Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания и контрольные задания

для студентов-заочников

инженерно-экономических специальностей

Минск 2001

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания и контрольные задания

для студентов-заочников

инженерно-экономических специальностей

Минск 2001

УДК 519.2
Т33

Настоящее издание предназначено для студентов-заочников инженерно-экономических специальностей.

Оно содержит вопросы учебной программы по теории вероятностей, математической статистике и системам массового обслуживания, контрольные задания и методические указания по их выполнению.

Авторы благодарят Карпук Т.А. за активное участие в оформлении рукописи.

Составители:
А.Д.Корзников, Л.Д.Матвеева, В.В.Павлов, А.Н.Рудый

Под общей редакцией А.Д.Корзникова

Рецензент В.В.Веременюк

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-экономических специальностей

Составители: КОРЗНИКОВ Александр Дмитриевич
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
ПАВЛОВ Валерий Валентинович
РУДЫЙ Александр Никодимович

Под общей редакцией А.Д.Корзникова

Редактор Т. Н. Микулик

Подписано в печать 03.04.2000.
Формат 60x84 1/16. Бумага тип. №2. Офсет. печать.
Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,0. Тир. 200. Зак. 101.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусская государственная политехническая академия.
Лицензия ЛВ №155 от 30.01.98. 220027, Минск, пр. Ф.Скорины, 65.

Введение

Курс теории вероятностей и математической статистики является составной частью математической подготовки студентов вузов. Существенное развитие этой области математики явилось причиной значительной переработки программы курса, включения в нее новых разделов (марковские процессы, элементы теории массового обслуживания и т.п.). Кроме того, развитие средств вычислительной техники сделали излишними некоторые методы упрощения вычислений при анализе и обработке статистических данных. Данное пособие, в некоторой степени, отражает происшедшие изменения и может быть использовано при изучении теоретического материала и как методические указания при решении задач.

Решение контрольных задач следует выполнять в отдельной тетради, чернилами любого цвета (кроме красного), оставляя поля для замечаний рецензента. Решения задач необходимо располагать в порядке возрастания их номеров, записывая полностью их условия.

Если при проверке контрольной работы будут обнаружены ошибки, работа будет выслана студенту для их исправления. Работу над ошибками необходимо выполнить в этой же тетради и выслать на повторную проверку.

Рекомендуемая литература

1. Герасимович А.И. Математическая статистика. - Мн.: Вышэйшая школа, 1983.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1975.
4. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.. Высшая школа, 1991.
5. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. - Мн.: Вышэйшая школа, 1982.

Тема 1. *Определение вероятности и правила ее вычисления*

1. *Пространство элементарных событий.*
2. *Классификация событий (операции над множествами).*
3. *Относительная частота и ее свойства.*
4. *Аксиомы теории вероятностей.*
5. *Методы задания вероятностей.*
6. *Свойства вероятности (теоремы сложения и умножения вероятностей).*
7. *Условная вероятность. Независимость событий.*
8. *Формула полной вероятности.*
9. *Формулы Бейеса.*

Пространство элементарных событий. Непосредственный подсчет вероятности

Элементарным событием называется любой возможный результат ответа или наблюдения. Элементарное событие является случайным, если в результате ответа или эксперимента оно может произойти, а может и не произойти. Совокупность всех элементарных событий Ω в данном эксперименте (т.е. множество всех мыслимо возможных исходов данного эксперимента) называется *пространством элементарных событий.*

При проведении некоторого эксперимента нас могут интересовать события более сложные, чем элементарные. Например, при бросании игральной кости нас может интересовать событие "выпало четное число очков". Событие произойдет, если в результате опыта появилось либо 2, либо 4, либо 6, т.е. интересующее нас событие состоит из множества элементарных событий $A = \{2, 4, 6\}$, которое является подмножеством пространства элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Таким образом, событием A мы будем называть любое подмножество пространства элементарных событий.

Событие, которое в данном эксперименте обязательно произойдет, а значит, в него входят все элементарные события, называется *достоверным событием.* То есть достоверное событие-это пространство элементарных событий Ω.

Невозможное событие (событие, которое в данном эксперименте не может произойти) совпадает с пустым множеством ($A = \varnothing$).

Два случайных события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в данном эксперименте.

Два события называются *равновозможными*, если при выполнении условий данного эксперимента одинаково возможны появления этих событий.

Вероятностью события А называется количественная оценка возможности появления события.

Рассмотрим вероятностный эксперимент, в котором пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ состоит из конечного числа n *равновозможных* элементарных событий $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Событие А - некоторое подмножество пространства элементарных событий из m элементарных событий: $A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\right\}$. Эти элементарные события ω_{i_k}, k = 1, ..., m, называются *благоприятствующими* событию А, то есть если в результате эксперимента происходит одно из элементарных событий $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}$, то наступает событие А. Если, например, эксперимент состоит в бросании игральной кости, а событие А - "выпало четное число очков", то элементарными событиями, благоприятствующими событию А, будут: выпало 2 очка, или 4, или 6, т.е. А = {2, 4, 6}, при этом $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Классической вероятностью события А называется отношение числа $|A| = m$ элементарных событий, благоприятствующих событию А, к общему числу $|\Omega| = n$ элементарных событий, т.е. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$.

Пример 1. На склад поступает продукция из четырех пунктов. Наудачу отобраны два изделия. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что эти изделия принадлежат продукции одного и того же пункта.

Решение. 1). Пусть событие A_1 означает, что изделие принадлежит продукции первого пункта; A_2, A_3, A_4 - изделия, принадлежащие продукции второго, третьего и четвертого пунктов соответственно.

Обозначим через ω_{ij} элементарное событие, состоящее в том, что первое изделие из двух выбранных - с i - го пункта, а второе - с j - го. Тогда пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33}, \omega_{34}, \omega_{41}, \omega_{42}, \omega_{43}, \omega_{44}\}$.

2). Пусть событие А состоит в том, что два отобранных изделия принадлежат продукции одного и того же пункта. Тогда событию А благоприятствуют элементарные события ω_{11}, ω_{22}, ω_{33}, ω_{44}, т.е. $A = \{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}\}$. Если предположить, что все элементарные события равновозможны, то по формуле классической вероятности имеем $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Таким образом, вероятность того, что два отобранных случайным образом изделия будут произведены в одном и том же пункте, равна $\frac{1}{4}$.

Свойства вероятности

Поскольку под событием мы понимаем подмножество пространства элементарных событий, то действия над событиями определяются аналогично тому, как определяются действия над множествами.

Событием $\overline{A}$ *, противоположным событию А*, называется событие, состоящее из тех элементарных событий эксперимента, которые не входят в событие А: $\overline{A} = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$.

Суммой (объединением) двух событий А и В называется событие С, содержащее те элементарные события, которые принадлежат хотя бы одному из этих событий:

$$C = A + B = A \cup B = \{\omega \in \Omega | \ \omega \in A \ или \ \omega \in B \ \}.$$

Понятно, что $A + \overline{A} = \Omega$.

