51
М54

3891

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

# Методические указания и задания к контрольной работе № 2 по высшей математике

Минск
БНТУ
2010

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

# Методические указания и задания к контрольной работе № 2 по высшей математике для студентов заочного отделения ФТУГ экономических специальностей

Минск
БНТУ
2010

УДК 51 (075.4)
~~ББК 22.1я7~~
М 54

Составители:

З.М. Алейникова, Л.И. Бородич, И.Г. Латышева,
М.Н. Покатилова, А.Ф. Шидловская

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доцент Т.С. Яцкевич;
канд. физ.-мат. наук, доцент В.В. Карпук

Настоящее издание включает в себя программы и контрольные задания (30 вариантов) по высшей математике по темам: «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы», «Ряды», «Теория вероятностей и математическая статистика».

Авторы постарались кратко и доступно изложить в соответствии с программой весь теоретический материал по указанным темам. Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы решением большого числа примеров и задач.

Если в ходе усвоения материала возникнут некоторые вопросы, то их можно задать на консультациях по высшей математике для студентов-заочников, которые проводятся по субботам на кафедре.

Студент должен выполнить контрольное задание по номеру варианта, который совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра). Если номер шифра больше тридцати, то следует из него вычесть число тридцать. Полученный результат будет номером варианта.

Авторы искренне надеются, что данные указания помогут студентам самостоятельно выполнить контрольную работу по математике и хорошо сдать экзамен. Желаем вам успехов!

© БНТУ, 2010

## ПРОГРАММА

### Тема 1. Неопределенный интеграл

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменной. Интегрирование по частям.

Основные методы интегрирования: интегрирование простейших дробей; интегрирование рациональных функций; метод рационализации; интегрирование тригонометрических функций; интегрирование простейших иррациональностей.

### Тема 2. Определенный интеграл. Несобственные интегралы

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы.

Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Вычисление объемов и длин дуг. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

### Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ) и системы

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения (ДУ) 1-го порядка. Задачи Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Интегрирование ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменным, однородных, линейных, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах.

ДУ высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные ДУ высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Определитель Вронского.

Линейные однородные ДУ, условие линейной независимости их решений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные ДУ. Структура общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

### Тема 4. Ряды

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия над рядами. Необходимое условие сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

### Тема 5. Теория вероятностей и математическая статистика

Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Относительные частоты. Закон устойчивости относительных частот.

Классическое и геометрическое определение вероятности. Понятие об аксиоматическом построении теории вероятностей. Методы исчисления вероятностей.

Свойства вероятностей. Теоремы сложения. Независимость событий.

Определение условной вероятности. Вероятность произведения событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.

Дискретные случайные величины (СВ). Ряд распределения. Функция распределения, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной СВ.

Непрерывные СВ. Функция распределения, плотность распределения, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной СВ.

Примеры законов распределения дискретных СВ: биномиальный, Пуассона. Их свойства.

Примеры законов распределения непрерывных СВ: равномерный, показательный, нормальный. Их свойства.

Понятие о различных формах закона больших чисел. Теорема Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.

Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма и полигон.

Эмпирическая функция распределения. Выборочная средняя и дисперсия.

Оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для математического ожидания нормально распределенной СВ при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормально распределенной СВ.

Понятие о статистических гипотезах и критериях согласия. Критерии согласия $\chi^2$ – Пирсона и Колмогорова.

# ТЕМА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 1.1. Понятие неопределенного интеграла

Функция $F(x)$, определённая в промежутке $[a;b]$ называется **первообразной** данной функции $f(x')$, если для $x \in [a;b]$ выполнено равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Для заданной функции $f(x)$ её первообразная определяется неоднозначно. Доказано, что если $F'(x)$ – первообразная, для $f(x)$, то выражение $F(x)+c$, где $c$ – произвольное число, задаёт все возможные первообразные для функции $f(x)$.

Любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

**Неопределённым интегралом** от данной функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \qquad (F'(x)=f(x))$$

где: $\int$ – знак неопределённого интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, $x$ – переменная интегрирования.

Нахождение для функции $f(x)$ всех её первообразных называется её интегрированием. Интегрирование – действие обратное дифференцированию.

### Свойства неопределенного интеграла (НИ)

Из определения НИ непосредственно вытекают его свойства:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$
2. Дифференциал НИ равен подынтегральному выражению:
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
4. $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
5. $\int dF(x) = F(x)+c$.

### Таблица интегралов

1. $\int dx = x + c_1$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c(n \neq -1)$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad (a>0, a\neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + c$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;
7. $\int \cos x dx = -\sin x + c$;

8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

9. $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$, $a \neq 0$;

10. $\int\frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a} + c\right|$;

11. $\int\frac{dx}{a^2-x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$;

12. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$;

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$.

Справедливость этих формул проверяется дифференцированием.

## 1.2. Основные методы интегрирования

Задача данный интеграл свести к табличному.

**Непосредственное интегрирование.** Знать таблицу интегралов, его основные свойства, уметь преобразовывать алгебраические и тригонометрические выражения.

а) $$\int\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx = \left|\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right| = \int\frac{\left(x^3 + 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 + x^{\frac{3}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \left|\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}\right| =$$

$$= \int\left(x^{\frac{8}{3}} + 3x^{\frac{13}{6}} + 3x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{7}{6}}\right)dx = \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + 3\cdot\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} + c =$$

$$= \frac{3}{11}x^3\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{11}x^6\sqrt{x^5} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + c$$

б) $$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \left|\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}dx\right| = \int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\left(tgx + x\right) + c.$$

**Метод подведения функции под знак дифференциала** (сознательное понимание таблицы).

Любая формула интегрирования $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + c$ сохраняет свой вид, если в неё вместо независимой переменной $x$, подставить любую дифференцируемую функцию $u = u\left(x\right)$

$$\int f\left(u\right)du = F\left(u\right) + c.$$

Подведение функции под знак дифференциала состоит в том, что под знак дифференциала записывают функцию, дифференциал которой равен данному выражению. Подведение функции под знак дифференциала применяется для сведения интегралов к табличным, т.е. к виду: $\int f\left(u\right)du = F\left(u\right) + c$

Применяя метод подведения функции под знак дифференциала, найти интегралы:

1. $$\int e^{arctgx}\frac{dx}{1+x^2} = \left|\begin{array}{c} 1)\ \int e^u du = e^u + c \\ 2)\ u = arctgx \\ 3)\ du = d\left(arctgx\right) = \frac{1}{1+x^2}dx \end{array}\right| = \int e^{arctgx}d\left(arctgx\right) = e^{arctgx} + c.$$

2. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \begin{array}{c} 1)\ \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \\ 2)\ u = \ln x \\ 3)\ du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int (\ln x)^{-3} d(\ln x) = \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} + c = c - \frac{1}{2\ln^2 x}.$

**Интегралы, содержащие квадратный трёхчлен:** $\int \frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} dx$ и $\int \frac{A_2 x + B_2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Для сведения этих интегралов к табличным надо в числителе дроби выделить дифференциал квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, т.е. слагаемое $(2ax + b)dx$. А затем интеграл разбить на сумму двух интегралов, каждый из которых – табличный (во втором интеграле квадратный трёхчлен представить в виде суммы или разности квадратов).

| | |
|---|---|
| 1) $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$ | 1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c;$ |
| 2) *а.* $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + c;$ | 2) *а.* $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c;$ |
| *б.* $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + c;$ | *б.* $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + c;$ |

Найти интегралы:

1. $\int \frac{3x-7}{x^2+6x+25} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6) - \frac{18}{2} - 7}{x^2+6x+25} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25} -$

$-16 \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + 4^2} = \frac{3}{2} \ln\lvert x^2+6x+25\rvert - 16 \cdot \frac{1}{4} arctg \frac{x+3}{4} + c.$

2. $\int \frac{(4x-5)dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{-2(-2x+2)+4-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = -2\int (-x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}} (-2x+2)dx -$

$- \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = -4\sqrt{-x^2+2x+3} - \arcsin\frac{x-1}{2} + c.$

3. $\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}} = \int \frac{\frac{1}{9}(18x+6) - \frac{2}{3} + 6}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx = \frac{1}{9} \int (9x^2+6x+2)^{-\frac{1}{2}} (18x^2+6)dx +$

$+\frac{16}{9} \int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{(3x+1)^2+1}} = \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{16}{9} \ln\left\lvert 3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right\rvert + c.$

**Метод подстановки** (замена переменной). Этот способ часто полезен в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ не может быть непосредственно преобразован к табличным. Полагая $x = \varphi(t)$, где $t$ – новая переменная, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

Тогда $f(x) = f(\varphi(t))$, $dx = \varphi'(t)dx$ и $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(y)dt$ - **формула замены переменной в неопределенном интеграле.**

*Замечание. Иногда целесообразно применить обратную подстановку:* $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$.

Формула доказывается дифференцированием обеих её частей. Удачная подстановка позволяет упростить исходный интеграл, сведя его к табличным. Однако даже в тех случаях, когда метод подстановки не приводит исходный интеграл к табличному, он часто позволяет упростить подынтегральную функцию и тем самым облегчить вычисление интеграла.

**Пример 1.1**. Найти интегралы:

$$1.\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\left|\begin{matrix} t=e^x \ ; \ dx=\dfrac{dt}{t} \\ dt=e^x dx=tdx; \end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t\left(t+t^{-1}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+c=arctge^x+c.$$

$$2.\ \int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\left|\begin{matrix}1+\ln x=t^2\\ \dfrac{1}{x}dx=2tdt\\ \ln x=t^2-1\end{matrix}\right|=2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=2\left(\int dt+\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+c=\left|t=\sqrt{1+\ln x}\right|=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}-1}\right|+c=$$

$$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\ln x\right|-\ 2\left|\sqrt{1+\ln x}+1\right|+c.$$

*Замечание. Чаще метод подстановки применяется при интегрировании иррациональных выражений.*

$$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\left|\begin{matrix}e^x+1=t^4\\ e^xdx=4t^3dt\\ e^x=t^4-1\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(t^4-1\right)4t^3dt}{t}=4\int\left(t^6-t^2\right)dt=4\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^3}{3}\right)+c=$$

$$=\left|t=\sqrt[4]{e^x+1}\right|=4\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}\left(\frac{e^x+1}{7}+\frac{1}{3}\right)+c.$$

**Интегрирование по частям.** Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Известно, что $d(uv)=vdu+udv,\Rightarrow udv=d(uv)-vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

**– формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла.**

Применение метода интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл. При его применении подынтегральное выражение данного интеграла разбивается на два сомножителя $(u$ и $dv)$. При переходе к правой части формулы первый из них дифференцируется $(du=u'dx)$; второй интегрируется $\left(V=\int dv\right)$, (если дифференцирование существенно упростит один множитель, при условии, что интегрирование не слишком усложнит другой).

Некоторые классы интегралов, которые удобно брать по частям (за $u$ в этом случае принимаются логарифмическая или обратная тригонометрическая функция):

1. $\int x^n e^x dx,\ \int x^n\sin xdx,\ \int x^n\cos xdx\ \left(u=x^n\right)$.
2. $\int x^n\ln xdx,\ \int x^n\arcsin xdx,\ \int x^n\mathrm{arctg}xdx$.
3. Круговые или циклические интегралы. $\int e^x\sin xdx,\ \int a^x\cos xdx,\ \int\cos\ln xdx$. Выбор $u$ и $dv$ равносилен.

Например:

$$1.\ \int \mathrm{arctg}x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\mathrm{artg}x & du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right| = x\,\mathrm{arctg}x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c.$$

Иногда полезно повторить интегрирование по частям.

$$2.\ \int x^2\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u=x^2 & du=2x\,dx \\ \cos x\,dx=dv & V=\int\cos x\,dx=\sin x \end{matrix} \right| = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u=x & du=dx \\ du=\sin x\,dx & v=-\cos x \end{matrix} \right| = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.$$

**Интегрирование рациональных дробей.** Рациональной дробью называется отношение двух многочленов: $\dfrac{Pm(x)}{Qn(x)}$. Если $m<n$, то рациональная дробь правильная; если $m \le n$ - неправильная.

Если дробь неправильная, надо выделить целую часть, разделить числитель на знаменатель, т.е. неправильную дробь представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Например:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4-x^3+1 & x^2+x-2 \\ \cline{3-3}
 & x^4+x^3-2x^2 & x^2-2x+4 \\ \cline{1-2}
- & -2x^3+2x^2+1 & \\
 & -2x^3-2x^2+4x & \\ \cline{1-2}
- & 4x^2-4x+1 & \\
 & 4x^2+4x-8 & \\ \cline{1-2}
 & -8x+9, \Rightarrow & \text{неправильная дробь}
\end{array}$$

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2-2x-2} = \left(x^2-2x+4\right) - \frac{8x-9}{x^2+x-2};$$

**Простейшие рациональные дроби:** $1.\dfrac{A}{x-a}$; $2.\dfrac{A}{(x-a)^k}$; $3.\dfrac{M_1x+N_1}{ax^2+bx+c}$; $4.\dfrac{M_2x+N_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}\ k \ge 2$.

Квадратный трёхчлен $ax^2+bx+c$ не имеет действительных корней.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие:

**Теорема.** Каждая правильная рациональная дробь $\dfrac{Pm(x)}{Qn(x)}$, *(m<n)* может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей.

Это разложение связано с разложением знаменателя дроби на множители:

а) Каждому линейному множителю знаменателя $(x-a)^k$ соответствует $k$ простейших дробей вида (1), (2), числитель которых – неопределённые коэффициенты, а знаменатель – целые положительные степени двучлена $(x-a)$, начиная со степени $k$ и кончая первой;

б) Каждому квадратному множителю $\left(x^2+px+q\right)^k$ соответствует $k$ простейших дробей вида (3), (4), числитель которых – многочлен первой степени, с неопределёнными коэффициентами, а знаменатель – положительные степени трёхчлена $\left(x^2+px+q\right)$, начиная со степени $k$ и кончая первой.

Итак, для интегрирования рациональных дробей надо:

1. Установить, является ли данная рациональная дробь правильной или неправильной. Если она неправильная, выделить целую часть.
2. Проинтегрировать целую часть и правильную дробь. Для интегрирования правильной дроби необходимо:

3. Разложить знаменатель дроби на множители.

a. Представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами.

b. Найти коэффициенты.

c. Проинтегрировать простейшие дроби.

**Пример 1.2.** Найти интегралы: 1. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2+x}dx$. 2. $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$

**Решение.** 1) $f(x)=\frac{x-2}{x^3+2x^2+x}$ – правильная рациональная дробь, следовательно, её можно, разложить на простейшие:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Неопределённые коэффициенты разложения находят методом неопределённых коэффициентов или методом частных значений.

Используем метод неопределённых коэффициентов:

Приведём простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A^{(x+1)^2}}{x}+\frac{B^{x}}{(x+1)^2}+\frac{C^{(x+1)x}}{x+1}=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)^2};$$

$Ax^2+2Ax+A+Bx+Cx^2+Cx=x-2$.

Многочлены равны, если равны все коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+C=0 \\ x & 2A+B+C=1 \\ x^0 & A=-2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-2 \\ C=2 \\ B=3 \end{array}$$

$$\int\frac{(x-2)dx}{x^2+2x^2+x}=-2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}+2\int\frac{dx}{x+1}=-2\ln|x|-\frac{3}{x+1}+2\ln|x+1|+c=2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{3}{x+1}+c.$$

2) $f(x)=\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}$ - неправильная рациональная дробь, выделяем целую часть:

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=\frac{(x^3-8)+x^2+3}{x^3-8}=1+\frac{x^2+3}{x^3-8}.$$

Интегрируем правильную дробь $\frac{x^2+3}{x^3-8}$, разложив её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{x^2+3}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

$(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C=x^2+3$.

$$\left.\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=1 \\ x & 2A-2B+C=0 \\ x^0 & 4A-2C=3 \end{array}\right\}.$$

Решая систему, получим $A=\frac{7}{12}$; $B=\frac{5}{12}$; $C=-\frac{1}{3}$;

$$\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx=\int dx+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{1}{12}\int\frac{\frac{5}{2}(2x+2)-9}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

**Интегрирование тригонометрических выражений.** Так как любое тригонометрическое выражение можно записать только через *sinx* и *cosx*, то получим интеграл рационально зависящий от *sinx* и *cosx*:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx(*).$$

Этот интеграл всегда сводится к интегралу от рациональной функции относительно новой переменной с помощью подстановки $tg\frac{x}{2}=t$, тогда

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Например, найдем интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\cancel{2}dt\,\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{(1+t^2)}\cdot\cancel{2}t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

Универсальная подстановка <u>всегда</u> позволяет вычислить интеграл ($*$), однако её используют очень редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Она используется в тех случаях, когда другие подстановки применять нельзя.

***Частные случаи:***

*1) Интеграл вида:* $\int(\sin x)^m(\cos x)^n dx$.

а) Если один из показателей $m$ или $n$ – целое положительное нечётное число, второй любой то подстановка $\sin x=t$, $\cos xdx=d(\sin x)=dt$ или $(\cos x=t-\sin xdt=dt)$ быстрее приводит к цели.

Например,

$$\int\frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}}=\int\frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sqrt{\sin x}}d(\sin x)=$$

$$=\int(\sin x)^{-\frac{1}{2}}d(\sin x)-2\int(\sin x)^{\frac{3}{2}}d(\sin x)+\int(\sin x)^{\frac{7}{2}}d(\sin x)=$$

$$=2\sqrt{\sin x}-\frac{4}{5}\sin^2 x\sqrt{\sin x}+\frac{2}{9}\sin^4 x\sqrt{\sin x}+c=\sqrt{\sin x}\left(2-\frac{4}{5}\sin^2 x+\frac{2}{9}\sin^4 x\right)+c.$$

б) Оба показателя $m$ и $n$ – целые положительные чётные, тогда используют формулы:

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2};\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Например,

$$\int \sin^4 x\cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4 dx = \frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x + \int\frac{1+\cos 8x}{2}dx\right) = \frac{1}{64}\left(x-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+c =$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{3x}{2}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+c.$$

в) Оба показателя чётные целые, но хотя бы один из них отрицательный, тогда используется подстановка $tgx = t$ или с помощью тригонометрических преобразований.

