации – из соотношений Коши, напряжения – из закона Гука (1).

Локальная поверхностная нагрузка. Рассматривается деформирование в температурном поле рассматриваемой трехслойной балки под действием локальной поперечной поверхностной нагрузки $q(x)$, равномерно распределенной в интервале $a \le x \le b$ (см. рис. 1). Аналитический вид нагрузки будет

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x)) \tag{9}$$

где $H_0(x)$ – функция Хевисайда, q_0 – интенсивность нагрузки.

Вычислив интеграл в (7), получим коэффициенты разложения нагрузки (9) в ряд

$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m}\left(\cos\frac{\pi m b}{l} - \cos\frac{\pi m a}{l}\right) \tag{10}$$

После решения системы (8), с учетом коэффициентов (10), получим амплитуды перемещений U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}. Суммированием рядов по формулам (6) вычисляются искомые функции, перемещения в слоях стержня следуют из соотношений (3).

Численные результаты получены для трехслойного стержня, слои которого набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, термомеханические параметры котрых приведены в [2]. Относительные толщины слоев h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18. Интенсивность распределенной локальной нагрузки q_0 = –10 МПа. Температурное поле рассчитывалось по формуле (2) при интенсивности теплового потока q_t = 5000 Дж / (м^2 · с). Расчетная температура на поверхности стержня в момент времени t = 60 мин достигала 540 K.

Рис. 2 иллюстрирует изменение прогибов несущих слоев в срединном поперечном сечении стержня (x = 0,5) в зависимости от длины интервала нагрузки b (9) при a = 0. Максимум, естественно, наблюдается при нагрузке, распределенной по всему стержню. Разность этих прогибов дает величину обжатия заполнителя, которая здесь не велика. Температурная составляющая прогибов достигает 16 %.

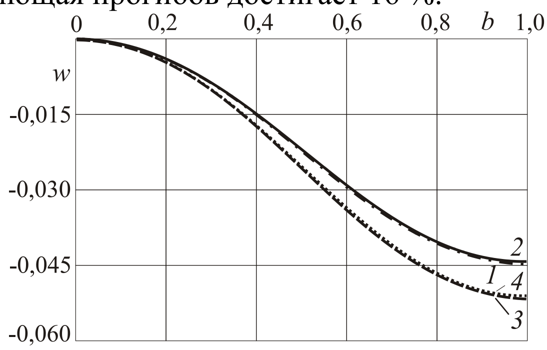

Рис. 2. Прогибы несущих слоев: 1, 3 – первого слоя изотермический и термосиловой, 2, 4 – аналогичные прогибы второго несущего слоя

Сосредоточенная поперечная сила. Примем, что погонная (вдоль координаты y) поперечная сила постоянной интенсивности Q_0, приложена в сечении с координатой $x = a$.

Решение задачи проведем, применяя результаты, полученные для распределенной на интервале $a - c \le x \le a + c$ поверхностной нагрузки интенсивности q_0. Предположим, что c мало и введем в коэффициенты (10) замену $q_0 = Q_0 / (2c)$. После этого будем стягивать интервал нагрузки к сечению $x = a$, для чего устремим величину c к нулю, оставляя Q_0 постоянной. В результате получим следующие коэффициенты разложения прямоугольной нагрузки в ряд:

$$q_m = \frac{2Q_0}{2c\pi m}\left(\cos\frac{\pi m(a+c)}{l} - \cos\frac{\pi m(a-c)}{l}\right) = \frac{2Q_0}{l}\sin\frac{\pi ma}{l} \qquad (11)$$

Вычислив коэффициенты q_m по формуле (11), и внося их в систему (8), получим искомые амплитуды перемещений U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}. Полные перемещения после этого вычисляются суммированием рядов (6).

Численные результаты получены при величине внешней силы $Q_0 = 10^6$ Н. На рис. 3 показано посередине стержня (x = 0,5) в зависимости от координаты a места приложения сосредоточенной силы Q. По мере продвижения силы от левого края стержня прогибы возрастают и достигают максимума при a = 0,5, затем их величина убывает. Если сила приложена на опорах стержня, то прогибы нулевые. Температура увеличивает максимальные прогибы на 16 %.