Произведением (пересечением) двух событий *А и В* называется событие С, содержащее те элементарные события, которые входят одновременно и в событие А, и в событие В:

$$C = A \cdot B = A \cap B = \{\omega \in \Omega | \ \omega \in A \ и \ \omega \in B \ \}.$$

Два события А и В называются *несовместными*, если их одновременное появление является невозможным событием, т.е. если $A \cdot B = A \cap B = \varnothing$.

Разностью двух событий А и В называется событие (которое принято обозначать $A \setminus B$), состоящее из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые входят в событие А, но не входят в событие В, т.е.

$$A \setminus B = = \{\omega \in \Omega | \ \omega \in A, но \ \omega \notin B \ \}.$$

Вычисление вероятностей наступления событий частного вида (суммы, произведения двух событий и т.п.) значительно упрощается, если использовать свойства вероятностной меры.

Теорема 1. Если событие В содержится в событии А, то

$$P(B) \le P(A), \ P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

Теорема 2 (сложения вероятностей): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Следствие. Если события А и В несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Предположим, что в ходе вероятностного эксперимента произошло некоторое событие В. Эта информация может повлиять на вероятности появления других событий, связанных с событием В. Например, в урне находится пять белых и пять черных шаров. Наудачу выбран один шар (событие В). Если теперь нас интересует вероятность того, что из девяти оставшихся шаров выбран, к примеру, белый шар, то она естественным образом зависит от того, каким было событие В. Поэтому вводится понятие условной вероятности появления события А при условии, что событие В произошло.

Определение. Пусть А и В произвольные события, причем $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью наступления события А при условии, что событие В произошло, называется число $P(A|B)$, определяемое формулой $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Аналогично $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Из приведенных определений вытекает следующая

Теорема 3 (умножения вероятностей):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

События А и В называются *независимыми*, если $P(A) = P(A|B)$ и $P(B) = P(B|A)$. Для независимых событий теорема умножения вероятностей принимает вид $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (называемые гипотезами) образуют полную группу событий, т.е. они попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$) и их объединение совпадает с пространством элементарных событий:.

$$P(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) = P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = P(\Omega) = 1.$$

Причем некоторое событие А может произойти только одновременно с одним из этих событий. Вероятности этих событий $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A|H_i)$, $i = \overline{1,n}$, предполагаются известными. Тогда вероятность интересующего нас события А определяется по следующей формуле, называемой *формулой полной вероятности:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Если в результате эксперимента событие А произошло, то может возникнуть вопрос: "Какова вероятность того, что это событие осуществилось одновременно с событием H_i, $i = \overline{1,n}$? Эта вероятность может быть найдена по *формулам Бейеса*:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)} = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 2. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9; на второй - 0,95; на третьей - 0.8; на четвертой - 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 события, состоящие в том, что нужный материал находится соответственно на первой, второй, третьей и четвертой базах.

Пусть А - событие, означающее, что только на одной базе не окажется нужного материала. Тогда имеем:

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$.

События A_1, A_2, A_3, A_4 независимы. События $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}$, $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4$, $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4$, $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$ несовместны.

По теореме сложения несовместных событий получаем

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) =$$
$$= P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) +$$
$$+ P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4).$$

По теореме умножения независимых событий имеем:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\overline{A_4}) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(A_4) +$$
$$+ P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) + 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}6 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}95) \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 + (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}4866.$$

Пример 3. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1% бракованных, со второго - 0,2%, с третьего - 0,25%, с четвертого - 0,5%. Производительности их относятся как 4 : 3 : 2 : 1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Решение. Пусть А - событие, состоящее в том, что взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Рассмотрим четыре гипотезы: H_1, H_2, H_3, H_4, заключающиеся в том, что деталь изготовлена соответственно на первом, втором, третьем и четвертом станках. По условию задачи требуется найти вероятность $P(H_2 | A)$.

По формуле Бейеса имеем: $P(H_2 | A) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)}$, где вероятность

$P(A)$ вычисляется по ***формуле полной вероятности*** $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A | H_i)$.

Исходя из производительности станков находим вероятности $P(H_i)$, $H_i = \overline{1,4}$. Поскольку события H_1, H_2, H_3, H_4 образуют полную группу событий, то $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$.

Отсюда получаем $4P(H_1) + 3P(H_2) + 2P(H_3) + P(H_4) = 1$.

Следовательно, $P(H_1) = \dfrac{2}{5}$, $P(H_2) = \dfrac{3}{10}$, $P(H_3) = \dfrac{1}{5}$, $P(H_4) = \dfrac{1}{10}$.

Вероятность выпуска стандартной детали (с учетом данных задачи) на первом станке равна $P(A | H_1) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$; на втором станке - $P(A | H_2) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$; на третьем - $P(A | H_3) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$; на четвертом станке - $P(A | H_4) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

Подставляя полученные данные в формулу Бейеса, получаем

$$P(H_2 \mid A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}998}{0{,}4 \cdot 0{,}999 + 0{,}3 \cdot 0{,}998 + 0{,}2 \cdot 0{,}975 + 0{,}1 \cdot 0{,}995} \approx 0{,}3.$$

Задание 1

Варианты

1. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя первого станка равна 0,1; второго - 0,2; третьего - 0,15. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что из строя выйдут 2 станка.
2. В двух ящиках находятся детали двух типов. Из каждого ящика вынули по детали. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что среди двух вынутых деталей нет деталей второго типа.
3. По радиолинии передается сигнал в виде последовательности трех импульсов. Вероятность искажения каждого импульса равна 0,1. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что будут искажены два импульса.
4. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность ее поражения каждым стрелком равна 0,8. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что только один стрелок поразит мишень.
5. В телевизионном ателье имеется три кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равна 0,8; 0,85 и 0,9. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что хотя бы один кинескоп выдержит гарантийный срок.
6. Прибор состоит из трех узлов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого узла равна 0,85. Требуется: 1) записать пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что откажут два узла.
7. Из ящика, содержащего 5 деталей, из которых одно бракованное, наудачу последовательно извлекают по одной детали до появления бракованной. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что придется производить 2 серии извлечения деталей.
8. Телефонный коммутатор располагает номерами, состоящими из трех цифр: 5, 6, 7. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что телефонный номер будет оканчиваться цифрой 6.
9. От станции отправления одновременно выехали три автобуса, которые должны прибыть на станцию назначения в заданное время. Вероятность своевременного прибытия автобусов одинакова и равна 0,7. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что два автобуса опоздают.

10. Автомат изготавливает однотипные детали. Вероятность брака равна 0,02. На проверку берут 3 детали. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что все три детали будут небракованными.