Например,

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x} = \left|\begin{array}{l} tgx = t \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right| = \int\frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{t^4\left(1+t^2\right)} = \int\frac{\left(1+t^2\right)}{t^4}dt = \int\left(t^{-4}+t^{-2}\right)dt = \frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+c = c - ctgx - \frac{1}{3}ctg^3 x.$$

С помощью тригонометрических преобразований:

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x} = \int \cos ec^2 x\cdot \cos ec^2 x = -\int\left(1+ctg^2 x\right)cl\left(ctgx\right) = -ctgx - \frac{ctg^3 x}{3}+c$$

г) Иногда удобно ввести тригонометрическую единицу:

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx = \int\frac{\sin x dx}{\cos^3 x} + \int\frac{dx}{\sin x\cos x} =$$

$$= -\int(\cos x)^{-3} d\left(\cos x\right) + 2\int\frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\left|tgx\right| + c$$

д) Иногда применяется метод интегрирования по частям.

Например,

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \left|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\int udv = uv - \int vdu} \\ u = \cos x & \text{du = -sinxdx} \\ dv = \dfrac{\cos x dx}{\sin^3 x} & v = \int(\sin x)^{-3} d\sin x = \dfrac{-1}{2\sin^2 x}\end{array}\right| = \frac{-\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x} =$$

$$= c - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|.$$

2) Интегралы вида: $\int \sin mx\cos nxdx,\quad m\neq n;\ \int\cos mx\cos nxdx;\ \int \sin mx\sin nxdx,$ преобразуются по формулам:

$$\sin mx\cos nxdx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(m+n\right)x + \sin\left(m-n\right)x\right],$$

$$\cos mx\cos nxdx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m+n\right)x + \cos\left(m-n\right)x\right],$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x + \cos\left(m+n\right)x\right].$$

Например, $\int \sin 3xcox5xdx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 8x - \sin 2x\right)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$

3) Интегралы вида: $\int tg^n x dx,\quad \int \text{ctg}^n x dx,\quad (n\in N, n\neq 1)$ приводятся к табличным следующим образом: выделяется $tg^2 x=\sec^2 x-1$. Затем интеграл разбивают на сумму двух интегралов (первый – степенной, а второй $\int (tgx)^{n-2}dx$; с ним поступают так же).

Например,

$$\int tg^5 xdx=\int tg^3 x\left(\sec^2 x-1\right)dx=\int tg^3 xd\left(tgx\right)-\int tg^3 xdx=$$
$$=\frac{tg^4 x}{4}-\int tgx\left(\sec^2 x-1\right)dx=\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}-\ln\left|\cos x\right|+c.$$

4) $\int \sec^n xdx\left(\int \text{cosec}^n xdx\right)$, если $n$ – чётное целое положительное число, тогда $\sec^2 xdx=d\left(tgx\right)$, а оставшаяся чётная степень $\sec x$ заменяют через $tgx$. $\left(\sec^2 x=1+tg^2 x\right)$.

Например, $\int \sec^6 xdx=\int\left(1+tg^2 x\right)^2 dtgx=\int\left(1+2tg^2 x+tg^4 x\right)d\left(tgx\right)=tgx+\frac{2}{3}tg^3 x+\frac{1}{5}tg^5 x+c$

**Интегрирование иррациональных выражений.** Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной называется **иррациональной.** Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции.

Рассмотрим иррациональные функции интегралы, от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональной функции.

1. **Интегрирование простейших иррациональностей.**

*а)* Интеграл вида $\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$ сводится к интегралу рациональной функции подстановкой $x=t^k$, где $k$ – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},\ldots,\frac{r}{s}$

Например: $$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}=\begin{vmatrix}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{vmatrix}=\int\frac{t^2 4t^3 dt}{t^3+1}=4\int\frac{t^2\left(\left(t^3+1\right)-1\right)}{t^3+1}dt=$$
$$=4\left(\int t^2dt-\int\frac{t^2dt}{t^3+1}\right)=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right|+c=\left|t=\sqrt[4]{x}\right|=\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+c\right).$$

*б)* $\int R\left(x,\left(ax+b\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(ax+b\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\left(ax+b\right)=t^k$, где $k$-общий знаменатель дробных показателей.

Например,

$$\int\frac{xdx}{\left(x+9\right)^{4/3}-3\left(x+9\right)^{5/6}}=\begin{vmatrix}x+9=t^6\\ dx=6t^5dt\end{vmatrix}=\int\frac{\left(t^6-9\right)6t^5dt}{t^8-3t^5}=6\int\frac{\left(t^3-3\right)\left(t^3+3\right)}{t^3-3}dt=$$
$$=6\int\left(t^3+3\right)dt=\frac{3}{2}t^4+18t+c=\left|t=\sqrt[6]{x+9}\right|=\frac{3}{2}\sqrt[6]{\left(x+9\right)^4}+18\sqrt[6]{x+9}+c.$$

c) $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, $k$ – общий знаменатель дробных показателей.

Например : $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{4+x}{x}}dx=\left|\frac{4+x}{x}=t^2;\ x=\frac{4}{t^2-1};\ \ dx=\frac{-8tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\right|=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{16}\cdot\frac{t(-8t)\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}=$

$$=-\frac{1}{2}\int t^2dt=-\frac{1}{6}t^3+c=\left|t=\sqrt{\frac{4+x}{x}}\right|=-\frac{1}{6}\sqrt{\left(\frac{4+x}{x}\right)^3}+c=c-\frac{4+x}{6x}\sqrt{\frac{4+x}{x}}.$$

# ТЕМА 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 2.1. Вычисление определенного интеграла

*а) Формула Ньютона-Лейбнца.*

**Теорема.** Если $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$ то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{2.1}$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Например, вычислим определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sec^2x-1\right)tgxdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tgxd(tgx)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}tgxdx=\left(\frac{tg^2x}{2}+\ln\left|\cos x\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(0+\ln 1\right)=\frac{1-\ln 2}{2}$$

*б) Замена переменной в определённом интеграле.*

**Теорема**. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и $\varphi(c)=a,\ \ \varphi(d)=b,\ \ a\le\varphi(t)\le b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{2.2}$$

– формула замены переменной в определённом интеграле.

Например, вычислим определенный интеграл.

$$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{ll}2x+1=t^2 & x=0,\ t^2=1,\ t=1\\ x=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right) & x=4,\ t^2=9,\ t=3\\ dx=tdt & \end{array}\right|=\int_1^3\frac{tdt}{+t}=$$

$$=\int_1^3\frac{(t+1)-1}{1+t}dt=\int_1^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(t-\ln(t+1)\Big|_1^3\right)=(3-\ln 4)-(1-\ln 2)=2-\ln 2.$$

*в) Интегрирование по частям в определённом интеграле.*

**Теорема.** Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на $[a;b]$ то

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \tag{2.3}$$

– формула интегрирования по частям в определённом интеграле.

Например, вычислим

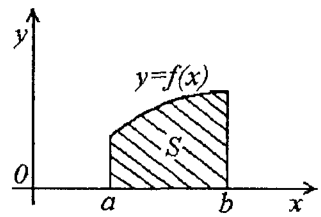
$$\int_0^1 xarctgxdx=\left|\begin{array}{l}u=arctgx,\ \ dv=xdx\\ du=\frac{1}{1+x^2}dx,\ \ v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\left(\frac{x^2arctgx}{2}-\frac{x}{2}+\frac{arctgx}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

## 2.2. Приложение определенного интеграла

*а)* Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, осью $ox$ и непрерывной кривой $y = f(x), (y > 0)$.




Вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.4}$$

**Пример 4.1.** Найти площадь области, ограниченной линиями $xy = 4$; $x+y=5$.

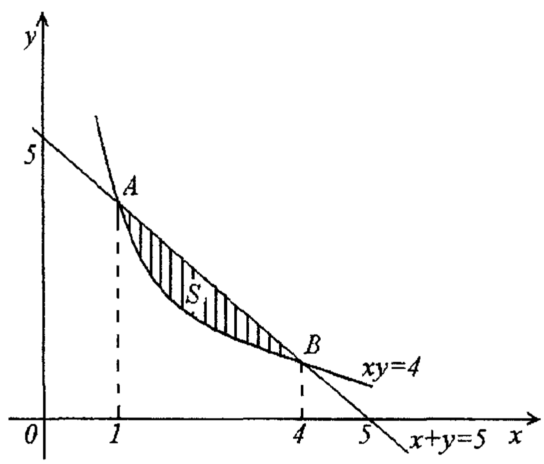



Рис. 1

**Решение**: Построим область $S$ (рис.1) и найдём абсциссы точек пересечения $A$, $B$: $\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$,

$$y = 5 - x,\ \ x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ \ x_2 = 4,$$

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Bigg|_1^4 = 7\frac{1}{2} - 8\ln 2 \text{ ед}^2.$$

**Пример 2.2.** Найти площадь области, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1; x - y = 1$.

**Решение***:* Построим область $S$ (рис.2) и найдём ординаты точек пересечения $A$, $B$: $\begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

$$x = y + 1,\ \ y^2 = 2(y+1) + 1,\ \ y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -1,\ \ y_2 = 3.$$

$$S = \int_{-1}^3 \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^3 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ ед}^2.$$

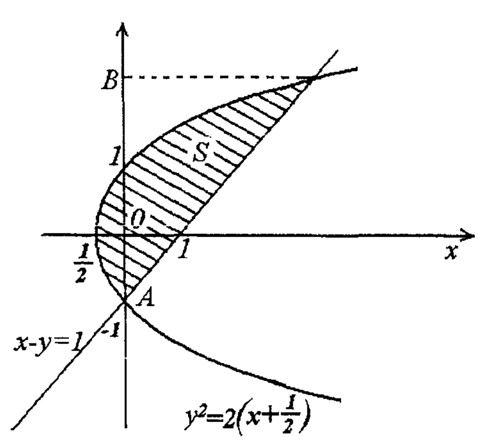



Рис. 2

## 2.3. Несобственные интегралы

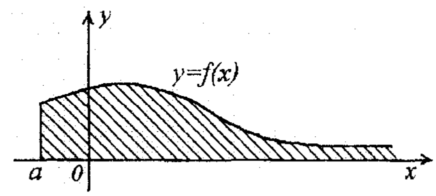
Понятие определённого интеграла дано для конечного отрезка $[a;b]$ и непрерывной на нём функции $f(x)$. Оно теряет смысл, если интервал интегрирования бесконечен или функция в интервале интегрирования имеет точки разрыва 2$^{\text{го}}$ рода.

Интеграл называется **несобственным,** если функция $f(x)$ не ограничена на $[a;b]$, или неограниченна сама область интегрирования.

## 2.4. Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Если $f(x)$ непрерывна, $a \le x < \infty$, то по определению

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.5)$$




Если существует *конечный* предел в правой части формулы (2.5.), то несобственный интеграл называется **сходящимся,** если же этот предел *бесконечен, или не существует*, то – **расходящимся** и значения не имеет.

Аналогично определяются интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Если *оба* предела в правой части *конечны*, то интеграл называется **сходящимся**, если же *хотя бы один из них* бесконечный или не существует, то – **расходящимся**.

Итак, несобственные интегралы с бесконечными пределами – пределы определённых интегралов с переменными верхними или нижними пределами при стремлении этих пределов к бесконечности.

Например, вычислим несобственные интегралы, или установим их расходимость:

$$1)\ \int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_c^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right) = 1 \Rightarrow$$

интеграл сходится и его значение равно 1.

$$2)\ \int_{-\infty}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^4 x^{-2/3}dx = \lim_{a\to-\infty} 3\sqrt[3]{x}\Big|_a^4 = 3\lim_{a\to-\infty}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{a}\right) = \infty, \Rightarrow$$

интеграл расходится и значений не имеет.

$$3)\ \int_0^{\infty}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\sin b$$

здесь предел не существует, следовательно, интеграл расходится.

# ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Дифференциальным уравнением (ДУ)** называется уравнение вида

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (3.1)$$

**Решением** дифференциального уравнения называют любую функцию $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество.

Функция $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется **общим решением** ДУ, если она обращает ДУ в тождество при любых значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots c_n$

Для начальных условий

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

можно найти значение постоянных $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$, при которых функция $y = y(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

Функцию $y = y(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ называют **частным решением ДУ**.

**Порядком ДУ** называют наибольший порядок производной, входящий в это уравнение.

### 3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно $y$, то оно имеет вид

$$y' = f(x, y). \tag{3.2}$$

**Общим решением** дифференциального уравнения I порядка называется функция

$$y = \varphi(x, c), \tag{3.3}$$

которая зависит от одного произвольного постоянного $C$ и удовлетворяет условиям:

1. Она удовлетворяет ДУ при любом $C$
2. Каково бы ни было начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ можно найти такое $c = c_0$, что $y' = \varphi(x, c_0)$

удовлетворяет данному начальному условию

**Частным решением** уравнения (3.2) называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, c)$, при определенном значении $c = c_0$.

**Геометрически**:

а) **Общие решения ДУ** - семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной $C$ (интегральные кривые).

б) **частное решение** – одна интегральная кривая семейства, проходящая через данную точку $(x_0, y_0)$ плоскости.

**Решить** (*проинтегрировать*) ДУ – значит:

1. Найти его общее решение
2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

#### 3.1.1. Уравнение с разделяющими переменными

Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющими переменными, если функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного переменного $x$ или $y$.

Чтобы проинтегрировать уравнение, надо разделить переменные – это значит перед дифференциалом $dx$ оставить функцию, зависящую только от $x$, а перед дифференциалом $dy$, зависящую только от $y$.

**Пример 3.1**. Решить уравнение $(x \cdot y^2 + x)dx + (y - x^2 \cdot y)dy = 0$

**Решение**. $x \cdot (y^2 + 1)dx + y \cdot (1 - x^2)dy = 0$. Разделив переменные, получим $\int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{-xdx}{1-x^2}$

или $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}\ln c$, т.е. $1 + y^2 = c\left(1 - x^2\right)$ – (общее решение в неявном виде).

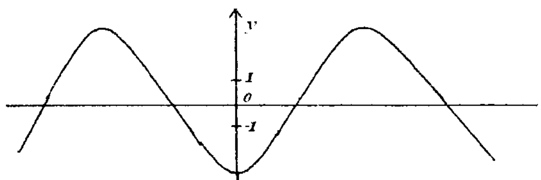
**Пример 3.2.** Решить задачу Коши для уравнения $ydx + ctgxdy = 0$; $y\big|_{x=\frac{\pi}{\cdot}} = -1$.

**Решение.** а) Разделяя переменные, получим $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{ctgx}$, тогда $\ln y=\ln\cos x+\ln c$ или $y=c\cos x$ – общее решение уравнения.

б) Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-1$.

Подставляя начальное условие в общее решение, получим

$-1=c\cdot\cos\frac{\pi}{3}$, $c=-2$, $y=-2\cdot\cos x$ – частное решение:



$y=-2\cos x$

### 3.1.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение.** Функция $f(x,y)$ называется **однородной** измерения $k$ относительно $x$ и $y$,если она удовлетворяет при любом $t$ равенству:

$$f(tx,\ ty)=t^k f(x\ ,y)$$

Уравнение $M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$ называется **однородным,** если функции $M(x,\ y)$, $N(x,\ y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Замена $y=u\cdot x$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

**Пример 3.3.** Решить уравнение. $(2\cdot x-y)dx+(x+y)dy=0$ - однородное дифференциальное уравнение ($n$=1).

**Решение.** $y=u\cdot x,\ dy=xdu+udx$; $(2\cdot x-u\cdot x)dx+(x+u\cdot x)(udx+xdu)=0$ или $x\cdot(1+u)du=-(2+u^2)dx$.

Разделяя переменные, интегрируя, получим.

$\int\frac{1+u}{2+u^2}du=-\int\frac{dx}{x}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|2+u^2\right|=-\ln x+\ln c$;

$u=\frac{y}{x},\ln c\cdot\sqrt{2\cdot x^2+y^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{y}{\sqrt{2}x}$ – общий интеграл.

*Замечание. Уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.*

### 3.1.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

**Линейным ДУ** первого порядка называется уравнение вида $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$.

Решается с помощью подстановки $y=u\cdot v$ ,где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда

$$u'+v'u+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x) \qquad \text{или} \qquad u'\cdot v+u(v'+P(x)\cdot v)=Q(x)$$

Функция $v(x)$ находится так, что $v'+P(x)v=0$, $\Rightarrow$ получаем систему $\begin{cases}v'(x)+P(x)\cdot v=0\\ u'\cdot v(x)=Q(x)\end{cases}$

Определив $u(x)$ и $v(x)$, получим общее решение линейного уравнения $y=u(x\cdot c)\cdot v$.

**Пример 3.4.** Решить уравнение $y'+y\cdot tgx=\cos^2 x$.

**Решение.** Данное уравнение – линейное относительно функции $y(x)$ и $y'(x)$.

Замена $y = u(x)\cdot v(x)$ приводит к системе двух уравнений с разделяющимися переменными:

$$u'v + v'u + u\cdot v\cdot tgx = \cos^2 x,\ u'v + u\cdot(v' + v\cdot tgx) = \cos^2 x, \Rightarrow \begin{cases} v' + v\cdot tgx = 0 \\ u'\cdot v = \cos^2 x \end{cases}.$$

$$1)\quad \frac{dv}{dx} = -v\cdot tgx,\quad \int\frac{dv}{v} = -\int tgx dx,\quad v = \cos x;$$

$$2)\quad u'\cdot v = \cos^2 x,\quad \int du = \int \cos x dx,\quad u = \sin x + c.$$

$y = (\sin x + c)\cos x$ – общее решение.

### 3.1.4. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, $n \neq 0, n \neq 1$ называется **уравнением Бернулли**. Заменой $y(x) = u(x)v(x)$ оно сводится к линейному. На практике оно решается с помощью подстановки.