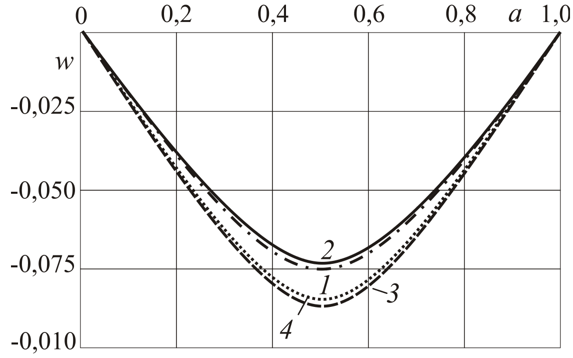

Рис. 3. Зависимость прогибов несущих слоев от координаты приложения нагрузки: 1, 3 – первого слоя изотермический и термосиловой, 2, 4 – аналогичные прогибы второго несущего слоя

Сосредоточенный изгибающий момент. Пусть на рассматриваемый трехслойный стержень в сечении $x = a$ действует погонный поперечный момент интенсивности M_0 = const. Решение задачи проведем, используя сумму решений (11) для двух сосредоточенных сил, равных по величине, направленных в противоположные стороны и действующих в близко расположенных сечениях с координатами $x = a - c$ и $x = a + c$ (c – мало). В этой сумме введем замену $Q_0 = M_0 / (2c)$ и устремим величину параметра c к нулю, оставляя M_0 постоянной. В результате, вычислив предел, получим

$$q_m = \frac{2M_0}{l}\lim_{c\to 0}\left[\frac{l}{2c\pi m}\left(\sin\frac{\pi m(a+c)}{l} - \sin\frac{\pi m(a-c)}{l}\right)\right] = \frac{2M_0\pi m}{l^2}\cos\frac{\pi ma}{l}.$$

Далее, после вычисления параметров q_m по полученной формуле и решении системы (7), получим искомые амплитуды перемещений U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}. Перемещения в слоях, деформации и напряжения после этого вычисляются по рассмотренной ранее схеме.

Численные результаты получены при $M_0 = -10^5$ Н·м. Рис. 4 иллюстрирует изменение прогиба первого несущего слоя посередине стержня (x = 0,5) в зависимости от координаты a места приложения сосредоточенного момента.

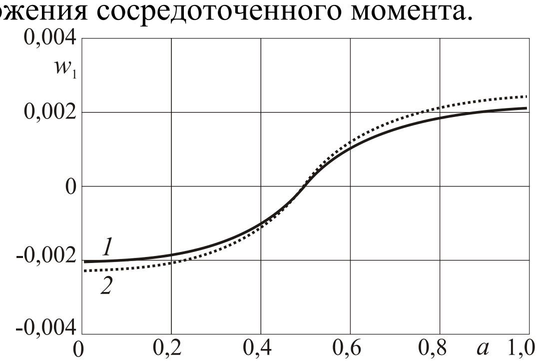

Рис. 4. Прогиб первого слоя в зависимости от координаты а приложения сосредоточенного момента: 1 – изотермическое нагружение, 2 – термосиловое.

Предложенная модель деформирования упругих трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем позволяет исследовать их НДС при локальных нагрузках в температурном поле. Численные расчеты показали существенное влияние температуры на перемещения в стержне.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект Т16Р-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. − М.: Машиностроение, 1980. − 375 с.*
2. *Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. навука. 2004. – 342 с.*
3. *Плескачевский, Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. – 386 с.*
4. *Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.*
5. *Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 380 с.*
6. *Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И.Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.*
7. *Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.*
8. *Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.*
9. *Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.*
10. *Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. − 2012. − Vol. 47, № 1. − P. 111–118.*
11. *Журавков, М. А. Деформирование трехслойного упругого стержня со сжимаемым заполнителем в температурном поле / М. А. Журавков // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 4. – С. 101–109.*
12. *Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки / Э.И. Старовойтов, Ф.Б. Нагиев // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 31.– Мн.: БНТУ. –2016. – С. 176–184.*
13. *Плескачевский, Ю. М. Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: 2017. − Вып. 32. – С. 5–12.*
14. *Старовойтов, Э.И. Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Минск: БНТУ. Вып. 30. – С. 20–29.*
15. *Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.*