Задание 2

Варианты

1. 30 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса. Студент может ответить только на 45 вопросов. Какова вероятность, что вытянутый студентом билет: 1) состоит из подготовленных вопросов; 2) содержит только один неподготовленный вопрос; 3) содержит хотя бы один неподготовленный вопрос?
2. На фабрике выпускается продукция некоторого вида. Первая машина производит 15%, вторая - 30%, третья - 55% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 2, 3 и 5%. Какова вероятность того, что случайно отобранное изделие будет бракованным?
3. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего первый станок - 0,9, второй - 0,8, третий - 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа: 1) ни один станок не потребует внимания, 2) два станка потребуют внимания; 3) хотя бы один станок потребует внимания.
4. Имеется три партии компьютеров, насчитывающие соответственно 25, 30 и 45 штук. Вероятности того, что компьютеры проработают без ремонта заданное время, равны соответственно 0,8;0,6 и 0,7. Наудачу выбранный компьютер проработал без ремонта заданное время. Найти вероятность того, что этот компьютер принадлежит первой партии.
5. В собираемый механизм входят 2 одинаковые шестеренки. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с отклонениями по толщине зуба в плюс от среднего размера (заедание). У сборщика имеется 10 шестерен, из которых 3 - "плюсовые". Определить вероятность нарушения технических условий на сборке.
6. Прибор может работать в двух режимах - нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора. Вероятность выхода прибора из строя за 1 час в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном - 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за 1 час работы.
7. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8 и после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: 1) промахнется все 3 раза; 2) попадет 2 раза.
8. В ящике имеется 6 деталей, изготовленных заводом № 1, и 20 деталей, изготовленных заводом № 2. Сборщик последовательно вынимает из ящика детали. Найти вероятность того, что во второй раз будет извлечена деталь,

изготовленная заводом № 1.

9. Студенты выполняют контрольную работу в классе контролирующих машин. Работа состоит из трех задач и оценивается положительно, если решено не менее двух задач. Для каждой задачи зашифровано 5 различных ответов, из которых только 1 правильный. Студент выбирает наудачу ответы для каждой задачи. Какова вероятность того, что он получит положительную оценку?
10. Изделие проверяется на стандартность одним из трех контролеров. Вероятность того, что изделие попадает на проверку к первому контролеру, равна 0,25, ко второму - 0,35, к третьему - 0,4. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9, вторым - 0,8, третьим - 0,7. Случайно выбранное изделие оказалось стандартным. Найти вероятность, что оно проверено вторым контролером.

Тема 2. *Одномерные случайные величины (СВ) и их числовые характеристики*

1. Функция распределения и ее свойства.
2. Дискретные СВ.
3. Непрерывные СВ. Плотность вероятности.
4. Числовые характеристики одномерной СВ.
5. Основные вероятностные модели распределения СВ.

Определение. *Случайной величиной* X называется величина, которая в результате эксперимента может принимать некоторые значения, причем неизвестные до проведения эксперимента.

Случайная величина (СВ) X называется *дискретной*, если множество значений, которое она может принимать, является конечным или может быть пронумеровано натуральными числами (т.е. является счетным множеством).

Законом распределения дискретной СВ X называется совокупность пар чисел (x_i, p_i), где x_i - возможные значения СВ X, а p_i - вероятности, с которыми она принимает эти значения, причем $\sum_i p_i = 1$.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной СВ является таблица, которую называют рядом распределения.

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$ действительного переменного x, определяющая вероятность того, что СВ X примет в результате эксперимента значение, меньшее этого числа x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Основные свойства функции распределения:

1. $0 < F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. для любых x_1, x_2 таких, что $x_1 < x_2$, имеет место $F(x_1) < F(x_2)$.
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.
5. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$.

Функция распределения $F(x)$ для дискретной СВ X вычисляется по формуле $F(x) = \sum\limits_{i|x_i<x} p_i$, т.е. она разрывна и является ступенчатой функцией.

Непрерывной СВ X называют такую СВ, множество возможных значений которой - некоторый числовой интервал (или объединение интервалов).

Распределение непрерывной СВ X может так же определяться функцией $f(x)$ (плотность вероятности), которая определяется как $f(x) = F'(x)$.

Так как $f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$, то вероятностный смысл плотности вероятности состоит в том, что ее значение равно пределу отношения вероятности попадания СВ X в интервал $[x, x+\Delta x]$ к длине этого интервала Δx при стремлении последнего к нулю. Функция распределения и плотность вероятности связаны между собой следующими соотношениями:

$$f(x) = F'(x),\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Основные свойства плотности вероятности $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, т.е. площадь под кривой $y = f(x)$ равна 1.
3. $P(a < X < b) = \int_{b}^{a} f(x)dx$.

Математическим ожиданием $M(X)$, (m_x) СВ X называется число, описывающее центр распределения СВ X, вычисляемое по формуле

$$M(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i} x_i p_i & - \textit{для дискретной СВ } X; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & - \textit{для непрерывной СВ } X. \end{cases}$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(c) = C$, где C - const.
2. $M(cX) = C \cdot M(X)$.
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где СВ X и СВ Y взаимно независимые.
5. Если $a \le X \le b$, то $a \le M(X) \le b$.

Дисперсией $D(X)$ *СВ* X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Справедлива формула $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_i [x_i - M(X)]^2 p_i - \text{для дискретной } CB\ X;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx - \text{для непрерывной } CB\ X\end{cases}$$

или

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i^2 p_i - [M(X)]^2 - \text{для дискретной } CB\ \ X;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 - \text{для непрерывной } CB\ X.\end{cases}$$

Средним квадратическим отклонением СВ X называется арифметический корень из дисперсии $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеивание СВ вокруг ее среднего значения.

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C - const.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, где СВ X и Y независимы.

<u>Пример 4</u>. Непрерывная СВ X распределена по закону

$$f(x)=\begin{cases}0, \quad x \notin (0, \frac{\pi}{4}];\\ a\cos 2x, x \in (0, \frac{\pi}{4}].\end{cases}$$

Найти a, $F(x)$, $M(X)$.

Решение. 1). Используя свойство плотности вероятности, получаем равенство

$$a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx = 1 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2.$$

Итак,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, \frac{\pi}{4}]; \\ 2\cos 2x, & x \in (0, \frac{\pi}{4}]. \end{cases}$$

2). F(x) будем находить, пользуясь соотношением $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

а) $x \in (-\infty; 0] \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0;$

б) $x \in (0; \pi/4] \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_0^x 2\cos 2x dx = \sin 2x;$

в) $x \in (\frac{\pi}{4}; +\infty) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} 0 \cdot dx =$

$$= \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin 2x, & x \in (0, \frac{\pi}{4}]; \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3). $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = 2\cos 2x dx, & v = \sin 2x \end{vmatrix} =$

$$= x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Задание 3
Варианты

1. Непрерывная СВ X распределена по закону

$$f(x)=\begin{cases}3\cos(ax), & x\in[-\frac{\pi}{2a};\frac{\pi}{2a}];\\ 0, & x\notin(-\frac{\pi}{2a};\frac{\pi}{2a}).\end{cases}$$

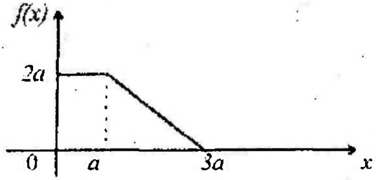
Найти *a*, *F(x)*, *M(X)*. Подобрать такое x^*, чтобы $P(X > x^*) = \frac{1}{4}$.

2. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, наугад извлекают четыре шара. Составить закон распределения дискретной СВ X - числа вынутых черных шаров. Найти *F(x)*, *M(X)* и *D(X)*. Построить график функции *F(x)*.
3. Плотность вероятности СВ X задана выражением

$$f(x)=\begin{cases}ax^2, & x\in[0;2];\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$$

Найти *a*, *F(X)*, *D(X)*. Построить графики *f(x)* и *F(x)*.
Найти $P(|X - M(X)| < 0{,}5)$.

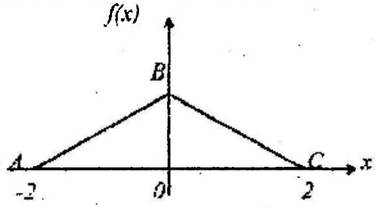
4. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка - 0,7, для второго - 0,8. Построить ряд распределения СВ X - общего числа попаданий в мишень. Найти *F(x)*, *D(X)* и построить график функции F(*x*).
5. График плотности вероятности случайной величины X изображен на рисунке.



Найти: 1) значение *a*; 2) выражение плотности *f(x)* и функции распределения *F(x)*; 3) значение *M(X)*; 4) *P(X > 0,5)*.

6. Самолет, имея на борту 6 бомб, заходит на цель и сбрасывает бомбу до первого попадания (или пока не израсходует все бомбы). Составить закон распределения СВ X - числа израсходованных бомб, если вероятность попадания при каждом заходе на цель равна 0,7. Найти *F(x)*, *M(X)* и *D(X)*. Построить график функции *F(x)*.

7. СВ распределена по закону Симпсона (см. рисунок).



Требуется: 1) найти ординату вершины B треугольника ABC, 2) записать формулы для $f(x)$, $F(x)$; 3) построить график $F(x)$; 4) вычислить $D(X)$ и $P(X > 0{,}5)$.

8. В группе из шести изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое проверяют. Построить ряд распределения СВ X - числа проверенных изделий. Найти $F(x)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график функции $F(x)$.

9. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$.

Требуется: а) найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$;
б) найти вероятность выполнения неравенства $x > \sqrt{3}$;
в) определить $M(X)$.

10. Плотность вероятности СВ X задана выражением

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x \notin [0, \dfrac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, определить $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

Тема 3. *Многомерные случайные величины*

1. *Дискретные двумерные случайные величины (СВ).*
2. *Функция распределения двумерной СВ и ее свойства.*
3. *Непрерывные многомерные СВ. Плотность распределения двумерной СВ, ее свойства и вероятностный смысл.*
4. *Распределение составляющих двумерной СВ.*
5. *Условные распределения составляющих, зависимые и независимые СВ.*
6. *Двумерное нормальное распределение. Модельное уравнение регрессии.*

Часто результат опыта описывается не одной СВ X, а несколькими СВ: X_1, X_2, ..., X_n. В этом случае принято говорить, что указанные СВ образуют систему $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Систему двух СВ(X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки (X, Y) в область D, принято обозначать в виде $(X, Y) \subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных СВ может быть задан с помощью табл. 1.

Таблица 1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
.	.	.	.	.
x_n	p_{n1}	p_{n2}	..	p_{nm}

где $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$. При этом $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

<u>Определение</u>. *Функцией распределения или "совместной" функцией распределения F(x, y) системы двух СВ(X, Y)* называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$, $Y < y$. То есть $F(x, y) = P(X < x \cap Y < y)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x, y)$ - неубывающая функция обоих аргументов, т.е.
   если $x_2 > x_1$, то $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$; если $y_2 > y_1$, то $F(x, y_2) > F(x, y_1)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0.$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1.$
4. $F(x, +\infty) = P(X < x \cap Y < +\infty) = P(X < x) = F_1(x)$;
   $F(+\infty, y) = P(X < +\infty \cap Y < y) = P(Y < y) = F_2(y)$.
   Здесь $F_1(x)$ - функция распределения СВ X;
   $F_2(y)$ - функция распределения СВ Y.
5. $P(a_1 \leq X < a_2 \cap b_1 \leq Y < b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$.

Для системы дискретных СВ функция распределения $F(x, y)$ находится по формуле $F(x,y) = \sum_{i:x_i<x} \sum_{j:y_j<y} p_{ij}$.

Закон распределения системы непрерывных СВ(X, Y) может быть задан с помощью функции плотности распределения $f(x, y)$.

Система двух СВ(X, Y) является непрерывной, если ее функция распределения $F(x, y)$ имеет смешанную вторую производную $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ (за исключением, быть может, конечного или счетного множества точек).

Определение. *Плотностью распределения $f(x, y)$ системы двух непрерывных СВ(X, Y)* называвется предел отношения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник $R_{\Delta x \Delta y}$ со сторонами Δx, Δy, примыкающий к точке (x, y), к площади этого прямоугольника, при условии что Δx и Δy стремятся к нулю:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\big((X,Y) \subset R_{\Delta x \Delta y}\big)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x \cap y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x,y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Функция плотности распределения обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) > 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.
3. $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$.
4. $P((X, Y) \subset D) = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Зная закон распределения системы $CB(X, Y)$, можно найти законы распределения составляющих величин X и Y.

Рассмотрим систему двух дискретных $CB(X, Y)$, закон распределения которой задан в виде матрицы распределения (табл. 1). Тогда законы распределения составляющих X и Y имеют вид

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_{x_1}	p_{x_2}	...	p_{x_n}

Y	y_1	y_2	...	y_m
p	p_{y_1}	p_{y_2}	...	p_{y_m}

где

$$P_{x_i} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ i = \overline{1,n}; \qquad P_{y_j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ j = \overline{1,m}.$$

Для системы двух непрерывных СВ справедливы формулы:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dudy, \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,v)dxdv \quad ,$$

где $F_1(x)$ - функция распределения СВ X; $F_2(y)$ - функция распределения СВ Y.

Рассмотрим обратную задачу.

Определение. Две случайные величины называются *независимыми*, если для любых $(x, y) \in \Omega$ справедливо равенство $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

Для системы двух дискретных СВ X и Y необходимое и достаточное условие независимости X и Y имеет вид $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

В случае непрерывных СВ, входящих в систему, данное условие записывают в виде $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Если случайные величины, образующие систему, зависимы, то недостаточно знать законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Требуется еще знать условный закон распределения одной из них.

Определение. *Условным законом распределения одной из составляющих СВ(X, Y)* называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

В общем случае функция распределения $F(x, y)$ системы двух зависимых СВ может быть записана в виде

$F(x, y) = P(X < x \cap Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y | X < x) = F_1(x) \cdot P(Y < y | X < x)$.