**Пример 3.5.** Решить уравнение Бернулли $y' + 2xy = 2x^3y^3 - DY(n=1)$.

**Решение.** Применяем метод подстановки

$$y = uv.\quad y' = u'v + v'u.\qquad u'v + v'u + 2xuv = 2x^3v^3u^3;$$

$$u'v + u(v' + 2xu) = 2x^3u^3v^3,\ \begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = 2x^3u^3v^3 \end{cases};$$

1) $\quad v' + 2xv = 0;\ \frac{dv}{dx} == 2xv;\ \int\frac{dv}{v} = -2\int xdx;\ \ln|xv| = -x^2;$

2) $\quad u' = 2x^3u^3v^2,\ \frac{du}{dx} = 2x^3u^3e^{-2x^2},\ \underline{v = e^{-x^2}};$

$$\int\frac{du}{x^3} = \int x^3e^{-2x^2}dx;\ -\frac{1}{2u^2} = \left|\begin{array}{ll} \int udv = uv - \int vdu & \\ u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-2x^2}xdx & v = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} \end{array}\right|;$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} + \int e^{-2x^2}xdx;$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} + c;\ y = uv;\ \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{v^2}.$$

$\frac{1}{y^2} = \left(x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + c\right)e^{2x^2};\ \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + ce^{2x^2}$ – общий интеграл уравнения.

## 3.2. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

**Линейным дифференциальным уравнением высшего порядка** называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^1 + a_n(x)y = f(x), \tag{3.4}$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции на $(a,b)$.

Уравнение (3.4) называется *неоднородным*, если $f(x) \neq 0$, и *однородным*, $f(x) = 0$.

Уравнение (3.4) при любых начальных условиях имеет единственное решение, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Линейные дифференциальные уравнения описывают реальные процессы или дают первое приближение к этим процессам, поэтому имеют широкое практическое применение.

**Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами** имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y^I + a_n y = 0, \qquad (3.5)$$

где $a_i \in R$, $i = \overline{1\,n}$.

Совокупность $n$ определенных и линейно независимых решений уравнения (3.5) называется фундаментальной системой решений.

**Основная теорема**. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (3.5), то их линейная комбинация

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ \ldots \ + c_n y_n, \qquad (3.6)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные числа, является **общим решением** уравнения (3.5).

Для нахождения общего решения уравнения (3.6) составляется **характеристическое уравнение**

$$\kappa^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \qquad (3.7)$$

(заменяя производную $i$-го порядка $i$-ой степенью $k$, $i = \overline{1, n}$).

Возможны следующие случаи:

1) все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения (3.7) действительные и различные.

Общее решение уравнения (3.5) записывается в виде

$$y = c_1 e^{\kappa_1 x} + c_2 e^{\kappa_2 x} + \ldots + c_n e^{\kappa_n x}. \qquad (3.8)$$

2) корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные ($k_1 = k_2 = \ldots = k_r$), $r$ – кратность корня $\kappa$ характеристического уравнения. Все остальные $n - r$ корней различные.

**Общее решение однородного уравнения** принимает вид

$$y = e^{\kappa x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_r x^{r-1}) + c_{r+1} e^{\kappa_{r+1} x} + \ldots + c_n e^{\kappa_n x}. \qquad (3.9)$$

3) среди корней характеристического уравнения есть однократные комплексно сопряженные, например, $\kappa_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$; $\kappa_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i$. Остальные корни действительные и различные (если есть кратные действительные корни, смотри случай 2).

$$y = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos\beta_1 x + c_2 \sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(c_3 \cos\beta_2 x + c_4 \sin\beta_2 x) + c_5 e^{k_5 x} + \ldots + c_n^{k_n x} \qquad (3.10)$$

4) пара комплексно сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ уравнения (3.7) имеет кратность $r$. В этом случае соответствующие $r$ пар членов в формуле (3.7) заменяются слагаемыми.

$$e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2 x + \ldots + c_r x^{r-1})\cos\beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \ldots + c_{2r} x^{r-1})\sin\beta x\right]$$

**Пример 3.6.** Найти общее решение уравнений: 1) $y^{IV} + 2y^{III} + y^{II} = 0$; 2) $y^{III} + y^{II} + y^{I} + y = 0$. 3) $y^{III} + 4y^{II} + 29y^{I} = 0$.

**Решение.** 1) Составляем характеристическое уравнение $\kappa^4 + 2\kappa^3 + \kappa^2 = 0$. Найдем его корни $\kappa^2(\kappa^2 + 2\kappa + 1) = 0, \Rightarrow \kappa_{1,2} = 0, \kappa_{3,4} = -1$, имеет вид $y = c_1 + c_2 x + e^{-x}(c_3 + c_4 x)$.

2) Составляем характеристическое уравнение $\kappa^3 + \kappa^2 + \kappa + 1 = 0$. Найдем его корни: $(k+1)(k^2+1) = 0 \Rightarrow k_1 = -1 \Rightarrow k_{2,3} = \pm i$. Учитывая корни характеристического уравнения, общее решение запишется в виде $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

3) Составляем характеристическое уравнение $\kappa^3 + 4\kappa^2 + 29\kappa = 0$ $\kappa(\kappa^2 + 4\kappa + 29) = 0$, $\kappa_1 = 0$; $\kappa_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4 - 29} = -2 \pm 5i, \Rightarrow$ общее решение имеет вид $y = c_1 + e^{-2x}(c_2 \cos 5x + c_3 \sin 5x)$.

**Пример 3.7.** Для уравнения $y^{II}+4y^{I}=0$ найти интегральную кривую, проходящую через точку (0,0) и касающуюся в этой точке прямой $y=x$.

**Решение.** а) Найдем общее решение данного уравнения: $\kappa^2+4\kappa=0$ $\kappa(\kappa+4)=0$, $\kappa_1=0, \kappa_2=-4, \Rightarrow$ общее решение данного уравнения имеет вид $y=c_1+c_2e^{-4x}$.

б) Чтобы найти соответствующую интегральную кривую, используем заданные начальные условия

$$y(0)=0,\ y^1(0)=1.\quad y=c_1+c_2e^{-4x}\quad y(0)=c_1+c_2\quad y^1=-4c_2e^{-4x}\quad y^1(0)=-4c_2, \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -4c_2=1 \end{cases}\quad \begin{matrix} c_2=-\dfrac{1}{4} \\ c_1=\dfrac{1}{4} \end{matrix}$$

Таким образом, искомая интегральная кривая имеет уравнение $y=\dfrac{1}{4}(1-e^{-4x})$.

**Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами** имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y^1+a_ny=f(x), \tag{3.11}$$

где $a_i\in R, i=\overline{1,n}$, $f(x)$ – непрерывная функция.

Лагранж разработал общий метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод применим, если известно общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (3.11). Этот метод называется методом вариации произвольных постоянных или методом Лагранжа.

Пусть $\overline{y}=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению(3.11):

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y^1+a_ny=0 \tag{3.12}$$

**Метод Лагранжа** состоит в том, что общее решение уравнения (3.11) ищется в виде

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\ldots+c_n(x)y_n,$$

где $c_1(x), c_2(x),\ldots,c_n(x)$ – неизвестные функции. Эти функции определяются из системы

$$\begin{cases} c_1^1(x)y_1+c_2^1(x)y_2+\ldots+c_n^1(x)y_n=0; \\ c_1^1(x)y_1^1+c_2^1(x)y_2^1+\ldots+c_n^1(x)y_n^1=0; \\ c_1^1(x)y_1^{(n-1)}+c_2^1(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+c_n^1(x)y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

Для уравнения второго порядка $y^{II}+p_1y^I+p_2y=f(x)$ данная система имеет вид

$$\begin{cases} c_1^1(x)y_1+c_2^1(x)y_2=0 \\ c_1^1(x)y_1^1+c_2^1(x)y_2^1=f(x) \end{cases}$$

**Суть метода Лагранжа** для уравнения состоит в следующем: $y^{II}+py^I+qy=f(x)$.

1) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y^{II}+py^I+qy=0$ и записываем его в виде $\overline{y}=c_1y_1+c_2y_2$, где $c_1$ и $c_2$ произвольные постоянные.

2) Для нахождения общего решения неоднородного уравнения $y^{II}+py^i+qy=f(x)$ записываем его в виде $y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$, где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – неизвестные функции, они должны быть такими, чтобы удовлетворялось неоднородное уравнение.

3) Находим выражения для *производных* функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$. Для этого составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1^1(x)y_1+c_2^1(x)y_2=0; \\ c_1^1(x)y_1^1-c_2^1(x)y_2^1=f(x). \end{cases}$$

4) Найденные из этой системы производные $c_1{}^I(x)$, $c_2{}^I(x)$ интегрируются и выражения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ подставляются в общее решение (3.12) со своими произвольными постоянными $c_1$ и $c_2$, полученными при интегрировании.

**Пример3.8.** Найти общее решение уравнения $y^{II} - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

**Решение.** 1) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $\kappa^2 - 1 = 0$,
$\kappa = \pm 1$, $\Rightarrow$ $y^{II} - y = 0$ $\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x} y_1{}^1 = e^x, y_2{}^1 = -e^{-x}$.

2) Записываем общее решение неоднородного уравнения: $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$.

3) Для нахождения производных функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} c_1{}^1(x)e^x + c_2{}^1(x)e^{-x} = 0 \\ c_1{}^1(x)e^x - c_2{}^1(x)e^{-x} = \dfrac{2e^x}{e^x - 1} \end{cases},$$ $c_1{}^1(x)e^x = -c_2{}^1(x)e^{-x}$, подставляя во второе уравнение системы, получим:

$$-c_2{}^1(x)e^{-x} - c_2{}^1(x)e^{-x} = \frac{2e^x}{e^x - 1}, \Rightarrow c_2{}^1(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x - 1}, \; c_1{}^1(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

4) Интегрируя найденные $c_1{}^1(x)$ *и* $c_2{}^1(x)$, получим:

$$c_1(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x - 1} dx = -\int \frac{(e^x - 1) - e^x}{e^x - 1} dx = -\int dx + \int \frac{e^x dx}{e^x - 1} = -x + ln(e^x - 1) + c_1.$$

$$c_2(x) = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1} = \begin{vmatrix} e^x - 1 = t \\ e^x dx = dt \\ e^x = t + 1 \end{vmatrix} = -\int \frac{(t+1)}{t} dt = -(t + \ln t) = -(e^x - 1 + \ln\left|e^x - 1\right|) + c_2 = (1 - e^x - ln\left|e^x - 1\right|) + c_2.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = e^x(c_1 - x + ln\left|e^x - 1\right|) + e^{-x}(1 - e^x - ln\left|e^x - 1\right| + c_2).$$

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части**

**Метод неопределенных коэффициентов**

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение *n-го* порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{3.13}$$

где $a_i \in R$, $i = 1, \overline{n}$, $f(x)$ – непрерывная функция.

Соответствующее однородное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{3.14}$$

Запишем характеристическое уравнение для уравнения (3.14):

$$\kappa^n + a_1 \kappa^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{3.15}$$

Общее решение уравнения (3.13) имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^*,$$

где $\overline{y}$ – общее решение уравнения (3.14), а $y^*$ – частное решение уравнения (3.13).

Форма частного решения $y^*$ уравнения (3.15) зависит от вида правой части $f(x)$ и корней характеристического уравнения.

Пусть правая часть уравнения (3.13) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + \theta_m(x)\sin\beta x), \tag{3.16}$$

где $P_n(x)$ *и* $\theta_m(x)$ – многочлены, соответственно степени *n* и *m*.

Тогда

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(u_s(x)\cos\beta x + \upsilon_s(x)\sin\beta x), \qquad (3.17)$$

где $u_s(x)$ и $v_s(x)$ – многочлены степени $S$ с неопределенными коэффициентами, $s=\max\{n,m\}$, $r$ – кратность пар корней $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения.

**Частный случай**: Если $\beta = 0$, то $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ и $y^*$ записывается в виде:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} u_n(x), \qquad (3.18)$$

где $u_n(x)$ – многочлен степени $n$ с неопределенными коэффициентами, $r$ – кратность корня $\alpha$ характеристического уравнения.

**Метод неопределенных коэффициентов** состоит в следующем:

1) составляем $y^*$ по формуле (3.17) или (3.18), где многочлены общего вида записаны с неопределенными коэффициентами;

2) находим производные $(y^*)^{(n)}$ нужного порядка и вместе с $y^*$ подставляем в уравнение (3.13);

3) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$ в левой и правой частях уравнения. При наличии тригонометрических функций приравниваются коэффициенты в левой и правой частях уравнения при произведениях одинаковых степеней $x$ при

$$x^n \cos\beta x \;\; и \;\; x^n \sin\beta x, \;\; (n=0,1,2,...);$$

4) находим числовые значения неизвестных коэффициентов и подставляем их в $y^*$.

**Пример 3.9.** Для каждого из заданных дифференциальных уравнений найти общее решение и частное решение в тех случаях, когда заданы начальные условия.

**1.** $y^V + y^{III} = x^2 - 1$ – ЛНДУ с постоянными коэффициентами. $y = \overline{y} + y^*$.

1) $\overline{y}: y^V + y^{III} = 0,\; \kappa^5 + \kappa^3 = 0,\; \kappa^3(\kappa^2+1)=0,\; \kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$

$\kappa^2+1=0,\; \kappa^2=-1,\; \kappa^2=-1,\; \kappa_{4,5}=\pm i;\; \Rightarrow$

$\overline{y} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4\cos x + c_5 \sin x.$

2) $y^*: f(x)=x^2-1, \Rightarrow y^* = x^r e^{\alpha x} u_n(x), \alpha=0, n=2, r=3,$ т.е.

$$\begin{array}{ll} 0 & y^* = x^3(Ax^2+Bx+c) = Ax^5+Bx^4+Cx^3; \\ 0 & y^{*'} = 5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2; \\ 0 & y^{II} = 20Ax^3+12Bx^2+6Cx; \\ 1 & y^{*III} = 60Ax^2+24Bx+6c; \\ 0 & y^{*IV} = 120Ax+24B; \\ 1 & y^{*V} = 120A; \end{array}$$

Подставляя в данное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получим

$$120A + 60Ax^2 + 24Bx + 6c = x^2 - 1.$$

$x^2\big|60A=1;\quad x\;\big|24B=0;\quad x^0\big|120A+6C=-1 \quad\Rightarrow A=1/60;\; B=0;\; C=-\dfrac{1}{2};\; y^*=\dfrac{1}{2}x^3(\dfrac{1}{30}x^2-1)$

3) $y=\overline{y}+y^*.\; y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\sin x+\dfrac{1}{2}x^3(\dfrac{1}{30}x^2-1)$;

**2.** $y^{IV}+5y^{II}+4y=3\sin x.$ – ЛНДУ с постоянными коэффициентами, следовательно, $y=\overline{y}+y^*$;

1) $\overline{y}: y^{IV}+5y^{II}+4y=0; \kappa^4+5\kappa^2+4=0. \kappa^2=t; t^2+5t+4=0, t_1=-4;$

$t_2=-1;\quad k^2=-4,\quad k_{1,2}=\pm 2i,\quad k^2=-1,\quad k_{3,4}=\pm i,\; \Rightarrow$

$\overline{y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3\cos x+c_4\sin x.$

2) $y^*: f(x)=3\sin x.$

$y^*=x^r e^{\alpha x}(Us(x)\cos\beta x+V_s(x\sin\beta x); \alpha=0, \beta=1; \alpha\pm\beta i=\pm i; n=m=0 \Rightarrow s=0, r=1,$ тогда

$4| \ y^* = x(A\sin x + B\cos x).$

Находим $A$ и $B$: $0| \quad y^{*I} = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x)$;

$5| y^{*II} = A\cos x - B\sin x + A\cos x - Bsix + x(-A\sin x - B\cos x =$

$= 2A\cos x - 2B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x).$

$0| y^{*III} = -2\sin x - 2B\cos x - A\sin x - B\cos + x(-A\cos x + B\sin x) =$

$= -3A\sin x - 3B\cos x + x(B\sin x - A\cos x).$

$1| y^{*IV} = -3A\cos x + 3B\sin x + B\sin x - A\cos x + x(B\cos + A\sin x) =$

$= -4A\cos x - 4B\sin x + (B\cos x + A\sin x).$

Подставляя в данное уравнение, получим

$$6A\cos\alpha - 6B\sin x = 3\sin x; \ \begin{cases} 6A = 0; \\ -6B = 3; \end{cases} \ A = 0, \ B = -\frac{1}{2,} \Rightarrow \ y^* = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

**3.** $y^{II} - 3y^I = xe^{-x}, \ y(0) = 1, \ y^I(0)$ – ЛНДУ ($n$=2) с постоянными коэффициентами $y = \bar{y} + y^*$.

1) $\bar{y} : y^{II} - 2y^I = 0, \kappa^2 - 2\kappa = 0, \kappa(\kappa - 2) = 0, \kappa_1 = 0, \kappa_2 = 2 \Rightarrow \bar{y} = c_1 + c_2e^{2x}$;

2) $y^* : f(x) = xe^{-x}, y^* = x^r e^{\alpha x}U_n(x), \alpha = -1, n = 1, r = 0.$ $y^* = (Ax + B)e^{-x}$, подставляя в данное уравнение, получим:

$$\left.\begin{aligned} 0|\ & y^* = (Ax+B)e^{-x}; \\ -2|\ & y^{*I} = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}; \\ 1|\ & y^{*II} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}; \end{aligned}\right| \Rightarrow (-2A + Ax + B - 2A + 2Ax + 2B) = x;$$

$x \ | A + 2A = 1$

$x^0| -4A + 2B = 0 \quad A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}. \quad y^* = \frac{1}{3}(x+2)e^{-x}.$

3) $y = \bar{y} + y^*, \ y = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{3}(x+2)e^{-x}.$

4) Найдем частное решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям *y(0)=1, $y^I$(0)=0.*

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{3}(x+2)e^{-x},$$

$$y^1 = 2c_2e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}(x+2)e^{-x}.$$

Подставляя начальные условия *y(0) = 1, $y^I$(0) = 0*, будем иметь $\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + \frac{2}{3} & c_1 = \frac{5}{6}, \\ 0 = 2c_2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} & c_2 = -\frac{1}{2}, \Rightarrow \end{cases}$

частное решение запишется $y = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}(x+2)e^{-x}.$

## ТЕМА 4. РЯДЫ

### 4.1. Числовые ряды. Основные определения. Сходимость ряда. Признаки сходимости числовых рядов

Выражение вида

$$U_1 + U_2 + \ldots U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n, \tag{4.1}$$

где $U_n \in R$, называется числовым рядом. Числа $U_1, U_2, \ldots, U_n \ldots$ называются членами ряда, а $U_n$ – общий член ряда.