Условная вероятность $P(Y < y | X < x)$ - вероятность события $(Y < y)$ при условии, что величина X приняла значение, меньшее, чем x, называется *условной функцией распределения СВ Y при условии* $(X < x)$: $F_2(y | X < x) = P(Y < y | X < x)$.

Следовательно, имеем: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y | X < x)$,

$$F(x, y) = F_2(y) \cdot F_1(x | Y < y).$$

Для плотности распределения системы двух зависимых непрерывных СВ(X, Y) справедливы формулы:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y | x), \qquad f_1(x | y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)},$$

$$\Rightarrow$$

$$f(x,y) = f_2(y) \cdot f_1(x | y), \qquad f_2(y | x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Математические ожидания и дисперсия составляющих *СВ X* и *СВ Y* определяются по формулам:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij};$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p_{y_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M(X))^2\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^2 p_{ij}-M^2(X);$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j-M(Y))^2\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j^2 p_{ij}-M^2(Y).$$

Непрерывные СВ X и Y:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dydx;$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy-M^2(X);$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-M(Y))^2f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy-M^2(Y).$$

Связь между составляющими X и Y системы *СВ(X, Y)* описывается *ковариацией*

$$K_{xy}=cov(X,Y)=M((X-M(X))\cdot(Y-M(Y)))=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y).$$

Расчетные формулы для ковариации K_{xy} имеют вид

$$K_{xy}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_{ij}-M(X)\cdot M(Y)\ -\ \textit{для дискретных } CB(X,Y);\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy-M(X)\cdot M(Y)\ -\ \textit{для непрерывных } CB(X,Y).\end{cases}$$

В случае независимых СВ X и Y ковариация равна нулю ($K_{xy}=0$).

Коэффициент корреляции r_{xy} характеризует степень вероятностной зависимости составляющих X и Y и вычисляется по формуле

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Пример 5. Два студента наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров (шары в урну не возвращаются). СВ X - число белых шаров у первого студента, СВ Y - у второго. Первым выбирает шар первый студент. Необходимо:

1. Написать закон распределения двумерной *CB(X, Y)*.
2. Написать безусловные законы распределения составляющих X и Y.
3. Определить, зависимы или независимы СВ X и Y.
4. Написать условный закон распределения составляющей X при условии, что Y = 1.
5. Найти коэффициент корреляции.

Решение. 1. Составим закон распределения СВ(X, Y).

$$P(X=0)=\frac{6}{10}. \quad P(Y=0\mid X=0)=\frac{5}{9},\ P(Y=1\mid X=0)=\frac{4}{9}.$$

Т.е. $P(X=0\cap Y=0)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$ $\quad P(X=0\cap Y=1)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}.$

$$P(X=1)=\frac{4}{10}. \quad P(Y=0\mid X=1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}, \quad P(Y=1\mid X=1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$P(X=1\cap Y=0)=\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}. \quad P(X=1\cap Y=1)=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}.$$

Матрица распределения имеет вид

X \ Y	0	1
0	1/3	4/15
1	4/15	2/15

2. Законы распределения составляющих:

X	0	1
p_i	3/5	2/5

Y	0	1
p_i	3/5	2/5

3. Поскольку $P(X=1\cap Y=1)=\frac{2}{15}$, а $P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}\neq\frac{2}{15}$,

то составляющие X и Y СВ(X, Y) являются зависимыми.

4. Найдем условный закон распределения составляющей X при условии, что Y = 1.

$$P(X=0\cap Y=1)=\frac{P(X=0\cap Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{4\cdot 5}{2\cdot 15}=\frac{2}{3}.$$

$$P(X=1\cap Y=1)=\frac{P(X=1\cap Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{2\cdot 5}{2\cdot 15}=\frac{1}{3}.$$

5. Найдем коэффициент корреляции $r_{xy}=\dfrac{m_{xy}-m_x m_y}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.

$$m_x=0\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5};\; m_y=0\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5};$$

$$m_{xy}=0\cdot 0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot 1\cdot\frac{4}{15}+1\cdot 0\cdot\frac{4}{15}+1\cdot 1\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{15}.$$

$$D_x=M(X^2)-m_x^2=0\cdot\frac{3}{5}+1^2\cdot\frac{2}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2}{5}-\frac{4}{25}=\frac{6}{25},\quad \sigma_x=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{6}}{5}.$$

$$D_y=M(Y^2)-m_y^2=\frac{6}{25},\qquad \sigma_y=\frac{\sqrt{6}}{5}.$$

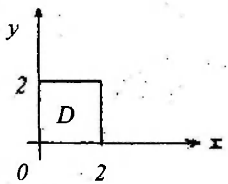
$$r_{xy}=\frac{\frac{2}{15}-\frac{4}{25}}{\frac{6}{25}}=\frac{\frac{10-12}{75}}{\frac{6}{25}}=-\frac{2\cdot 25}{75\cdot 6}=-\frac{1}{9}.$$

Пример 6. Плотность вероятности двумерной $CB(X,Y)$ задана выражением

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{при } 0<x<2,\, 0<y<2;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент a; 2) $f_1(x)$, $f(y\,|\,x)$; 3) вероятность попадания двумерной $CB(X, Y)$ в треугольник D, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$.

Решение. Построим область D.



1). Коэффициент a определяем из условия нормировки:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=1.$$

В нашем случае имеем: $\iint\limits_D a(x+y)dxdy = 1$.

Перейдя к повторным интегралам, получаем:

$$a\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^2 (x+y)dy\right)dx = 1, \quad a\int\limits_0^2 (2x+2)dx = 1, \quad 8a = 1, \quad т.е. \quad a = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, имеем:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & при \quad 0 \le x \le 2; \quad 0 \le y \le 2; \\ 0 & при \ любых \ других \ значениях \ x \ и \ y. \end{cases}$$

2).Найдем плотность вероятности $f_1(x)$ СВ X по формуле $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$.

В нашем случае имеем: $f_1(x) = \begin{cases} \int\limits_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dy & при \quad 0 \le x \le 2\ ; \\ 0 & x < 0 \ или \ x > 2. \end{cases}$

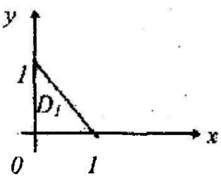
После вычисления $\int\limits_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dy$ получаем: $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x < 0, \ x > 2. \end{cases}$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{x+y}{2(x+1)}, & 0 < y < 2 \ (0 \le x \le 2); \\ 0, & y < 0, \ y > 2. \end{cases}$$

3).Вероятность попадания $СВ(X, Y)$ в треугольник D найдем по формуле

$$P((X,Y) \subset D) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Сделаем чертеж.



Расставляя пределы интегрирования, получаем:

$$P\big((X,Y)\in D_1\big)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x}\frac{1}{8}(x+y)dy\right)dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{24}.$$

Задание 4

В вариантах 2, 4, 6, 8, 10 необходимо:

1. Написать закон распределения двумерной *СВ(X, Y)*.
2. Написать безусловные законы распределения составляющих X и Y
3. Определить,зависимы или независимы СВ X и Y.
4. Написать условный закон распределения составляющей X при условии, что Y = 1.
5. Найти коэффициент корреляции.

Варианты

1. Двумерная *СВ(X, Y)* равномерно распределена внутри круга радиуса a с центром в начале координат. Требуется найти $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f(x\,|\,y)$, $f(y\,|\,x)$.

2. Подбрасывается один раз игральная кость. Составляющая X принимает значение, равное 1, если выпадет четное число очков, и X = -1 в противном случае. Составляющая Y принимает значение, равное 1, если число очков делится на 3. В противном случае Y = -1.

3. Двумерная *СВ(X, Y)* имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{b}{\pi^2(4+x^2)(2+y^2)}.$$

Найти: 1) величину b; 2) функцию распределения $F(x, y)$; 3) вероятность попадания *СВ (X, Y)* в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

4. Студенты наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 3 белых и 1 черный шар. Составляющая X - число белых шаров у первого студента, составляющая Y - число белых шаров у второго студента. Выбор шаров производится без возвращения. Первым извлекает шар первый студент

5. Двумерная *СВ(X, Y)* равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 1$. Найти $D(X)$, $D(Y)$, K_{xy}, r_{xy}.

6. Подбрасывается один раз игральная кость. Составляющая X равна 0, если число выпавших очков ≤ 3, в противном случае X = 1. Составляющая Y равна 0, если число выпавших очков > 2, в противном случае Y = 1.

7. Плотность распределения вероятности двумерной *СВ(X, Y)* имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases} axy & \text{в области } D; \\ 0 & \text{вне этой области,} \end{cases}$$

где D - треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Найти: 1) коэффициент a; 2) $M(X)$, $M(Y)$, σ^2_x, σ^2_y, r_{xy}.

8. Два студента наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 3 белых и 1 черный шар. Составляющая X - число белых шаров у первого студента, а составляющая Y - число белых шаров у второго студента. Первым извлекает шар первый студент и после извлечения возвращает шар в урну.

9. Система СВ (X, У) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{в области } D; \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

где область D - прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 5$.

Требуется: 1) определить коэффициент a; 2) найти $f_1(x)$, $f_2(y)$; 3) вычислить вероятность попадания двумерной *СВ (X, У)* в квадрат, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.

10. Подбрасывается один раз игральная кость. Составляющая X = 0, если число выпавших очков ≤ 4, в противном случае X = 1. Составляющая $Y = 0$, если число выпавших очков < 3, в противном случае Y = 1.

Тема 4. *Предельные теоремы теории вероятности*

1. Неравенство и теорема Чебышева.
2. Теорема Бернулли.
3. Понятие о центральной предельной теореме.
4. Теорема Муавра-Лапласа.
5. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Тема 5. *Элементы математической статистики. Статистическая оценка параметров распределения*

1. Генеральная и выборочные совокупности.
2. Статистическое распределение случайной величины.
3. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение статистических рядов.
4. Классификация точечных оценок. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.
5. Доверительная вероятность, доверительный интервал. Интервальные оценки параметров распределения.

6. Статистический критерий значимости проверки нулевой гипотезы.
7. Статистическая проверка гипотез о параметрах распределения (математическом ожидании, равенстве математических ожиданий, дисперсии).
8. Статистическая проверка непараметрических гипотез. Критерии согласия χ^2 и Колмогорова.
9. Статистическая зависимость. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.
10. Эмпирический коэффициент корреляции и его свойства.

Между составляющими двумерной *СВ (X, Y)* может существовать зависимость, не носящая функциональный характер. В этом случае мы не можем говорить о том, какое значение принимает одна составляющая, если вторая приняла некоторое конкретное значение, но мы можем говорить о законе распределения (условном) одной составляющей, если известно, какое значение приняла вторая. Такая зависимость называется *статистической.*

В практических приложениях при исследовании статистической зависимости СВ X и Y ограничиваются рассмотрением зависимости между значениями одной из них *X(Y)* и условным математическим ожиданием другой $M(Y/X = x) = \bar{y}(x) = y_x$ $(M(X/Y = y) = \bar{x}(y))$.

Уравнение $M(Y/X = x) = \bar{y}(x)$ называется *модельным уравнением регрессии Y на X*, а $M(X/Y = y) = \bar{x}(y)$ - *модельным уравнением регрессии X на Y.* Если эта зависимость является линейной, т.е.

$$\bar{y}(x) = a + bx \tag{1}$$

или

$$x(y) = c + dy, \tag{2}$$

то регрессия называется *линейной.*

Поскольку модельное уравнение регрессии неизвестно, то для его оценки используется эмпирическое уравнение регрессии, которое находится по результатам выборки (x_i, y_i), $i = 1,..., n$, объема n методом наименьших квадратов.

В случае линейной регрессии параметры a и b (c и d) выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i, $i = 1,...,$ n, от их значений, полученных из уравнения регрессии $\bar{y}(x_i) = a + bx_i$, была минимальной. То есть параметры a и b (c и d) выбирают так, чтобы они минимизировали функцию.

$$S(a;b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (a + bx_i)\right)^2 .$$

Используя необходимые условия экстремума $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$; $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, получают систему уравнений

$$\begin{cases} b\overline{X} + a = \overline{Y}; \\ b\overline{X^2} + a\overline{X} = \overline{XY}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$; $\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

После подстановки в формулу (1) значений a и b из (3) она примет вид

$$\overline{y_x} - \overline{Y} = \overline{r}\,\frac{\overline{\sigma_y}}{\overline{\sigma_x}}(x - \overline{X}),$$

где

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2};\ \overline{\sigma_y} = \sqrt{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2};\ \overline{r} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{\sigma_x}\,\overline{\sigma_y}}; \qquad (4)$$

$\overline{Y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$, а $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{XY}, \overline{X^2}$ такие же, как и в (3).

Число $\overline{r}$ является *выборочным коэффициентом корреляции*, при этом число $\overline{r}^2$ называется *коэффициентом детерминации*, который определяет долю рассеивания наблюдаемых значений зависимой переменной y_i, $i = \overline{1,n}$, относительно значений, полученных из эмпирического уравнения регрессией Y на X (наличием линейной статистической зависимости СВ Y от СВ X). Остальная доля отклонений может быть вызвана либо случайными ошибками эксперимента, либо тем, что линейная регрессионная модель плохо согласуется с экспериментальными данными.

В качестве примера рассмотрим задачу из задания 5, исходные данные возьмем для варианта 11* (см.ниже).

Решение. 1). Зависимость между X и Y будем искать в виде $\overline{y}(x) = a + bx$. Параметры a и b модели найдем по методу наименьших квадратов из системы (3):

$$\begin{cases} b\overline{X} + a = \overline{Y}; \\ b\overline{X^2} + a\overline{X} = \overline{XY}. \end{cases}$$

Тогда по формуле Крамера

$$b = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \frac{29{,}02 - 6{,}65\cdot 4{,}1}{47{,}043 - (6{,}65)^2} = 0{,}622.$$

Из первого уравнения $a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 4{,}1 - 0.622 \cdot 6.65 = -0.038$.