Ряд считается заданным, если известен его общий член: $U_n=f(n)$, $n \in N$, т.е. задана функция натурального аргумента.

Суммы

$$S_1 = U_1;\ S_2 = U_1 + U_2, \ldots;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \tag{4.2}$$

называются частичными суммами ряда (4.1).

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (4.1) называется **сходящимся**, а число $S$ – его суммой. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (4.1) называется **расходящимся**.

**Необходимый признак сходимости ряда**: Если ряд (4.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

**Следствие.** Если $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, то ряд (4.1) расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим рядом. Для него $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, но ряд расходится.

### 4.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

1. **Признак сравнения**: Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \tag{4.3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n, \tag{4.4}$$

причем члены ряда (4.3) не превосходят соответствующих членов ряда (4.4), т.е. при любом $n$ $U_n \leq V_n$.

Тогда: а) если сходится ряд (4.4), то сходится и ряд (4.3); б) если расходится ряд (4.3), то расходуется и ряд (4.4).

2. **Предельный признак сравнения**: Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = k \neq 0,$$

то ряды (4.3) и (4.4) одновременно сходятся, либо расходятся.

3. **Признак Даламбера:** Если для ряда (4.3) существует $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{U_{n+1}}{V_n} = k \neq l$, то если $l < 1$ – ряд (4.3) сходится; $l > 1$ – ряд (4.3) расходится; $l = 1$, ответа не дает.

4. **Радикальный признак Коши:** Если для ряда (4.3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt[n]{U_n} = q$, то, если $q < 1$ – ряд (4.3) сходится; $q > 1$ – ряд (4.3) расходится; $q = 1$ ответа не дает.

5. **Интегральный признак Коши:** Пусть члены ряда (4.3) положительны и не возрастают при n → ∞, т.е.

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \ldots \geq U_n \geq \ldots,$$

и пусть $f(x)$ – положительная, непрерывная, невозрастающая функция на $[1, \infty]$ такая, что

$$f(1) = U_1, f(2) = U_2, \ldots, f(n) = U_n.$$

Тогда ряд (4.3) сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

**Пример 4.1.** Установить, сходится ли ряд исходя из определения его суммы:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$; б) $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$

**Решение.**

а) $U_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) =$$

$$= \left| S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \right| = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2.3^n}\right) = \frac{3}{2}$, следовательно, по определению ряд сходится.

б) $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$

$a_n = a_1 + d\,(n - 1),\ a_1 = 2,\ d = 3,\ \Rightarrow a_n = 2 + 3\,(n - 1).$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2 + 2 + 3(n-1)}{2} n = \frac{4 + 3(n-1)}{2} n.$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + 3(n-1)\right)n = \infty$, следовательно, ряд по определению расходится.

**Пример 4.2.** Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

**Решение.** а) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n3^n} = 0$, следовательно, необходимый признак сходимости ряда выполняется.

**Пример 4.3.** Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^6$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$.

**Решение**. а). Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходящимся.

Так как $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ ($\ln n < n$), то по признаку сравнения данный ряд расходится.

б). Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $p = 3 > 1$, ряд сходится. По предельному признаку сравнения

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^4+1} : \frac{1}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+1} = 1 \neq 0$, следовательно, данный ряд сходится.

Для сравнения часто используются ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – геометрическая прогрессия, при $|q| < 1$ – ряд сходится, при $|q| \geq 1$ – расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщенный гармонический ряд, при $p > 1$ сходится; при $p \leq 1$ – расходится.

в). По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \left| \begin{matrix} U_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n n^6 \\ U_{n+1} = \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} (n+1)^6 \end{matrix} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} (n+1)^6}{\left(\frac{9}{10}\right)^n n^6} = \frac{9}{10} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 = \frac{9}{10} < 1,$$

следовательно, данный ряд расходится.

г). По радикальному признаку Коши:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+1}{4n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится.

д). По интегральному признаку Коши:

$U_n = \frac{n}{1+n^2}, f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ – невозрастающая функция, так как ее производная

$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} < 0$ при $x > 1$.

Имеем $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln\left|1+x^2\right| \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\ln(1+b)^2 - \ln 2\right) = \infty$, следовательно, несобственный интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

### 4.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \tag{4.5}$$

называется **знакопеременным**, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|, \tag{4.6}$$

составленный из модулей членов ряда (4.5), сходится, то ряд (4.5) также сходится.

Ряд (4.5) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд (4.6).

Сходящийся знакопеременный ряд (4.5) называется **условно сходящимся**, если ряд (4.6) расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots, \tag{4.7}$$

где $U_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, называется **знакочередующимся.**

**Признак Лейбница**. Если члены знакочередующегося ряда (4.7) удовлетворяют условиям:

*1)* $U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n > \ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд (4.7) сходится.

Остаток ряда $r_n$

$$r_n = (-1)^n U_{n+1} + (-1)^{n+1} U_{n+1} + \ldots$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю, т.е. $|r_n| < U_{n+1}$.

**Пример 4.4**. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

**Решение.** Ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$ сходится по признаку сравнения, так как $\frac{|\cos n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

**Пример 4.5**. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

**Решение.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$ – знакочередующийся ряд. Ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ расходится (по интегральному признаку сходимости).

б). Проверим условную сходимость по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{2\ln 2}>\frac{1}{3\ln 3}>\frac{1}{4\ln 4}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}=0$, следовательно, данный ряд сходится условно.

## 4.4. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда

**Степенным рядом** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n, \qquad (4.8)$$

где $C_n$ – коэффициенты степенного ряда, $C_n$, $a\in R$.

Если $a=0$, то ряд (4.8) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n. \qquad (4.9)$$

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется **областью сходимости** степенного ряда.

**Теорема Абеля.** 1). Если степенной ряд (4.9) сходится при значении $x=x_0\neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех значениях $x$ таких, что $|x|<|x_0|$;

2). Если степенной ряд (4.9) расходится при $x=x_1$, то он расходится при всех значениях $x$ таких, что $|x|>|x_1|$.

**Областью сходимости** степенного ряда (4.9) является некоторый интервал с центром в точке $x=0$.

**Радиусом сходимости** ряда (4.9) называется такое число $R$, что во всех точках $x$, для которых $|x|<R$, ряд сходится, а во всех точках $|x|>R$ ряд расходится.

Радиус сходимости степенного ряда находится по формулам $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$, если эти пределы существуют.

**Пример 4.6.** Определить область сходимости рядов: 1). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$. 2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

**Решение**. 1) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\left|\begin{matrix}C_n=\frac{1}{3^n(n+1)}\\ C_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}=3$, следовательно, интервал сходимости (-3, 3).

Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

а) $x = 3$, получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ – расходится (гармонический ряд);

б) $x = -3$, получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ – сходится по признаку Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ ;  2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Область сходимости – [-3; 3).

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$. Определим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\left|\begin{matrix}C_n=\frac{n}{(n+1)2^n};\\ C_{n+1}=\frac{n+1}{(n+2)2^{n+1}}\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)2^{n+1}}{(n+1)(n+1)2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=2,$$

следовательно, R = 2; $|x-1|<2$;  $-2<x-1<2$;  $-1<x<3$.

Интервал сходимости – (-1, 3). Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

1) $x = 3$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ – знакоположительный, $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$, следовательно, ряд расходится.

2) $x = -1$, получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m n}{n+1}$ – знакочередующийся, расходится по признаку Лейбница, так как $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|\neq 0$. Область сходимости – (-1, 3).

## 4.5. Свойства степенных рядов

Пусть функция *S(x)* является суммой степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n x^n$. Доказано, что на любом отрезке [*a, b*], целиком принадлежащем интервалу сходимости (-*R, R*), функция *S(x)* – непрерывна, а следовательно, степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке:

$$\int_a^b S(x)dx=C_0\int_a^b dx+C_1\int_a^b xdx+\ldots+C_n\int_a^b x^n dx+\ldots$$

Кроме того, в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$S^{/}(x) = C_1 + 2C_2x + 2C_3x_2 + \ldots + nC_nx_{n-1} + \ldots$$

При этом после интегрирования или дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости *R*.

**Пример 4.7**. Определить интервал сходимости и найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

**Решение**. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \left|\begin{matrix} C_n = \dfrac{1}{2n-1} \\ C_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}\end{matrix}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n-1} = 1.$

$|x^2| < 1$, $|x| < 1$, $-1 \le x \le 1$ в граничных точках сходится по признаку Лейбница.

Тогда $S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$, $S'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, а $S(x) = \int S'(x)dx = \int\dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C.$

$S(0) = 0$, следовательно, $C = 0$.

Так как $S(x) = \operatorname{arctg} x$ определена при $x = \pm 1$ и непрерывна на [-1, 1], то она равна сумме ряда и в точках $x = \pm 1$.

# ТЕМА 5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

## 5.1. Пространство элементарных событий. Определение вероятности. Элементы комбинаторики

**Элементарными событиями** (элементарными исходами) называются взаимоисключающие исходы опыта. Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех элементарных событий называется **пространством элементарных событий** данного опыта. Любое подмножество $A$ множества $\Omega$ называется **событием**.

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

**Классическое определение вероятности**. Пусть множество $\Omega$ состоит из конечного числа $n$ равновозможных элементарных событий. Вероятность $P(A)$ события $A$ равна числу $m$ элементарных событий, входящих в $A$ (числу всех благоприятствующих событию $A$ элементарных исходов), деленному на число всех элементарных событий (число всевозможных, равновозможных и единственно возможных исходов), т.е. $m(A) = \dfrac{m}{n}$.

**Геометрическая вероятность.** Пусть $G$ – некоторая область и вероятность попадания в какую-нибудь часть $g$ области $G$ – пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему – в зависимости от размерности пространства, в котором рассматриваются области) и не зависит от ее расположения. Тогда вероятность попадания в область $g$ равна $P(g) = \dfrac{\text{мера } g}{\text{мера } G}$. Понятие геометрической вероятности обобщает понятие классической вероятности на случай опытов с бесконечным числом элементарных исходов.

**Элементы комбинаторики**. В теории вероятностей часто используют **размещения, перестановки и сочетания**.

Пусть дано множество $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. **Размещением** из $n$ элементов по $k$ называется любое упорядоченное подмножество $k$ элементов множества $A$. Таким образом, размещения отличаются либо самими элементами, либо их порядком.

Размещения из $n$ элементов по $n$ элементов (т.е. при $k = n$) называются **перестановками.**

**Сочетанием** из $n$ элементов по $k$ называется любое подмножество $k$ элементов множества $A$. Различные сочетания отличаются хотя бы одним элементом.

Пусть, например, дано множество $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Размещениями из 3 элементов этого множества по 2 будут $(\omega_1,\omega_2)$, $(\omega_1,\omega_3)$, $(\omega_2,\omega_1)$, $(\omega_2,\omega_3)$, $(\omega_3,\omega_1)$, $(\omega_3,\omega_2)$.

Сочетаниями из 3 элементов по 2 являются: $(\omega_1,\omega_2)$, $(\omega_1,\omega_3)$, $(\omega_2,\omega_3)$.

Перестановки из 3 элементов: $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $(\omega_1,\omega_3,\omega_2)$, $(\omega_2,\omega_1,\omega_3)$, $(\omega_2,\omega_3,\omega_1)$, $(\omega_3,\omega_1,\omega_2)$, $(\omega_3,\omega_2,\omega_1)$.

Число перестановок из $n$ элементов вычисляется по формуле $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$; число размещений из $n$ элементов по $k$ - по формуле $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$; число сочетаний из n элементов по $k$ - по формуле $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. Отметим, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Приведем несколько примеров простейших комбинаторных задач.

1. Число способов, которыми можно рассадить за столы по 2 студента группу в 20 человек, равно

$$A_{20}^2 = 20\times 19 = 380.$$

2. Число способов распределения 5 должностей между 5 лицами равно

$$P_5 = 5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120.$$

3. Число партий шахматной игры среди 12 участников чемпионата (если каждый участник играет только одну партию друг с другом) равно $C_{12}^2 = \dfrac{12!}{2!10!} = \dfrac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66$.

4. Число способов, которыми можно выбрать делегацию в состав 15 человек из группы в 20 человек, равно $C_{20}^{15} = C_{20}^5 = \dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 15504$.

**Пример 5.1.** В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наугад отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

**Решение.** Требуется найти вероятность события $A$ = {среди отобранных лиц – 3 женщины}. В данной задаче элементарное событие – набор из 7 человек. Так как последовательность, в которой они отбираются, несущественна, число всех таких наборов есть число сочетаний из 10 элементов по 7: $n = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$. По условию все элементарные события равновозможны. Поэтому можно использовать классический способ вычисления вероятности. Найдем число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A$. Это будет число наборов, в которых 3 человека выбраны из 4 женщин, а 4 человека – из 6 мужчин. Из 4 женщин троих можно выбрать $m_1 = C_4^3 = 4$ способами, а из 6 мужчин четверых – $m_2 = C_6^2 = 15$ способами. Благоприятствующие событию $A$ исходы получаются, когда набор из 3 женщин дополняется 4 мужчинами. Число таких способов будет равно $m = m_1\cdot m_2 = 4\times 15 = 60$. По классическому определению вероятности получим $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

### 5.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

**Теорема сложения.** Вероятность суммы двух событий $A$ и $B$ равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B). \tag{5.1}$$

Если события $A$ и $B$ несовместны (т.е. в результате опыта они не могут появиться вместе), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{5.2}$$

**Следствие.** Вероятность события , противоположного данному событию $A$, равна

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{5.3}$$

Для вероятности суммы 3 событий формула (5.1) обобщается так:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Если события $A$, $B$, $C$ попарно несовместны, то

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

**Теорема умножения вероятностей**. Вероятность произведения двух событий $A$ и $B$ равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого события, при условии, что первое произошло, т.е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)=P(B) \cdot P(A/B). \quad (5.4)$$

Если события $A$ и $B$ независимы (т.е. появление одного из них не меняет вероятности появления другого), то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (5.5)$$

Формула (6.4) верна и для любого конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (5.6)$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ взаимно независимы (в совокупности), то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots \cdot P(A_n). \quad (5.7)$$

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n). \quad (5.8)$$

**Пример 5.2.** Для производственной практики на 30 студентов представлено 15 мест в Минске, 8 – в Гомеле и 7 – в Витебске. Какова вероятность того, что 2 определенных студента попадут на практику в один город?

**Решение.** Рассмотрим события: $A$ = {2 определенных студента попадут на практику в Минск}, $B$ = {2 определенных студента попадут на практику в Гомель}, $C$ = {2 определенных студента попадут на практику в Витебск}. Эти события попарно несовместны. Событие $D$ = {2 определенных студента попадут в один город} есть сумма указанных событий. По формуле (5.2) имеем $P(D) = P(A) + P(B) + P(C)$. По классическому определению вероятностей

$$P(A) = \frac{C_{15}^2}{C_{30}^2}; \ P(B) = \frac{C_8^2}{C_{30}^2}; \ P(C) = \frac{C_7^2}{C_{30}^2}.$$

Тогда

$$P(D) = \frac{C_{15}^2 + C_8^2 + C_7^2}{C_{30}^2} = \frac{154}{435}.$$

**Пример 5.3.** Имеется блок, входящий в систему. Вероятность безотказной работы его в течение заданного времени $T$ равна 0,85. Для повышения надежности устанавливают такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы за время $T$ с учетом резервного времени.

**Решение.** Введем события: $A$ ={безотказная работа данного блока за время $T$}, $B$ = {безотказная работа резервного блока за время $T$}. По условию $P(A) = P(B) = =0,85$. Пусть событие $C$ = {безотказная работа данного блока с учетом резервного за время $T$}. Так как события $A$ и $B$ – совместны, но независимы, то по формулам (5.1), (5.5) получим

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,85 + 0,85 - 0,85 \cdot 0,85 = 0,9775.$$

**Пример 5.4.** Рабочий, обслуживающий 2 станка, вынужден был отлучиться на некоторое время. Вероятность того, что в течение этого времени станки не потребуют внимания рабочего, равны $P_1 = 0,7$ и $P_2 = 0,8$. Найти вероятность того, что за время отсутствия рабочего ни один станок не потребует его внимания.

**Решение.** Пусть событие $A$ ={первый станок не потребует внимания рабочего за время его отсутствия}, $B$ ={второй станок не потребует внимания рабочего за время его отсутствия}. Эти события независимы, поэтому по формуле (5) получим: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$.

**Пример 5.5.** У сборщика имеется 6 деталей без дефекта и 2 детали с дефектом. Сборщик берет подряд 2 детали. Найти вероятность того, что обе детали – без дефекта.

**Решение.** Пусть событие $A$ = {первая деталь – без дефекта}, $B$ = {вторая деталь – без дефекта}. Нас интересует событие $A \cdot B$. По теореме умножения вероятностей (5.4) имеем

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{6}{8}\cdot\frac{6-1}{8-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}.$$

**Пример 5.6.** 3 стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,8. Найти вероятность одного попадания в цель.

**Решение.** Пусть $A_i$ = {попадание $i$-го стрелка в цель), противоположные события $\overline{A}_i$ = {промах $i$-го стрелка}, $i$ = 1,2,3. Рассмотрим событие $A$ = {одно попадание в цель при стрельбе 3 стрелков}. Это событие может наступить при наступлении одного из следующих несовместных событий: $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Тогда $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, а его вероятность

$$P(A)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0,6\cdot 0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2+0,4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,036+0,056+0,096=0,188.$$

**Пример 5.7.** Техническое устройство, состоящее из 3 узлов, работало в течение некоторого времени $T$. За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью 0,1, второй - с вероятностью 0,15, третий – с вероятностью 0,12. Найти вероятность того, что за время работы хотя бы 1 узел технического устройства выйдет из строя.