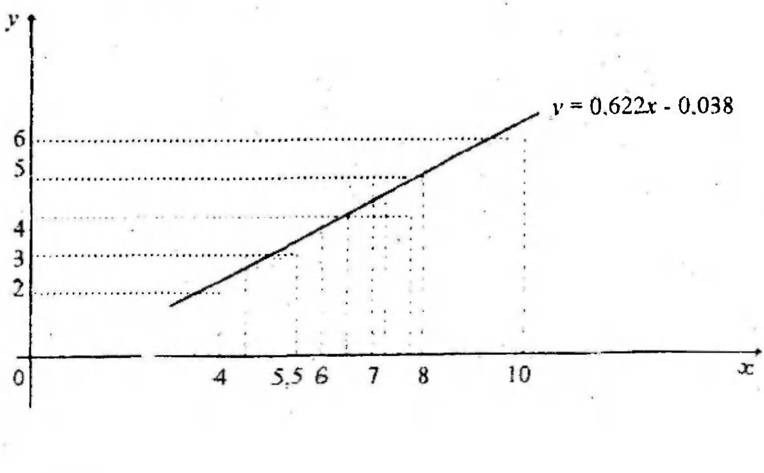
Итак, уравнение прямой линии регрессии Y на x: $\overline{y_x} = 0{,}622x - 0{,}038$.

Вспомогательные вычисления соберем в таблицу.

x_i	4	4,5	5,5	6	6,5	7	7,2	7,8	8	10	$\Sigma = 66{,}5$	$\overline{X} = 6{,}65$
y_i	2	3	3	4	4	5	5	4	5	6	$\Sigma = 41$	$\overline{Y} = 4{,}1$
$x_i y_i$	8	13,5	16,5	24	26	35	36	31,2	40	60	$\Sigma = 290{,}2$	$\overline{XY} = 29{,}02$
x_i^2	16	20,25	30,25	36	42,25	49	51,84	60,84	64	100	$\Sigma = 470{,}43$	$\overline{X^2} = 47{,}04$
y_i^2	4	9	9	16	16	25	25	16	25	36	$\Sigma = 181$	$\overline{Y^2} = 18{,}1$

2).Построим корреляционное поле и график $\overline{y_x} = 0{,}622x - 0{,}038$.

$y(4) = 2{,}45$, $y(10) = 6{,}182$.



3). Вычислим коэффициент корреляции r по формуле (4) и коэффициент детерминации $\bar{r}^2$:

$$\bar{r} = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sqrt{\overline{X^2} - (\bar{X})^2} \cdot \sqrt{\overline{Y^2} - (\bar{Y})^2}} = \frac{29{,}02 - 6{,}65 \cdot 4{,}1}{\sqrt{47{,}043 - (6{,}65)^2} \cdot \sqrt{18{,}1 - (4{,}1)^2}} = 0{,}92.$$

Коэффициент детерминации

$$\bar{r}^2 = (0{,}92)^2 = 0{,}85.$$

Поэтому 85% рассеивания зависимой переменной Y объясняется линейной регрессией Y на X, а 15% рассеивания Y остались необъясненными. Эта доля рассеяния Y может быть вызвана либо случайными ошибками эксперимента, либо тем, что линейная регрессионная модель не очень хорошо согласуется с экспериментальными данными.

4). Если е = 7,5; то $\overline{y_x} = 0{,}622 \cdot 7{,}5 - 0{,}038 = 4{,}627$, т.е. при энерговооруженности е = 7,5 тыс.кВт·час в год/ч можно ожидать среднюю производительность у = 4,627 (тыс.изд. в год/ч).

Задание 5

Компания контролирует $n = 10$ фабрик, выпускающих однородную продукцию. В табл. 2 приведены данные о производительности труда Y_i (тыс.изд. в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики X_i (тыс.кВт·ч в год на одного работающего), $i = 1,...,n$.

Требуется:

1) установить зависимость между X и Y (выбирать линейную модель, параметры модели находить по методу наименьших квадратов);
2) построить корреляционное поле и график линии регрессии;
3) вычислить коэффициенты корреляции и коэффициент детерминации (пояснить их смысл);
4) какую среднюю производительность труда можно ожидать на фабрике, энерговооруженность которой равна l (см. табл. 2)?

Таблица 2

№ фабрики / Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*l*
1	X_i	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	11	10,5
	Y_i	2	4	4	5	6	7	7	8	9	10	
2	X_i	9,4	10	10,5	11	11,4	12	12,6	13,6	14	15	12,4
	Y_i	8	8	7	8	8	9	10	11	11	12	
3	X_i	7	7,3	8	8,3	9	9,7	10	11	11,7	12	9,5
	Y_i	2	2	3	2	4	4	5	5	6	6	
4	X_i	2	2,5	3	3,4	3,6	4	4,5	5	5,2	6,8	6
	Y_i	3	2	2	3	3	4	4	4,5	4,5	5	
5	X_i	10	12	12,5	13	14	14,5	15,2	15,8	16	16,5	15,5
	Y_i	7	6	7	8	7	8	10	11	11	12	
6	X_i	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	12	9,8
	Y_i	4	6	6	7	7	9	9	8	11	12	
7	X_i	10,4	11	11,5	12	12,6	13	13,4	14,6	15	16	14
	Y_i	8	8	7	7	8	10	9	11	12	13	
8	X_i	6	6,3	7	7,3	8	8,7	9	9,5	10,7	11	8,3
	Y_i	12	12	12	11	13	13	14	14	15	16	
9	X_i	3	3,5	4	4,6	4,8	5	5,5	6	6,4	7,2	4,2
	Y_i	4	3	3	3	4	4	5	5,5	5,5	6	
10	X_i	11	12	13,5	14	15	15,5	16,2	16,8	17	17,5	14,5
	Y_i	7	7	8	9	8	9	11	12	12	12	
11*	X_i	4	4,5	5,5	6	6,5	7	7,2	7,8	8	10	7,5
	Y_i	2	3	3	4	4	5	5	4	5	6	

Тема 6 . *Марковские случайные процессы*

1. *Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем. Матрица вероятностей переходов.*
2. *Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.*
3. *Граф состояний.*
4. *Предельные вероятности состояний.*

Пусть некоторая система S может находиться в одном из состояний S_1, S_2, ..., S_n и в дискретные моменты времени t_1, t_2, ..., t_k может переходить из состояния в состояние. Обозначим через $S(t_k)$ состояния системы в момент времени t_k,

$S(t_k) \in \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ и через $p_{ij}(k)$ обозначим условную вероятность перехода системы из состояния S_i, в котором она находилась в момент времени t_{k-1}, в состояние S_j в момент времени t_k:

$$P_{ij}(k) = P(S(t_k) = S_j | S(t_{k-1}) = S_i).$$

Говорят, что в системе протекает *марковский процесс (определена цепь Маркова)*, если $P_{ij}(k)$ не зависит от того, в каком состоянии система находилась в предыдущие моменты времени t_{k-2}, t_{k-3}, ... При этом цепь Маркова называется *однородной*, если $P_{ij}(k)$ не зависит от k, т.е. условная вероятность перехода из S_i в S_j не зависит от того, в какой момент времени это происходит.