**Решение.** Пусть событие $A_i$ = {выход из строя $i$-го узла технического устройства} $(i=\overline{1,3})$. Тогда событие $A=A_1+A_2+A_3$ – выход из строя хотя бы одного из 5 узлов. События $A_i$ $(i=\overline{1,3})$ совместны и независимы. Поэтому вероятность события $A$ определяется по (7.8):

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3).$$

Следовательно, $P(A)$ = 1 - 0,9 · 0,85 · 0,88 = 1 - 0,6732 = 0,3268.

### 5.3. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие $A$ может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующих полную группу событий (гипотез), то вероятность события $A$ определяется по **формуле полной вероятности**

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k), \qquad (5.9)$$

где $P(H_k)$ – вероятность гипотезы $H_k$; $P(A/H_k)$ – условная вероятность события $A$ при этой гипотезе, $\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)=1$. Вероятность $P(H_k/A)$ гипотезы $H_k$ после того, как появилось событие $A$, **определяется по формуле Байеса**

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)},\ (k=1,2,\ldots,n). \qquad (5.10)$$

**Пример 5.8.** В ящике содержится 12 деталей, изготовленных заводом № 1, 20 деталей – заводом № 2 и 18 деталей – заводом № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная заводом № 1, – отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наугад деталь окажется отличного качества.

**Решение.** Пусть событие $A$ – деталь отличного качества. Рассмотрим гипотезы: $H_1$ – деталь изготовлена заводом № 1; $H_2$ – деталь изготовлена заводом №2; $H_3$ – деталь изготовлена заводом № 3. Вероятности этих гипотез: $P(H_1)=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$; $P(H_2)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$; $P(H_3)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$. Условные вероятности: $P(A/H_1)=0,9$; $P(A/H_2)=0,6$; $P(A/H_3)=0,9$. По формуле полной вероятности (9) при $n=3$ находим искомую вероятность $P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(H_k)P(A/H_k)= =\frac{6}{25}\cdot 0,9+\frac{2}{5}\cdot 0,6+\frac{9}{25}\cdot 0,9=0,78$.

**Пример 5.9.** Счетчик регистрирует частицы 3 типов: $A$, $B$ и $C$. Вероятности появления этих частиц: $P(A)=0,2$; $P(B)=0,5$; $P(C)=0,3$. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями $P_1=0,8$; $P_2=0,2$; $P_3=0,4$. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа $B$.

**Решение.** Обозначим событие $D$ – счетчик уловил частицу; гипотезы: $H_1$ – появление частицы типа $A$; $H_2$ – появление частицы типа $B$; $H_3$ – появление частицы типа $C$. Вероятности гипотез: $P(H_1)=0,2$; $P(H_2)=0,5$; $P(H_3)=0,3$. Условные вероятности: $P(D/H_1)=0,8$; $P(D/H_2)=0,2$; $P(D/H_3)=0,4$. Искомую вероятность $P(H_2/D)$ определим по формуле Байеса (7.10)

$$P(H_2/D)=\frac{P(H_2)P(D/H_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(H_k)P(D/H_k)}=\frac{0,5\cdot 0,2}{0,2\cdot 0,8+0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,4}=\frac{0,1}{0,16+0,1+0,12}=\frac{5}{19}.$$

## 5.4. Повторение испытаний

**Формула Бернулли.** Если в каждом из $n$ независимых испытаний вероятность появления события $A$ постоянна и равна $p$, то вероятность того, что в $n$ испытаниях событие $A$ произойдет ровно $m$ раз, определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m},\ q=1-p. \tag{5.11}$$

**Формула Пуассона.** Если $n$ велико, а $p$ мало ( обычно $p<0,1$; $npq\le 9$ ), то вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \tag{5.12}$$

где $\lambda=np$.

**Локальная теорема Лапласа.** Если $n$ велико, вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{5.13}$$

где $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(p\ne 0,\ p\ne 1)$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы $(\varphi(-x)=\varphi(x))$.

Вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события $A$ равна $p(0<p<1)$, событие $A$ наступит не менее $m_1$ раз и не более $m_2$ раз, приближенно равна

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{5.14}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа; $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$. Значения $\Phi(x)$ определяются из таблицы; $\Phi(x)$ =1/2 при x > 5, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

**Пример 5.10.** В мастерской имеется 10 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что в данный момент не менее 8 моторов работают с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее 8 моторов работают с полной нагрузкой.

**Решение.** Рассмотрим события: $A$ – не менее 8 моторов из 10 в данный момент работают с полной нагрузкой; $B$, $C$, $D$ – события, состоящие в том, что работают соответственно 8, 9 и 10 моторов. Тогда $A = B + C + D$. Так как события $B$, $C$ и $D$ несовместны, $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$. Найдем вероятности событий $B$, $C$ и $D$ по формуле Бернулли (5.11):

$$P(B) = P_{10}(8) = C_{10}^{8}p^{8}q^{2} = C_{10}^{2}\cdot 0,8^{8}\cdot 0,2^{2} = 45\cdot 0,8^{8}\cdot 0,2^{2};$$

$$P(C) = P_{10}(9) = C_{10}^{9}p^{9}q = C_{10}^{9}\cdot 0,8^{9}\cdot 0,2 = 10\cdot 0,8^{9}\cdot 0,2;$$

$$P(D) = P_{10}(10) = C_{10}^{10}p^{10}q^{0} = p^{10} = 0,8^{10}.$$

Тогда $P(A) = 45\cdot 0,8^{3}\cdot 0,2^{2} + 10\cdot 0,8^{9}\cdot 0,2 + 0,8^{10} = 0,8^{8}\cdot 4,04 \approx 0,678$.

**Пример 5.11.** Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

**Решение.** По условию $n = 100$, $m = 75$, $p = 0,8$, $q = 0,2$. Так как $n = 100$ велико, воспользуемся формулой (7.13) локальной теоремы Лапласа. Для этого найдем $x = \dfrac{75 - 100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = -1,25$. По таблице найдем φ(–1,25)=0,1826. Искомая вероятность $P_{100}(75) = \dfrac{0,1826}{4} = 0,04565$.

**Пример 5.12.** Предприятие отправило на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002.Найти вероятность того, что на базу прибудет ровно 3; не более 3 негодных изделий.

**Решение.** Воспользуемся формулой Пуассона (5.12). В данном случае $m = 3$, $p = 0,0002$, $n = 5000$, $\lambda = np = 1$; $P_{5000}(3) = \dfrac{1}{3!}e^{-1} = 0,0613$. Вероятность того, что на базу прибудет не более 3 негодных изделий, равна

$$P_{5000}(0 \le m \le 3) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) = \frac{1}{0!}e^{-1} + \frac{1}{1!}e^{-1} + \frac{1}{2!}e^{-1} + \frac{1}{3!}e^{-1} =$$

$$= \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)e^{-1} = \frac{8}{3}e^{-1} \approx 0,9180 .$$

**Пример 5.13.** Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга, в одинаковом режиме, при включенном приводе, в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

**Решение.** Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (формула (5.14))

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = -\frac{10}{4} = -2,5; \qquad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{86 - 100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Искомая вероятность $P_{100}(70;86) = \Phi(1,5) - \Phi(-2,5) = \Phi(1,5) + \Phi(2,5) = 0,4332 + 0,4938 = 0,927$.

### 5.5. Наивероятнейшее число появлений события

Наивероятнейшее число $m_0$ появления события $A$ в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых оно может появиться с вероятностью $p$ ( и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$ ), определяется из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p, \tag{5.15}$$

а вероятность появления события $A$ хотя бы один раз вычисляется по формуле

$$P = 1 - q^{n}. \tag{5.16}$$

**Пример 5.14.** Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

**Решение.** Запишем двойное неравенство (5.15) при $n = 10$, $p = 0,4$, $q = 0,6$ для этого случая: $10 \cdot 0,4 - 0,6 \le m_0 \le 10 \cdot 0,4 + 0,4$ или $3,4 \le m_0 \le 4,4$.

Так как число $m_0$ должно быть целым, положительным, то $m_0 = 4$. Найдем вероятность получения этого числа по формуле Бернулли (5.11) $P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^6 = 210 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^6 = 0,2508$.

## 5.6. Случайные величины

**Случайной величиной (СВ)** называется числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, заданная на пространстве $\Omega$ элементарных событий $\omega$ и такая, что для любого числа $x$ определена вероятность

$$P(\xi < x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}.$$

Другими словами, **случайная величина** – это величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно, какое именно.

Обычно рассматриваются **два типа СВ: дискретные и непрерывные**. **Дискретной** называется такая СВ, которая принимает конечное или счетное множество значений. Возможные значения непрерывной СВ заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Случайная величина считается **заданной**, если задан закон ее распределения.

**Законом распределения дискретной СВ** называется соотношение, устанавливающее связь между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Пусть дискретная СВ $\xi$ может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $p_i = P(\xi = x_i)$ – вероятность того, что СВ $\xi$ принимает значение $x_i$.

Таблица

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

называется **рядом распределения вероятностей дискретной СВ $\xi$ или законом распределения дискретной СВ $\xi$**.

Поскольку дискретная СВ $\xi$ обязательно принимает одно из значений $x_i$, события $\{\xi = x_i\}$ образуют полную группу событий, поэтому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения.

**Функцией распределения СВ $\xi$ (интегральной функцией СВ $\xi$)** называется функция $F(x)$, равная вероятности $P(\xi < x)$ того, что СВ $\xi$ примет значение, меньшее, чем $x$, т.е. $F(x) = P(\xi < x)$.

**Свойства функции распределения**:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.
3. Если СВ $\xi$ принимает возможное значение $x_i$ с вероятностью $p_i$, то $F(x_i + 0) - F(x_i - 0) = p_i$.

   Функция распределения $F(x)$ в точке $x_i$ непрерывна слева.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
5. $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Случайная величина $\xi$ называется **непрерывной**, если ее функция распределения непрерывна.

6. Если $\xi$ – непрерывная СВ, то $P(\xi = x) = 0$.

**Плотностью распределения СВ $\xi$ ( дифференциальной функцией распределения СВ $\xi$)** называется функция $p(x)$, такая, что функция распределения $F(x)$ выражается формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

**Свойства плотности вероятности:**

1. $p(x) \geq 0$. 2. $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b p(t)dt$. 3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$. 4. $p(x) = F'(x)$.

**Пример 5.15.** В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных, построить функцию распределения.

**Решение.** СВ $\xi$ – число стандартных деталей из 3 отобранных – может принимать следующие значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Вероятности возможных значений $\xi$ определим по формуле $P(\xi = k) = \frac{C_4^k C_2^{3-k}}{C_6^3}$. Итак, $P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$; $P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$; $P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$.

Составим ряд распределения:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/5 | 3/5 | 1/5 |

Для построения функции распределения дискретной СВ $\xi$ воспользуемся тем свойством $F(x)$, что при $x_{k-1} < x \leq x_k$

$$F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} p_i .$$

В точке $x_i$ функция $F(x)$ имеет скачок $p_i = P(\xi = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$ и, значит, для всех $x \in (x_k, x_{k+1}]$

$$F(x) = P_1 + P_2 + ... + P_{K-1} + P_K = \sum_{i=1}^{k} P_i .$$

Таким образом, функция распределения дискретной СВ $\xi$ – кусочно-постоянна, имеет скачки $p_i$ в точках разрыва $x_i$ и непрерывна слева в точках разрыва $x_i$. Для данной СВ $\xi$ функция $F(x)$ и ее график имеют вид $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 1; \\ 1/5 \text{ при } 1 < x \leq 2; \\ 4/5 \text{ при } 2 < x \leq 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

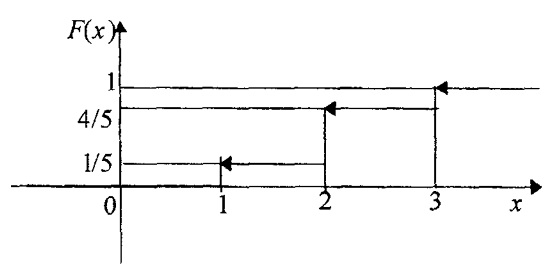



Рис. 2

## 5.7. Числовые характеристики случайных величин

К числовым характеристикам СВ относятся: **математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсия $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$, моменты и др.**

Пусть $\xi$ – дискретная СВ, принимающая значения $x_1, x_2, ...$ с вероятностями $p_1$, $p_2$, ... соответственно.

**Математическим ожиданием СВ $\xi$, или средним значением**, называется число

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

в предположении, что этот ряд сходится абсолютно.

Если СВ $\xi$ - непрерывна с плотностью $p(x)$, то математическое ожидание определяется интегралом

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

**Дисперсией или рассеянием D(ξ) СВ ξ** называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ $\xi$ от ее математического ожидания, т.е. $D(\xi)=M(\xi-M(\xi))^2$.

Для дискретной СВ $\xi$ дисперсия определяется равенством: $D(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-M(\xi))^2 p_i$.

Для непрерывной СВ: $D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2 p(x)dx$.

Из свойств дисперсии получается удобная рабочая формула для ее вычисления

$$D(\xi)=M(\xi^2)-(M(\xi))^2.$$

Для дискретной СВ: $D(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_i-(M(\xi))^2$.

Для непрерывной СВ: $D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx-(M(\xi))^2$.

**Среднее квадратическое отклонение** $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}$.

**Пример 5.16.** Имеется 6 ключей, из которых только 1 подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** Опробования открывания замка заканчиваются на $k$-й попытке, если первые $k$-1 попытки не привели к успеху, а $k$-я попытка закончилась успешно.

Случайная величина $\xi$ – число попыток при открывании замка – может принимать следующие значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $x_6=6$. Вероятности этих значений можно определить по формуле

$$p_k=P(\xi=k)=\frac{6-k+1}{6}\cdot\frac{1}{6-k+1}=\frac{1}{6}.$$

Таким образом, возможные значения случайной величины равновероятны. Запишем ряд распределения данной дискретной СВ.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

На основании этого распределения получим

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2};$$

$$M(\xi^2)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6};$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12};\ \sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{35}{12}}.$$

**Пример 5.17.** Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16} & \text{при} \quad 0<x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$ Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

**Решение.**

1) $p(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0\ ; \\ \dfrac{x}{8} & \text{при} \quad 0<x\le 4\ ; \\ 0 & \text{при} \quad x>4\ ; \end{cases}$ 2) $M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int\limits_{0}^{4}x\dfrac{x}{8}dx=\dfrac{x^3}{24}\Bigg|_0^4=\dfrac{8}{3}$;

3) дисперсию $D(\xi)$ вычислим по формуле $D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2$. Тогда

$$M(\xi^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int\limits_{0}^{4}x^2\frac{x}{8}dx=\frac{x^4}{32}\Bigg|_0^4=8\ ;$$

$$D(\xi)=8-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}\ ;$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

## 5.8. Основные законы распределения случайных величин

**Биномиальным** называется закон распределения дискретной СВ $\xi$, если она может принимать целые неотрицательные значения $0,1,\dots,n$ с вероятностями

$$P(\xi=m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ (p\ge 0,\ q\ge 0,\ p+q=1).$$

Математическое ожидание и дисперсия СВ $\xi$, распределенные по биномиальному закону, вычисляются по формулам $M(\xi)=np$; $D(\xi)=npq$.

**Пример 5.18.** Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0,8. Составить закон распределения всхожести для 5 посеянных семян и найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** Случайная величина $\xi$ – число взошедших из 5 посеянных семян - может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4 и 5. По формуле (5.11) найдем соответствующие им вероятности:

$P_5(\xi=0)=C_5^0p^0q^5=0,2^5=0,00032$ ; $\quad P_5(\xi=1)=C_5^1pq^4=5\cdot 0,8\cdot 0,2^4=0,0064$ ;

$P_5(\xi=2)=C_5^2p^2q^3=10\cdot 0,8^2\cdot 0,2^3=0,0512$ ; $\quad P_5(\xi=3)=C_5^3p^3q^2=10\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2=0,2048$ ;

$P_5(\xi=4)=C_5^4p^4q=5\cdot 0,8^4\cdot 0,2=0,4096$ ; $\quad P_5(\xi=5)=C_5^5p^5q^0=0,8^5=0,32768$ .

Запишем закон распределения.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | 0,00032 | 0,0064 | 0,0512 | 0,2048 | 0,4096 | 0,32768 |

Математическое ожидание

$$M(\xi)=np=5\cdot 0,8=4;$$

дисперсия

$$D(\xi)=npq=5\cdot 0,8\cdot 0,2=0,8;\ \sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{0,8}=0,8944\,.$$

**Равномерным** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, все значения которой лежат на некотором отрезке $[a,b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке. Таким образом, ее плотность вероятности

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b;\\ 0 & \text{при} \quad x<a \quad \text{или} \quad x>b\ .\end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое равномерно распределенной СВ определяются формулами

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2};\ D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\ . \tag{5.17}$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал $(\alpha,\beta)$, представляющий собой часть промежутка $[a,b]$, вычисляется по формуле

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}\ . \tag{5.18}$$

**Пример 5.19.** Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка:
а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

**Решение.** Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину, которая распределена равномерно в интервале между соседними делениями. В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения, равна 0,2, поэтому

$$p(x)=\begin{cases}5 & \text{при} \quad 0\le x\le 0{,}2;\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \quad \text{или} \quad x>0{,}2\ .\end{cases}$$

а). Очевидно, что ошибка отсчета не превысит 0,04, если она будет заключена в интервалах (0; 0,04) или (0,16; 0,2). Тогда искомую вероятность получим по формуле (5.18)

$$p=P(0<\xi<0{,}04)+P(0{,}16<\xi<0{,}2)=5\cdot 0{,}04+5\cdot 0{,}04=0{,}4.$$

б). Ошибка отсчета превысит 0,05, если она будет заключена в интервале (0,05; 0,15). Тогда искомую вероятность получим по формуле (5.18)

$$p=P\ (0{,}05<\xi<0{,}15)=5\cdot 0{,}1=0{,}5.$$

**Нормальный закон распределения.** Распределение непрерывной случайной величины $\xi$ называется **нормальным**, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\ , \tag{5.19}$$

где $a=M(\xi)$ – математическое ожидание; $\sigma=\sqrt{D(\xi)}$ – среднее квадратическое отклонение СВ $\xi$. Вероятность попадания нормально распределенной СВ $\xi$ в заданный интервал $(\alpha,\ \beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \tag{5.20}$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что модуль отклонения случайной величины $\xi$ от своего математического ожидания меньше любого положительного числа ε:

$$P(|\xi-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{5.21}$$

Вероятность отклонения относительной частоты $\omega = m/n$ от постоянной вероятности $p$ появления некоторого события в $n$ независимых испытаниях выражается формулой

$$P(|\omega - p| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) , \tag{5.22}$$

где $q = 1 - p$.

**Пример 5.20.** Пусть случайной величиной $\xi$ является предел текучести данной марки стали, замеренный на некотором количестве проб. Из опыта известно, что величина $\xi$ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 310 МН/м^2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 32$ МН/м$^2$. Найти вероятность того, что значение текучести заключено между 290 и 320 МН/м$^2$.

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся формулой (24). Вычислим значения $\frac{\beta - a}{\sigma}$ и $\frac{\alpha - a}{\sigma}$. В данной задаче $\beta$ = 320 МН/м$^2$; $\alpha$ = 290 МН/м$^2$; $a$ =310 МН/м$^2$; $\sigma$ = 32 МН/м$^2$. Тогда $\frac{\beta - a}{\sigma} = \frac{320-310}{32} = \frac{10}{32} = 0,3125$; $\frac{\alpha - a}{\sigma} = \frac{290-320}{32} = -\frac{30}{32} = -0,9375$.

Используя формулу (7.24), получим:

$P(290 < \xi < 320) = \Phi(0,3125) - \Phi(-0,9375) = \Phi(0,3125) + \Phi(0,9375) = 0,1217 + 0,3264 = 0,4481$.

**Пример 5.21.** Диаметр втулок, изготовленных на заводе, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 25 \cdot 10^{-3}$ м и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10^{-4}$ м. В каких границах будет находиться величина диаметра втулки с вероятностью 0,98?

**Решение.** Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины $\xi$ от своего математического ожидания $a$ меньше любого $\varepsilon > 0$, равна $P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,98$.

Из этого равенства получим $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10^{-4}}\right) = 0,49$. По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим: $\frac{\varepsilon}{10^{-4}} = 2,33$. Отсюда $\varepsilon = 2,33 \cdot 10^{-4}$ м. Тогда искомый интервал, в котором будет находиться диаметр втулки с вероятностью 0,98, можно записать: $(24,767 \cdot 10^{-3}; 25,233 \cdot 10^{-3})$.

## 5.9. Статистические оценки параметров нормального распределения

Важнейшим среди законов непрерывных распределений является нормальный закон, плотность и функция распределения которого имеют вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (a = M(\xi),\ \sigma = \sqrt{D(\xi)});\ F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right);$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Нормальный закон является предельным законом распределения и для ряда других законов распределения. Поэтому основные методы математической статистики разработаны применительно к нормальному закону.

Пусть $F(x)$ – функция распределения изучаемой СВ $\xi$. Обозначим через $H_0$ гипотезу о нормальном распределении СВ $\xi$.

$$F(x) = F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $a$ и $\sigma$ – конкретные значения параметров нормального закона.

Эту гипотезу называют **нулевой гипотезой**. Для ее проверки производят серию из $n$ независимых испытаний. В результате получают выборочную совокупность $x_1, x_2, ..., x_n$, по которой делают вывод о правильности гипотезы $H_0$. Так как СВ $\xi$ может принимать бесконечное множество значений, выборочная совокупность содержит неполную информацию о законе распределения СВ $\xi$.

По этой причине при оценке гипотезы $H_0$ может быть допущена ошибка. Вероятность ошибочного отклонения правильной нулевой гипотезы называют **уровнем значимости**. Обычно при проверке гипотезы уровни значимости $\alpha$ берут равными 0,001; 0,01; 0,05. Если уровень значимости взят 0,05, это значит, что примерно в 5% случаев может быть ошибочно отвергнута верная нулевая гипотеза.

Одним из методов статистической проверки гипотезы о законе распределения является **критерий согласия $\chi^2$ (*хи*-квадрат).**

Допуская нормальное распределение СВ $\xi$, находим точечные оценки его параметров

$$a \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* m_i; \quad \sigma \approx \bar{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - x)^2 m_i},$$

где $x_i^*$ – середины частичных интервалов.

**Пример 5.22.** Даны 100 значений температуры масла двигателя БелАЗ при средних скоростях в виде интервального статистического ряда частот:

| $x_i$ | [45; 47] | [47; 49] | [49; 51] | [51; 53] | [53; 55] | [55; 57] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 4 | 13 | 34 | 32 | 12 | 5 |

Требуется:

1) построить полигон и гистограмму частостей СВ $\xi$;
2) по виду гистограммы и полигона и исходя из механизмов образования исследуемой СВ $\xi$ сделать предварительный выбор закона распределения;
3) предполагая, что исследуемая СВ $\xi$ распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров нормального распределения, записать гипотетичную функцию распределения СВ $\xi$;
4) найти интервальные оценки параметров нормального распределения (доверительную вероятность принять равной $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$).

**Решение**. 1) Для получения гистограммы частостей на каждом из интервалов строим прямоугольник высотой $w_i/h$. Соединяя середины верхних сторон прямоугольников, получаем полигон частостей.

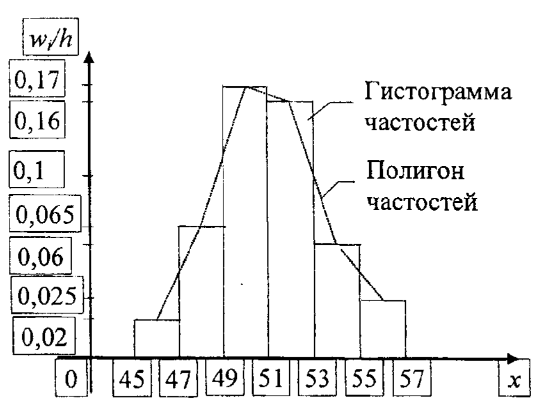



Рис.

2) Вид полигона и гистограммы частостей напоминает кривую нормального распределения. Кроме того, температура масла складывается под воздействием большого числа независимых случайных факторов (обороты двигателя, нагрузка двигателя, температура охлаждающей жидкости и др.), сравнимых по своему рассеиванию. Сказанное позволяет сделать предположение о нормальном распределении СВ $\xi$.

3) Вычисляем точечные оценки параметров нормального распределения.

$$a \approx \bar{x} = \frac{46\cdot 4 + 48\cdot 13 + 50\cdot 34 + 52\cdot 32 + 54\cdot 12 + 56\cdot 5}{100} = 51.$$

При вычислении удобно пользоваться формулой

$$\overline{S}=\sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\overline{(x^2)}-(\overline{x})^2\right]};\ \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i)^2m_i=\frac{46^2\cdot 4+48^2\cdot 13+50^2\cdot 34+52^2\cdot 32+54^2\cdot 12+56^2\cdot 5}{100}=2606{,}17;$$

$$\sigma\approx\overline{S}=\sqrt{\frac{100}{100-1}(2606{,}17-2601)}=2{,}285\,.$$

Записываем функцию распределения нормального закона

$$F_0(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-51}{2{,}285}\right).$$

4) Чтобы записать доверительный интервал для $a = M(\xi)$, из таблицы $t$ - распределения (см. Прил. 5) по данным $\gamma = 0{,}95$ и $n = 100$ выбираем $t_{\gamma,n}$: $t_{\gamma,n} = 1{,}984$. Вычисляем

$$t_{\gamma,n}\cdot\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}=1{,}984\cdot\frac{2{,}285}{10}=0{,}4533\,.$$

С вероятностью 0,95 неизвестное значение покрывается интервалом $51 - 0{,}4533 < a < 51 + 0{,}4533$; $50{,}547 < a < 51{,}453$. Чтобы записать доверительный интервал для $\sigma=\sqrt{D(\xi)}$, из специальной таблицы (см. Прил. 6) по доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и числу $\nu = n - 1 = 100 - 1 = 99$, берем коэффициенты $q_1 = 0{,}878$ и $q_2 = 1{,}161$. С вероятностью 0,95 неизвестное значение $\sigma$ покрывается интервалом $2{,}285\cdot 0{,}878 < \sigma < 2{,}285\cdot 1{,}161$; $2{,}006 < \sigma < 2{,}653$.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. Найти интегралы.**

1.1. а) $\int tg^4 x dx$; б) $\int x\sin 2x dx$; в) $\int \frac{2x^5-6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

1.2. а) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; б) $\int \ln^3 x dx$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$.

1.3. а) $\int \cos^4 x\sin^2 x dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int x^2 e^{2x}dx$.

1.4. а) $\int \frac{7x^2+4x+20}{(x^2+4)(x+2)}dx$; б) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; в) $\int arctg\sqrt{x}dx$.

1.5. а) $\int (x+2)e^{-x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3-1}$; в) $\int \cos^4 x\sin^3 x dx$.

1.6. а) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{3x^2+6x+1}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$; в) $\int ctg^4 3x dx$.

1.7. а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\ln x dx$; в) $\int \sin^4 x dx$.

1.8. а) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; в) $\int x2^{-x}dx$.

1.9. а) $\int x^4\ln x dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$; в) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$.

1.10. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int x arctg x dx$; в) $\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{1-x}}$.

1.11. а) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int x\cos 5x dx$; в) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

1.12. а) $\int ctg^3 x dx$; б) $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$; в) $\int \arcsin x dx$.

1.13. а) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int ctg^3 x dx$; в) $\int x\sec^2 x dx$.

1.14. а) $\int (1+2\sin 3x)^2 dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; в) $\int \frac{x^3-3x+1}{(x+1)(x-2)}dx$.

1.15. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x}$; в) $\int x\cdot 3^x dx$.

1.16. а) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$; б $\int \frac{x-\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$; в) $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$.

1.17. а) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; б) $\int \arccos x dx$; в) $\int \cos^5 x dx$.

1.18. а) $\int \sqrt{x}\ln x dx$; б) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

1.19. а) $\int \frac{2x^2-x+7}{(x+1)(x^2+4)}dx;$ б) $\int x^2\ln(1+x)\,dx;$ в) $\int tg^4 x dx.$

1.20. а) $\int (4+\cos 5x)^2\,dx;$ б) $\int \ln(x^2+1)\,dx;$ в) $\int \frac{(-x^2-5x)\,dx}{(x^2+x+1)(x-2)}.$

1.21. а) $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x};$ б) $\int \frac{4x^2-12x+12}{x^2(x-2)^2}dx;$ в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}.$

1.22. а) $\int x^2\sin x dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)};$ в) $\int \cos^4 x\sin^2 x dx.$

1.23. а) $\int \cos^4 x dx;$ б) $\int \ln^2 x dx;$ в) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)^2}.$

1.24. а) $\int e^x \cos x dx;$ б) $\int \cos^6 x dx;$ в) $\int \frac{5dx}{(x^2+4)(x-1)}.$

1.25. а) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5};$ б) $\int x^2\ln x dx;$ в) $\int \cos^7 x dx.$

1.26. а) $\int \frac{dx}{\sin x};$ б) $\int \frac{dx}{x^4-x^2};$ в) $\int \ln x dx.$

1.27. а) $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx;$ б) $\int \frac{dx}{\cos^4 x};$ в) $\int arctg 3x dx.$

1.28. а) $\int tg^5 x dx;$ б) $\int \frac{(x-2)dx}{x^3-2x^2+x};$ в) $\int x^2e^{-x}dx.$

1.29. а) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx;$ б) $\int \frac{x^2+6}{x^3-2x^2-x+2}dx;$ в) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}.$

1.30. а) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx;$ б) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx;$ в) $\int ctg^4 x dx.$

**Задание 2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.**

2.1. $\int_0^\infty x\sin x dx.$ 2.2. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}.$ 2.3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}.$ 2.4. $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}dx.$

2.5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ 2.6. $\int_0^\infty (x+3)e^{-2x}dx.$ 2.7. $\int_{-\infty}^0 \frac{2x+3}{2x^2-4x+6}dx.$ 2.8. $\int_0^\infty \frac{e^{arctg 3x}}{1+9x^2}dx.$

2.9. $\int_\pi^\infty x\cos 3x dx.$ 2.10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}.$ 2.11. $\int_0^\infty xe^{-3x}dx.$ 2.12. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4x^2+8}.$

2.13. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}.$ 2.14. $\int_0^\infty \frac{xdx}{x^2+4}.$ 2.15. $\int_6^\infty \frac{dx}{x^2-6x+5}.$ 2.16. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}.$

2.17. $\int_\pi^\infty x\cos^2 x dx.$ 2.18. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}dx.$ 2.19. $\int_1^\infty \frac{dx}{5x^2+4x+3}.$ 2.20. $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$

2.21. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$ 2.22. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 2.23. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x\ln^2\ln x}.$ 2.24. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4+x}}.$

2.25. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^2}$.

2.26. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

2.27. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

2.28. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

2.29. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x^2}dx$.

2.30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

**Задание 3. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями с помощью определенного Интеграла. Сделать чертеж.**

3.1. $y^2=16-8x;\ y^2=24x+48$.

3.2. $y=\frac{x^2}{16};\ y=\frac{1}{x^2};\ x=4$.

3.3. $y=x^2-3;\ y=\frac{4}{x^2};\ x=1$.

3.4. $y=x^2-1;\ x=2;\ y=0$.

3.5. $xy=4;\ x+y=5$.

3.6. $y^2=2x+1;\ x-y-1=0$.

3.7. $x^2=4y;\ y=\frac{8}{x^2+4}$.

3.8. $y=1+\cos x;\ x=0;\ y=0$.

3.9. $y=-x^2+6x-5;\ x=0;\ y=0$.

3.10. $y=2-x^2;\ y=\sqrt{2}-x;\ y=0$.

3.11. $y=e^x;\ y=e^{-x};\ y=2$.

3.12. $y=(x+1)^2;\ x+y=1;\ y=0$.

3.13. $y=x^2-4x+3;\ y=x+3$.

3.14. $y=\ln x;\ y=0;\ x=e$.

3.15. $y=\sin x;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{4};\ x=\frac{3\pi}{4}$.

3.16. $x=-2y^2;\ x=1-3y^2$.

3.17. $y=x+1;\ y=\cos x;\ y=0$.

3.18. $x^2+y^2=25;\ 2y-5=0$.

3.19. $y=x^2-4x+3;\ y=x+3$.

3.20. $y=8-x^2;\ y=x^2$.

3.21. $y=4x-x^2;\ y=0$.

3.22. $y=\frac{1}{x};\ y=x^2;\ y=4$.

3.23. $y=\ln x;\ y=-\ln x;\ x=3$.

3.24. $y=4-x^2;\ y=x^2-2x$.

3.25. $y=2x;\ x^2+y^2=25;\ y=0, y>0$.

3.26. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2$.

3.27. $y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=0,\ x=2$.

3.28. $y=6x-x^2,\ y=0$.

3.29. $x^2=16x-4y,\ y=x-4$.

3.30. $y=x^2-1,\ x=2,\ y=0$.

**Задание 4. Проинтегрировать уравнение. При заданном начальном условии найти соответствующий частный интеграл или частное решение.**

4.1. $y'=y^2+3y-4$.

4.2. $yy'=\frac{1-2y}{y}$.

4.3. $xy'+y=\ln x+1, y(1)=4$.

4.4. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$.

4.5. $y'\sin x=y\ln y$.

4.6. $xy'-\frac{y}{x+1}=x$.

4.7. $\frac{dx}{xy-x^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$.

4.8. $\left(1-x^2\right)y'-xy=xy^2, y(0)=\frac{1}{2}$.

4.9. $\left(2e^y-x\right)y'=1$.

4.10. $x^2y' + y^2 = xyy'$.

4.11. $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0, y(1) = 2$.

4.12. $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$.

4.13. $y'tgx - y = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4.14. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$.

4.15. $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0, y(1) = 0$.

14.6. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$.

4.17. $3x^2e^y + (x^3e^y - 1)y' = 0$.

4.18. $xdy - 2ydx = x^3 \ln xdx$.

4.19. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

4.20. $y' + xy = y^3e^{-x^2}$.

4.21. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 3$.

4.22. $(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.

4.23. $y = x(y' - x\cos x), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

4.24. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0.y(1) = \frac{1}{2e}$.

4.25. $xy' + y = \frac{\ln x}{x}, y(1) = 2$.

4.26. $xy' - \frac{y}{x+1} = x,\ y(1) = 0.$

4.27. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$

4.28. $xy' + y = \frac{1}{x^2}\ln x.$

4.29. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right),\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

4.30. $y' + y\cos x = \sin x \cos x,\ \ y(0) = 1.$

**Задание 5. Найти общее решение уравнений.**

5.1. $y'' - 3y' + 2y = x + 2$.

5.2. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$.

5. 3. $3y'' - 2y' = xe^{\frac{2x}{3}}$.

5.4. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$.

5.5. $y'' + 4y' + y = 4$.

5.6. $y'' + 6y' - 3y = x^2$.

5.7. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-3x}$.

5.8. $y'' + 4y' = 4xe^{-4x}$.

5.9. $y'' - 2y' = x^2 - x$.

5.10. $y'' - 5y' - 6y = (3x-2)e^{-x}$.

5.11. $y'' + 2y' + 2y = 2 + x$.

5.12. $y'' + 2y' = 2x$.

5.13. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

5.14. $y'' + 5y' + 6y = 10(1-x)e^{-2x}$.

5.15. $y'' - 2y' + y = x^3$.

5.16. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

5.17. $y'' - y' + y = x^3 + 6x$.

5.18. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

5.19. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}$.

5.20. $y'' + 4y = x + 6e^x$.

5.21. $y'' - 4y' = 10e^{3x}$.

5.22. $y'' + y' = x^2 - 6 + e^{4x}$.

5.23. $y'' - 4y' = 2e^{2x} - 4x$.

5.24. $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$.

5.25. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$.

5.26. $y'' - y' - 2y = e^{-x}$.

5.27. $y'' - 3y' + 2y = 26\sin 3x.$

5.28. $y'' - 7y' + 10y = x^2.$

5.29. $y'' - 8y' + 12y = \cos 2x.$

5.30. $y'' - 2y' + 5y = 3\cos x.$

**Задание 6. Найти область сходимости степенного ряда.**

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$; 6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$; 6.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$; 6.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$;

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$; 6.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$; 6.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$; 6.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$;

6.9. $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}(x+2)^n$; 6.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$; 6.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n}{10^n(2n+1)}$;

6.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+1)^n}$; 6.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$; 6.14. $\sum_{n=0}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{n}{2^n}$;

6.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n+5}$; 6.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$; 6.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$;

6.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$; 6.19. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$; 6.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n4^n}$;

6.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$; 6.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$; 6.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$;

6.24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2n}$; 6.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n9^n}$; 6.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}(x+1)^n$;

6.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2+9}$; 6.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{5^n\sqrt{n^3-0,5}}$; 6.29. $\sum_{n=1}^{\infty}n5^nx^n$;

6.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^n}$.

**Задание 7. Для данной случайной величины (СВ)$\xi$:**

1) **составить закон распределения СВ;**
2) **найти математическое ожидание M($\xi$) и дисперсию D($\xi$);**
3) **найти функцию распределения F(x).**

7.1. На участке имеется 5 одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. СВ $\xi$ – число работающих станков.

7.2. Охотник, имеющий 5 патронов, стреляет в цель до первого попадания или пока не расходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. СВ $\xi$ – число израсходованных патронов.

7.3. Охотник стреляет в цель до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. СВ $\xi$ – число выстрелов, производимых охотником.

7.4. В партии деталей – 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. СВ $\xi$ – число нестандартных деталей среди четырех отобранных.

7.5. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. СВ $\xi$ – число отказавших элементов в одном опыте.

7.6. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ $\xi$ – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали.

7.7. Два стрелка стреляют по одной мишени независимо друг от друга. Первый стрелок выстрелил один раз, второй – два раза. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для вторго – 0,3. СВ $\xi$ – общее число попаданий.

7.8. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают два шара. СВ $\xi$ – число черных шаров среди этих двух.

7.9. Партия, насчитывающая 50 изделий, содержит 6 бракованных. Из всей партии случайным образом выбрано 5 изделий. СВ $\xi$ – число бракованных изделий среди отобранных.

7.10. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. СВ $\xi$ – число библиотек, которые посетит студент.

7.11. Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятности отказа каждого из них соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Отказы элементов независимы. СВ $\xi$ – число отказавших элементов.

7.12. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из I, II, III орудия батареи равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по цели один раз. СВ $\xi$ – число попаданий в цель.

7.13. Из ящика, содержащего 3 бракованных и 5 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ $\xi$ – число вынутых стандартных деталей.

7.14. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. СВ $\xi$ – общее число попаданий.

7.15. В группе из десяти изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое взятое проверяют. СВ $\xi$ – число проверенных изделий.

7.16. Монету подбрасывают 6 раз. СВ $\xi$ – число появлений герба.

7.17. На пути движения автомашины – 4 светофора, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. СВ $\xi$ – число пройденных автомашиной светофоров до первой остановки.

7.18. Из партии в 15 изделий, среди которых имеются 2 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. СВ $\xi$ число бракованных изделий в выборке.

7.19. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. СВ $\xi$ – число бракованных изделий из 6 наудачу взятых изделий.

7.20. Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,1. Из партии контролер берет изделие и проверяет его на качество. Если изделие оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т.д. Всего он проверяет не более 5 изделий. СВ $\xi$ – число проверяемых изделий.

7.21. В шестиламповом радиоприемнике (все лампы различны) перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наугад выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего сразу проверяется работа приемника. СВ $\xi$ – число замен ламп.

7.22. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятности того, что в течение часа 1-й, 2-й и 3-й станок не потребуют внимания рабочего, равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. СВ $\xi$ – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

7.23. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений, жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равна 0,1. СВ $\xi$ – число отказавших факторов в одном испытании.

7.24. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. СВ $\xi$ – число стандартных деталей среди отобранных.

7.25. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. СВ $\xi$ – число опробований при открывании замка при условии, что испробованный ключ в последующих испытаниях не участвует.

7.26. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,8, второго экзамена – 0,9, третьего – 0,6. СВ $\xi$ – число сданных экзаменов.

7.27. Вероятность приема каждого из четырех радиосигналов равна 0,76. СВ $\xi$ – число принятых радиосигналов.

7.28. Производятся четыре выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,7, вторым – 0,6, третьим – 0,5, четвертым – 0,4. СВ $\xi$ – число поражений мишени.

7.29. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из трех студентов равна 0,9. СВ $\xi$ – число студентов, сдавших экзамен.

7.30. Из 20 приборов, испытываемых на надежность, 4 высшей категории. СВ $\xi$ – число приборов высшей категории среди взятых наугад 3 приборов.

**Задание 8. Дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины $\xi$. Требуется:**

1) **составить интервальный статистический ряд частостей (относительных частот) наблюденных значений непрерывной СВ $\xi$;**
2) **построить полигон и гистограмму частостей СВ $\xi$;**
3) **по виду гистограммы и полигона и исходя из механизма образования исследуемой СВ $\xi$ сделать предварительный выбор закона распределения;**
4) **предполагая, что исследуемая СВ $\xi$ распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров нормального распределения, записать функцию распределения СВ $\xi$;**
5) **найти интервальные оценки параметров нормального распределения (доверительную вероятность принять равной $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$).**

8.1. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в минутах) «ремонт валика водяного насоса автомобиля ЗИЛ-130».

| $x_1$ | 0 – 10 | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 - 40 | 40 – 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 7 | 25 | 36 | 24 | 8 |

8.2. Даны результаты определения содержания фосфора (в %) в 100 чугунных образцах.

| $x_1$, % | 0,1 – 0,2 | 0,2 – 0,3 | 0,3 – 0,4 | 0,4 – 0,5 | 0,5 – 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 6 | 24 | 36 | 26 | 8 |

8.3. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в мин.) «контроль механического состояния автомобиля ЗИЛ-130 после возвращения в гараж».

| $x_1$ – | 2,0 – 3,0 | 3,0 – 4,0 | 4,0 – 5,0 | 5,0 – 6,0 | 6,0 – 7,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 22 | 38 | 26 | 6 |

8.4. Даны результаты измерения толщины (в мм) 100 слюдяных прокладок:

| $x_1$ | 2,4 – 2,8 | 2,8 – 3,2 | 3,2 – 3,6 | 3,6 – 4,0 | 4,0 – 4,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 9 | 16 | 45 | 22 | 8 |

8.5. Даны результаты испытаний стойкости 100 фрез (в часах):

| $x_1$ | 22,5 – 27,5 | 27,5 – 32,5 | 32,5 – 37,5 | 37,5 – 42,5 | 42,5 – 47,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 7 | 22 | 44 | 21 | 6 |

8.6. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах):

| $x_1$ | 17,5 – 22,5 | 22,5 – 27,5 | 27,5 – 32,5 | 32,5 – 37,5 | 37,5 – 42,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 6 | 21 | 45 | 21 | 7 |

8.7. Даны результаты измерения твердости 100 фрез (по шкале HRC):

| $x_1$ | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 - 60 | 60 – 70 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 7 | 20 | 44 | 21 | 8 |

8.8. Даны статистические данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей ЗИЛ-130 автоколонны (в сотнях км):

| $x_1$ | 1,2 – 1,6 | 1,6 – 2,0 | 2,0 – 2,4 | 2,4 – 2,8 | 2,8 – 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 7 | 20 | 48 | 19 | 6 |

8.9. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм$^2$):

| $x_1$ | 2,0 – 2,2 | 2,2 – 2,4 | 2,4 – 2,6 | 2,6 – 2,8 | 2,8 – 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 18 | 45 | 20 | 9 |

8.10. Даны результаты измерения твердости 100 сверл (по шкале HRC):

| $x_1$ | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 | 60 – 70 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 18 | 45 | 20 | 9 |

8.11. Даны результаты измерения диаметров втулок, обрабатываемых автоматом:

| $x_1$ | 20,00 – 20,04 | 20,04 – 20,08 | 20,08 – 20,12 | 20,12 – 20,16 | 20,16 – 20,20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 18 | 45 | 20 | 9 |

8.12. Даны результаты исследования грануляции порошка (в мкм):

| $x_1$ | 0 – 40 | 40 – 80 | 80 – 120 | 120 – 160 | 160 – 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 18 | 39 | 26 | 9 |

8.13. Даны результаты измерения диаметров валиков (в мм):

| $x_1$ | 9,74 – 9,76 | 9,76 – 9,78 | 9,78 – 9,80 | 9,80 – 9,82 | 9,82 – 9,84 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 24 | 48 | 14 | 6 |

8.14. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм$^2$):

| $x_1$ | 2,0 – 2,2 | 2,2 – 2,4 | 2,4 – 2,6 | 2,6 – 2,8 | 2,8 – 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 6 | 24 | 40 | 22 | 8 |

8.15. Даны результаты измерения диаметров валиков, обрабатываемых одношпиндельным автоматом:

| $x_1$ | 19,80 – 19,82 | 19,82 – 19,84 | 19,84 – 19,86 | 19,86 – 19,88 | 19,88 – 19,90 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 22 | 44 | 19 | 7 |

8.16. Даны результаты испытания на разрыв 100 образцов дюралюминия (в кг/мм$^2$):

| $x_1$ | 42 – 43 | 43 – 44 | 44 – 45 | 45 – 46 | 46 – 47 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 7 | 25 | 37 | 23 | 8 |

8.17. Даны сведения о расходе воды, используемой заводом для технических нужд, в течение 100 дней:

| $x_1$, м$^3$ | 8 – 10 | 10 – 12 | 12 – 14 | 14 – 16 | 16 – 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 8 | 24 | 36 | 23 | 9 |

8.18. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей:

| $x_1$, км | 150 – 170 | 170 – 190 | 190 – 210 | 210 – 230 | 230 – 250 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 7 | 25 | 34 | 24 | 10 |

8.19. Даны результаты наблюдений за сроком службы 100 однотипных станков до выхода за пределы норм точности (в месяцах двухсменной работы):

| $x_1$ | 20 – 25 | 25 – 30 | 30 – 35 | 35 – 40 | 40 – 45 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_1$ | 9 | 24 | 35 | 22 | 10 |

8.20. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля ЗИЛ-130 при средних скоростях:

| $x_i$ | 40 – 42 | 42 – 44 | 44 – 46 | 46 – 48 | 48 – 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 25 | 35 | 22 | 10 |

8.21. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом:

| $x_i$ | 40,10 – 40,20 | 40,20 – 40,30 | 40,30 – 40,40 | 40,40 – 40,50 | 40,50 – 40,60 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 7 | 24 | 34 | 26 | 9 |

8.22. Даны размеры 100 деталей после шлифовки:

| $x_i$ | 3,45 – 3,65 | 3,65 – 3,85 | 3,85 – 4,05 | 4,05 – 4,25 | 4,25 – 4,45 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 22 | 38 | 25 | 7 |

8.23. Дана трудоемкость операции «проверка привода подачи топлива автомобиля БелАЗ»:

| $x_i$ | 8 – 10 | 10 – 12 | 12 – 14 | 14 – 16 | 16 – 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 7 | 16 | 54 | 15 | 8 |

8.24. Дана трудоемкость операции «смазка подшипников подвески БелАЗ»:

| $x_i$ | 30 – 35 | 35 – 40 | 40 – 45 | 45 – 50 | 50 – 55 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 24 | 36 | 22 | 10 |

8.25. Даны отклонения диаметров валиков, обработанных на станке, от заданного диаметра (в мкм):

| $x_i$ | 0 – 5 | 5 – 10 | 10 – 15 | 15 – 20 | 20 – 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 20 | 42 | 24 | 6 |

8.26. Даны размеры 100 деталей после шлифовки ($x_i$ – размер после шлифовка (в мм)):

| $x_i$ | 42,5 – 43,5 | 43,5 – 44,5 | 44,5– 45,5 | 45,5– 46,5 | 46,5– 47,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 24 | 36 | 24 | 8 |

8.27. Дана трудоемкость операции «проверка привода подачи топлива автомобиля БелАЗ»:

| $x_i$, с | 7 – 9 | 9 – 11 | 11 – 13 | 13 – 15 | 15 – 17 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 15 | 55 | 14 | 8 |

8.28. Даны результаты наблюдений за сроком службы 100 однотипных станков до выхода за пределы норм точности (в месяцах двухсменной работы):

| $x_i$ | 21 – 26 | 26 – 31 | 31 – 36 | 36 – 41 | 41 – 46 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 10 | 23 | 35 | 23 | 9 |

8.29. Даны размеры 100 деталей после шлифовки:

| $x_i$, мм | 3,5 – 3,7 | 3,7 – 3,9 | 3,9 – 4,1 | 4,1 – 4,3 | 4,3 – 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 8 | 22 | 38 | 25 | 7 |

8.30. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей:

| $x_i$, км | 160 – 180 | 180 – 200 | 200 – 220 | 220 – 240 | 240 – 260 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 7 | 25 | 34 | 24 | 10 |

## ЛИТЕРАТУРА


1. Высшая математика. Общий курс / под ред. С.А. Самоля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.

2. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1998.

3. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая шк., 1985.

4. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – Т.2.

5. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1980.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 4 ч. / под общей ред. А.П. Рябушко..– Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 3, 4.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**Значения функции** $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3084 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3025 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2804 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1j74 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0846 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0032 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0012 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0010 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

**Значения функции Лапласа** $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| $x$ | $\Phi(x)$<br>$x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,32 | 0,1255 | 0,64 | 0,2389 | 0,96 | 0,3315 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,33 | 0,1293 | 0,65 | 0,2422 | 0,97 | 0,3340 |
| 0,02 | 0,0080 | 0734 | 0,1331 | 0,66 | 0,2454 | 0,98 | 0,3365 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,35 | 0,1368 | 0,67 | 0,2486 | 0,99 | 0,3389 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,36 | 0,1406 | 0,68 | 0,2517 | 1,00 | 0,3413 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,37 | 0,1443 | 0,69 | 0,2549 | 2,01 | 0,3438 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,38 | 0,1480 | 0,70 | 0,2580 | 1,02 | 0,3461 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,39 | 0,1517 | 0,71 | 0,2611 | 1,03 | 0,3485 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,40 | 0,1554 | 0,72 | 0,2642 | 1,04 | 0,3508 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,41 | 0,1591 | 0,73 | 0,2673 | 1,05 | 0,3531 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,42 | 0,1628 | 0,74 | 0,2703 | 1,06 | 0,3554 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,43 | 0,1664 | 0,75 | 0,2734 | 1,07 | 0,3577 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,44 | 0,1700 | 0,76 | 0,2764 | 1,08 | 0,3599 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,45 | 0,1736 | 0,77 | 0,2794 | 1,09 | 0,3621 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,46 | 0,1772 | 0,78 | 0,2823 | 1,10 | 0,3643 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,47 | 0,1808 | 0,79 | 0,2852 | 1,11 | 0,3665 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,48 | 0,1844 | 0,80 | 0,2881 | 1,12 | 0,3686 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,49 | 0,1879 | 0,81 | 0,2910 | 1,13 | 0,3708 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,50 | 0,1915 | 0,82 | 0,2939 | 1,14 | 0,3729 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,51 | 0,1950 | 0,83 | 0,2967 | 1,15 | 0,3749 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,52 | 0,1985 | 0,84 | 0,2995 | 1,16 | 0,3770 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,53 | 0,2019 | 0,85 | 0,3023 | 1,17 | 0,3790 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,54 | 0,2054 | 0,86 | 0,3051 | 1,18 | 0,3810 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,55 | 0,2088 | 0,87 | 0,3078 | 1,19 | 0,3830 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,56 | 0,2123 | 0,88 | 0,3106 | 1,20 | 0,3849 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,57 | 0,2157 | 0,89 | 0,3133 | 1,21 | 0,3869 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,58 | 0,2190 | 0,90 | 0,3159 | 1,22 | 0,3883 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,59 | 0,2224 | 0,91 | 0,3186 | 1,23 | 0,3907 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,6, | 0,2257 | 0,92 | 0,3212 | 1,24 | 0,3925 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,61 | 0,2291 | 0,93 | 0,3238 | 1,25 | 0,3944 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,62 | 0,2324 | 0,94 | 0,3264 | | |
| 0,31 | 0,1217 | 0,63 | 0,2357 | 0,95 | 0,3289 | | |
| 1,26 | 0,3962 | 1,59 | 0,4441 | 1,92 | 0,4726 | 2,50 | 0,4938 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,60 | 0,4452 | 1,93 | 0,4732 | 2,52 | 0,4941 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,61 | 0,4463 | 1,94 | 0,4738 | 1,54 | 0,4945 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,62 | 0,4474 | 1,95 | 0,4744 | 2,56 | 0,4948 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,63 | 0,4484 | 1,96 | 0,4750 | 2,58 | 0,4951 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,64 | 0,4495 | 1,97 | 0,4756 | 2,60 | 0,4953 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,65 | 0,4505 | 1,98 | 0,4761 | 2,62 | 0,4956 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,66 | 0,4515 | 1,99 | 0,4767 | 2764 | 0,4959 |
| 1,34 | 0,4099 | 1,67 | 0,4525 | 2,00 | 0,4772 | 2,66 | 0,4961 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,68 | 0,4535 | 2,02 | 0,4783 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,36 | 0,4131 | 1,69 | 0,4545 | 2,04 | 0,4793 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,37 | 0,4147 | 1,70 | 0,4554 | 2,06 | 0,4803 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,38 | 0,4162 | 1,71 | 0,4564 | 2,08 | 0,4812 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,39 | 0,4177 | 1,72 | 0,4573 | 2,10 | 0,4821 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,40 | 0,4192 | 1,73 | 0,4582 | 2,12 | 0,4830 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,41 | 0,4207 | 1,74 | 0,4591 | 2,14 | 0,4838 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,42 | 0,4222 | 1,75 | 0,4599 | 2,16 | 0,4846 | 2,82 | 0,4976 |

Окончание таблицы

| $x$ | $\Phi(x)$ $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,43 | 0,4236 | 1,76 | 0,4608 | 2,18 | 0,4854 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,44 | 0,4251 | 1,77 | 0,4616 | 2,20 | 0,4861 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,45 | 0,4265 | 1,78 | 0,4625 | 2,22 | 0,4868 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,46 | 0,4279 | 1,79 | 0,4633 | 2,24 | 0,4875 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,47 | 0,4292 | 1,80 | 0,4641 | 2,26 | 0,4881 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,48 | 0,4306 | 1,81 | 0,4649 | 2,28 | 0,4887 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,49 | 0,4319 | 1,82 | 0,4656 | 2,30 | 0,4893 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,50 | 0,4332 | 1,83 | 0,4664 | 2,32 | 0,4898 | 2,98 | 0,4986 |
| 1,51 | 0,4345 | 1,84 | 0,4671 | 2,34 | 0,4904 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,52 | 0,4357 | 1,85 | 0,4678 | 2,36 | 0,4909 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,53 | 0,4370 | 1,86 | 0,4686 | 2,38 | 0,4913 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,54 | 0,4382 | 1,87 | 0,4693 | 2,40 | 0,4918 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,55 | 0,4394 | 1,88 | 0,4699 | 2,42 | 0,4922 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,56 | 0,4406 | 1,89 | 0,4706 | 2,44 | 0,4927 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,57 | 0,4418 | 1,90 | 0,4713 | 2,46 | 0,4931 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,58 | 0,4429 | 1,91 | 0,4719 | 2,48 | 0,4934 | 5,00 | 0,499997 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Значения функции** $\chi^2_{\alpha;\nu}$; $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\nu}) = \alpha$

| $\nu \backslash \alpha$ | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,412 | 6,635 | 10,827 |
| 2 | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,824 | 9,210 | 13,815 |
| 3 | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,837 | 11,345 | 16,266 |
| 4 | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,668 | 13,277 | 18,467 |
| 5 | 7,289 | 9,236 | 11,070 | 13,388 | 15,086 | 20,515 |
| 6 | 8,558 | 10,645 | 12,592 | 15,033 | 16,812 | 22,457 |
| 7 | 9,803 | 12,017 | 14,067 | 16,622 | 18,475 | 24,322 |
| 8 | 11,030 | 13,362 | 15,507 | 18,168 | 20,090 | 26,125 |
| 9 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19,679 | 21,666 | 27,877 |
| 10 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 21,161 | 23,209 | 29,588 |
| 11 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 22,618 | 24,725 | 31,264 |
| 12 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 24,054 | 26,217 | 32,909 |
| 13 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 25,472 | 27,688 | 34,528 |
| 14 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,683 | 29,141 | 36,123 |
| 15 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 28,259 | 30,578 | 37,697 |
| 16 | 20,465 | 23.542 | 26,296 | 29,633 | 32,000 | 39,252 |
| 17 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,995 | 33,409 | 40,790 |
| 18 | 22,760 | 25,989 | 28,869 | 32,346 | 34,805 | 42,312 |
| 19 | 23,900 | 27,204 | 30,144 | 33,687 | 36,191 | 43,820 |
| 20 | 25,038 | 28,412 | 31,410 | 35,020 | 37,566 | 45,315 |
| 21 | 26,171 | 29,615 | 32,671 | 36,343 | 38,932 | 46,797 |
| 22 | 27,301 | 30,813 | 33,924 | 37,659 | 40,289 | 48,268 |
| 23 | 28,429 | 32,007 | 35,172 | 38,968 | 41,638 | 49,728 |
| 24 | 29,553 | 33,196 | 36,415 | 40,270 | 42,980 | 51,179 |
| 25 | 30,675 | 34,382 | 37,652 | 41,566 | 44,312 | 52,620 |
| 26 | 31,795 | 35,563 | 38,885 | 42,856 | 45,642 | 54,052 |
| 27 | 32,912 | 36,741 | 40,113 | 44,140 | 46,963 | 55,476 |
| 28 | 34,027 | 37,916 | 41,337 | 45,419 | 48,278 | 56,893 |
| 29 | 35,139 | 39,087 | 42,557 | 46,693 | 49,588 | 58,302 |
| 30 | 36,250 | 40,256 | 43,773 | 47,962 | 50,892 | 59,703 |

## Распределение Стьюдента.

Значения $t_{\alpha;\nu}$ удовлетворяют условию $P(t \geq t_{\alpha;\nu}) = \int\limits_{t_{\alpha;\nu}}^{\infty} S(t,\nu)dt = \alpha$.

| $\nu \backslash \alpha$ | 0,40 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,010 | 0,005 | 0,001 | 0,0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,325 | 0,727 | 1,376 | 3,078 | 6,314 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,3 | 636,6 |
| 2 | 0,289 | 0,617 | 1,061 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,33 | 32,60 |
| 3 | 0,277 | 0,584 | 0,978 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,22 | 12,94 |
| 4 | 0,271 | 0,569 | 0,941 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3.747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 |
| 5 | 0,267 | 0,559 | 0,920 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 5,032 | 5,893 | 6,859 |
| 6 | 0,265 | 0,553 | 0,906 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 |
| 7 | 0,263 | 0,549 | 0,896 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,405 |
| 8 | 0,262 | 0,546 | 0,889 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 |
| 9 | 0,261 | 0,543 | 0,883 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 |
| 10 | 0,260 | 0,542 | 0,879 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 |
| 11 | 0,260 | 0,540 | 0,876 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 | 4,437 |
| 12 | 0,259 | 0,539 | 0,873 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 | 4,318 |
| 13 | 0,259 | 0,538 | 0,870 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 | 4,221 |
| 14 | 0,258 | 0,537 | 0,868 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 | 4,140 |
| 15 | 0.258 | 0,536 | 0,866 | 1.341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 | 4,073 |
| 16 | 0,258 | 0,535 | 0,865 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 | 4,015 |
| 17 | 0,257 | 0,534 | 0,863 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 | 3,965 |
| 18 | 0,257 | 0,534 | 0,862 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,611 | 3.922 |
| 19 | 0,257 | 0,533 | 0,861 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 | 3,883 |
| 20 | 0,257 | 0,533 | 0,860 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 | 3,850 |
| 21 | 0,257 | 0,532 | 0,859 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 | 3,819 |
| 22 | 0,256 | 0,532 | 0,858 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 | 3,792 |
| 23 | 0,256 | 0,532 | 0,858 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 | 3,767 |
| 24 | 0,256 | 0,531 | 0,857 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 | 3,745 |
| 25 | 0,256 | 0,531 | 0,856 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 | 3,725 |
| 26 | 0,256 | 0,531 | 0,856 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 | 3,707 |
| 27 | 0,256 | 0,531 | 0,855 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 | 3,690 |
| 28 | 0,256 | 0,530 | 0,855 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 | 3,674 |
| 29 | 0,256 | 0,530 | 0,854 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 7,756 | 3,396 | 3,659 |
| 30 | 0,256 | 0,530 | 0,854 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 | 3,646 |
| 40 | 0,255 | 0,529 | 0,851 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 | 3,551 |
| 50 | 0,255 | 0,528 | 0,849 | 1,298 | 1,676 | 2,009 | 2,403 | 2,678 | 3,262 | 3,495 |
| 60 | 0,254 | 0,527 | 0,848 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 | 3,460 |
| 80 | 0,254 | 0,527 | 0,846 | 1,292 | 1,664 | 1,990 | 2,374 | 2,639 | 3,195 | 3,415 |
| 100 | 0,254 | 0,526 | 0,845 | 1,290 | 1,660 | 1,984 | 2,365 | 2,626 | 3,174 | 3,389 |
| 200 | 0,254 | 0,525 | 0,843 | 1,286 | 1,653 | 1,972 | 2,345 | 2,601 | 3,131 | 3,339 |
| 500 | 0,253 | 0,525 | 0,842 | 1,283 | 1,648 | 1.965 | 2,334 | 2,586 | 3,106 | 3,310 |
| $\infty$ | 0,253 | 0,524 | 0,842 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 | 3,291 |

**Значения функции** $t_{\gamma;n}; \overline{x} - t_{\gamma;n}\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_{\gamma;n}\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}$

| $n\backslash\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 | $n\backslash\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2,78 | 4,60 | 8,61 | 20 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 6 | 2,57 | 4,03 | 6,86 | 25 | 2,064 | 2,797 | 3,745 |
| 7 | 2,45 | 3,71 | 5,96 | 30 | 2,045 | 2,756 | 3,659 |
| 8 | 2,37 | 3,50 | 5,41 | 35 | 2,032 | 2,720 | 3,600 |
| 9 | 2,31 | 3,36 | 5,04 | 40 | 2,023 | 2,708 | 3,558 |
| 10 | 2,26 | 3,25 | 4,78 | 45 | 2,016 | 2,692 | 3,527 |
| 11 | 2,23 | 3,17 | 4,59 | 50 | 2,009 | 2,679 | 3,502 |
| 12 | 2,20 | 3,11 | 4,44 | 60 | 2,001 | 2,662 | 3,464 |
| 13 | 2,18 | 3,06 | 4,32 | 70 | 1,996 | 2,649 | 3,439 |
| 14 | 2,16 | 3,01 | 4,22 | 80 | 1,991 | 2,640 | 3,418 |
| 15 | 2,15 | 2,98 | 4,14 | 90 | 1,987 | 2,633 | 3,403 |
| 16 | 2,13 | 2,95 | 4,07 | 100 | 1,984 | 2,627 | 3,392 |
| 17 | 2,12 | 2,92 | 4,02 | 120 | 1,980 | 2,617 | 3,374 |
| 18 | 2,11 | 2,90 | 3,97 | $\infty$ | 1,960 | 2,576 | 3,291 |
| 19 | 2,10 | 2,88 | 3,92 | | | | |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

**Значения коэффициентов** $q_1$ **и** $q_2$; $q_1\overline{S} < \sigma < q_2\overline{S}$

| | 0,99 | | 0,98 | | 0,95 | | 0,00 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ |
| 1 | 0,356 | 15,0 | 0,388 | 79,8 | 0,446 | 31,9 | 0,510 | 15,9 |
| 2 | 0,434 | 14,1 | 0,466 | 9,97 | 0,521 | 6,28 | 0,578 | 4,40 |
| 3 | 0,483 | 6,47 | 0,514 | 5,11 | 0,566 | 3,73 | 0,620 | 2,92 |
| 4 | 0,519 | 4,39 | 0,549 | 3,67 | 0,599 | 2,87 | 0,649 | 2,37 |
| 5 | 0,546 | 3,48 | 0,576 | 3,00 | 0,624 | 2,45 | 0,672 | 2,090 |
| 6 | 0,569 | 2,98 | 0,597 | 2,62 | 0,644 | 2,202 | 0,690 | 1,916 |
| 7 | 0,588 | 2,66 | 0,616 | 2,377 | 0,661 | 2,035 | 0,705 | 1,797 |
| 8 | 0,604 | 2,440 | 0,631 | 2,205 | 0,675 | 1,916 | 0,718 | 1,711 |
| 9 | 0,618 | 2,277 | 0,644 | 2,076 | 0,688 | 1,826 | 0,729 | 1,645 |
| 10 | 0,630 | 2,154 | 0,656 | 1,977 | 0,699 | 1,755 | 0,739 | 1,593 |
| 11 | 0,641 | 2,056 | 0,667 | 1,898 | 0,708 | 1,698 | 0,748 | 1,550 |
| 12 | 0,651 | 1,976 | 0,676 | 1,833 | 0,717 | 1,651 | 0,755 | 1,515 |
| 13 | 0,660 | 1,910 | 0,685 | 1,779 | 0,725 | 1,611 | 0,762 | 1,485 |
| 14 | 0,669 | 1,854 | 0,693 | 1,733 | 0,732 | 1,577 | 0,769 | 1,460 |
| 15 | 0,676 | 1,806 | 0,700 | 1,694 | 0,739 | 1,548 | 0,775 | 1,437 |
| 16 | 0,683 | 1,764 | 0,707 | 1,659 | 0,745 | 1,522 | 0,780 | 1,418 |
| 17 | 0,690 | 1,727 | 0,713 | 1,629 | 0,750 | 1,499 | 0,785 | 1,400 |
| 18 | 0,696 | 1,695 | 0,719 | 1,602 | 0,756 | 1,479 | 0,790 | 1,385 |
| 19 | 0,702 | 1,668 | 0,725 | 1,578 | 0,760 | 1,460 | 0,794 | 1,370 |
| 20 | 0,707 | 1,640 | 0,730 | 1,556 | 0,765 | 1,414 | 0,798 | 1,358 |
| 21 | 0,712 | 1,617 | 0,734 | 1,536 | 0,769 | 1,429 | 0,802 | 1,346 |
| 23 | 0,722 | 1,576 | 0,743 | 1,502 | 0,777 | 1,402 | 0,809 | 1,326 |
| 24 | 0,726 | 1,558 | 0,747 | 1,487 | 0,781 | 1,391 | 0,812 | 1,316 |
| 25 | 0,730 | 1,541 | 0,751 | 1,473 | 0,784 | 1,380 | 0,815 | 1,308 |
| 26 | 0,734 | 1,526 | 0,755 | 1,460 | 0,788 | 1,371 | 0,818 | 1,300 |
| 27 | 0,737 | 1,512 | 0,758 | 1,448 | 0,791 | 1,361 | 0,820 | 1,293 |
| 29 | 0,744 | 1,487 | 0,765 | 1,426 | 0,796 | 1,344 | 0,825 | 1,279 |
| 30 | 0,748 | 1,475 | 0,768 | 1,417 | 0,799 | 1,337 | 0,828 | 1,274 |
| 40 | 0,774 | 1,390 | 0,792 | 1,344 | 0,821 | 1,279 | 0,847 | 1,228 |
| 50 | 0,793 | 1,336 | 0,810 | 1,297 | 0,837 | 1,243 | 0,861 | 1,199 |
| 60 | 0,808 | 1,299 | 0,824 | 1,265 | 0,849 | 1,217 | 0,871 | 1,179 |
| 70 | 0,820 | 1,272 | 0,835 | 1,241 | 0,858 | 1,198 | 0,879 | 1,163 |
| 80 | 0,829 | 1,250 | 0,844 | 1,222 | 0,866 | 1,183 | 0,886 | 1,151 |
| 90 | 0,838 | 1,233 | 0,852 | 1,207 | 0,873 | 1,171 | 0,892 | 1,141 |
| 100 | 0,845 | 1,219 | 0,858 | 1,195 | 0,878 | 1,161 | 0,897 | 1,133 |
| 200 | 0,887 | 1,15 | 0,897 | 1,13 | 0,912 | 1,11 | 0,925 | 1.09 |

## СОДЕРЖАНИЕ


ПРОГРАММА ... 3

Тема 1. Неопределенный интеграл ... 5
1.1. Понятие неопределенного интеграла ... 5
1.2. Основные методы интегрирования ... 6

Тема 2. Определенный интеграл ... 14
2.1. Вычисление определенного интеграла ... 14
2.2. Приложение определенного интеграла ... 15
2.3. Несобственные интегралы ... 16
2.4. Интегралы с бесконечными пределами (I рода) ... 16

Тема 3. Дифференциальные уравнения ... 16
3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка ... 17
3.1.1. Уравнение с разделяющими переменными ... 17
3.1.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка ... 18
3.1.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка ... 18
3.1.4. Уравнение Бернулли ... 19
3.2. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка ... 19

Тема 4. Ряды ... 25
4.1. Числовые ряды. Основные определения. Сходимость ряда. Признаки сходимости числовых рядов ... 25
4.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами ... 25
4.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница ... 27
4.4. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда ... 28
4.5. Свойства степенных рядов ... 29

Тема 5. Теория вероятностей и математическая статистика ... 30
5.1. Пространство элементарных событий. Определение вероятности. Элементы комбинаторики ... 30
5.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей ... 31
5.3. Формула полной вероятности и формула Байеса ... 33
5.4. Повторение испытаний ... 34
5.5. Наивероятнейшее число появлений события ... 35
5.6. Случайные величины ... 36
5.7. Числовые характеристики случайных величин ... 37
5.8. Основные законы распределения случайных величин ... 39
5.9. Статистические оценки параметров нормального распределения ... 41

Задания для самостоятельного решения ... 44

Литература ... 53

ПРИЛОЖЕНИЯ ... 54
Приложение 1 ... 54
Приложение 2 ... 55
Приложение 3 ... 56
Приложение 4 ... 57
Приложение 5 ... 58
Приложение 6 ... 59

Учебное издание

Методические указания и задания
к контрольной работе № 2 по высшей математике
для студентов заочного отделения ФТУГ
экономических специальностей

Составители:

АЛЕЙНИКОВА Зинаида Михайловна
БОРОДИЧ Лилия Ивановна
ЛАТЫШЕВА Ильвина Григорьевна и др.

ЦАНА 1311

Подписано в печать 29.11.2010.
Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,09. Уч.-изд. л. 2,77. Тираж 200. Заказ 819.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости. 65. 220013, Минск.

Научная библиотека
БНТУ
*800522383*