Матрица

$$P = (p_{ij})_{i=1,...,n}^{j=1,...,n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

называется *матрицей вероятностей перехода.*

Зная матрицу P, можно построить граф состояний системы:

1) количество вершин графа равно числу состояний n;

2) если $p_{ij} \neq 0$, то вершины $\boxed{S_i}$ и $\boxed{S_j}$ соединяются дугой, помеченной p_{ij}:

$$\boxed{S_i} \xrightarrow{p_{ij}} \boxed{S_j}.$$

Матрица (5) задает условные вероятности перехода из состояния в состояние за 1 шаг: $P = P(1)$. При этом матрица $P(m)$ условных вероятностей перехода из состояния в состояние за m шагов находится по формуле $P(m) = P^m$.

Если задана матрица-строка v_0 вероятностей состояний системы в начальный момент времени, то вектор

$$\vec{v}_m = \vec{v}_0 \cdot P(m) = \vec{v}_0 \cdot P^m \quad (6)$$

задает вероятности состояний системы через m шагов.

Марковский процесс называется регулярным, если система может перейти в любое состояние за конечное число шагов, т.е. если $\exists m \in N$ такое, что все элементы матрицы P^m строго положительны.

Если марковская цепь регулярна, то при $m \to +\infty$ она независимо от начального состояния будет функционировать в установившемся режиме, т.е. вероятности состояний системы в этом режиме не зависят от начального состояния. Такие вероятности, $\vec{v}_{\text{пр}} = (p_1, ..., p_n)$, называются *предельными или финальными* и могут быть найдены из системы уравнений

$$(p_1 \ \dots \ p_n)\cdot P = (p_1 \ \dots \ p_n) \quad \text{или}$$
$$(p_1 \ \dots \ p_n)(P - E) = 0, \qquad (7)$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ - } \textit{единичная матрица.}$$

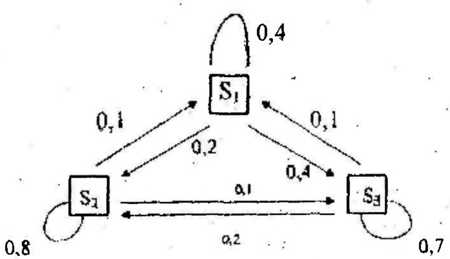
Для нахождения $\vec{v}_{ф}$ решают систему (7) с дополнительным условием $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Пример 7. Заданы матрица вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\vec{v}_0$ начального распределения вероятностей.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0).$$

Требуется: 1) построить граф состояний системы; 2) найти вектор v_2 распределения вероятностей p состояний системы через 2 шага; 3) найти финальные вероятности.

Решение. 1). Система может находиться в одном из трех состояний: S_1, S_2, S_3, при этом элемент p_{ij} матрицы P задает вероятность перехода из состояния S_i в S_j за один шаг. Поэтому граф состояний системы имеет вид



2). Вектор $\vec{v}_2$ распределения вероятностей состояний системы через 2 шага находится по формуле (6): $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 \cdot P^2$. Применяя правило умножения матриц, получим:

$$\vec{v}_2 = \left[(0{,}5;0{,}5;0)\cdot\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}=$$

$$=(0{,}25;\ \ 0{,}5;\ \ 0{,}25)\cdot\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}=(0{,}175;0{,}5;0{,}325).$$

3). Для нахождения финальных вероятностей (p_1, p_2, p_3) решим систему уравнений (7)

$$(p_1, p_2, p_3)\cdot(P-E)=(0,\ 0,\ 0);$$

$$(p_1,p_2,p_3)\cdot\left[\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=(0,0,0);$$

$$(p_1,p_2,p_3)\cdot\begin{pmatrix}-0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}3\end{pmatrix}=(0,0,0).$$

Умножая матрицы, получим систему

$$\begin{cases}-0{,}6p_1+0{,}1p_2+0{,}1p_3=0;\\ 0{,}2p_1-0{,}2p_2+0{,}2p_3=0;\\ 0{,}4p_1+0{,}1p_2-0{,}3p_3=0.\end{cases}$$

При этом необходимо учесть дополнительное условие $p_1+p_2+p_3=1$.

Отбросим третье уравнение, т.к. оно является следствием двух первых (сумма двух первых уравнений дает третье). Получим систему

$$\begin{cases}-0{,}6p_1+0{,}1p_2+0{,}1p_3=0;\\ 0{,}2p_1-0{,}2p_2+0{,}2p_3=0;\\ p_1+p_2+p_3=1.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение на "-10", а второе на "5", получим:

$$\begin{cases}6p_1-p_2-p_3=0;\\ p_1-p_2+p_3=0;\\ p_1+p_2+p_3=1.\end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера, тогда.

$$p_1=\frac{\begin{vmatrix}0&-1&-1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6&-1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{2}{14};\quad p_2=\frac{\begin{vmatrix}6&0&-1\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6&-1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{7}{14};\quad p_3=\frac{\begin{vmatrix}6&-1&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6&-1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{5}{14}.$$

Поэтому вектор финальных вероятностей $v_\phi=\left(\frac{2}{14};\frac{7}{14};\frac{5}{14}\right).$

Задание 6

Заданы матрица $\bar P=(p_{ij})_{i=1,2,3}^{j=1,2,3}$ вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\bar v_0$ начального распределения вероятностей.

Требуется: 1) построить граф состояний системы; 2) найти вектор v_2 распределения вероятностей p состояний системы через 2 шага; 3) найти финальные вероятности.

Варианты

1. $P=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}2&0{,}1\\0{,}3&0{,}6&0{,}1\\0{,}3&0{,}2&0{,}5\end{pmatrix}$, $\bar v_o=(0{,}5,0,0{,}5)$.

2. $P=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}1&0{,}1\\0{,}2&0{,}7&0{,}1\\0{,}2&0{,}1&0{,}7\end{pmatrix}$, $\bar v_o=(0;0{,}5;0{,}5)$.

3. $P=\begin{pmatrix}0{,}6&0{,}3&0{,}1\\0{,}2&0{,}7&0{,}1\\0{,}2&0{,}3&0{,}5\end{pmatrix}$, $v_o=(0{,}2;0{,}3;0{,}5)$.

4. $P=\begin{pmatrix}0{,}6&0{,}2&0{,}2\\0{,}1&0{,}8&0{,}1\\0{,}1&0{,}2&0{,}7\end{pmatrix}$, $\bar v_o=(0;0{,}5;0{,}5)$.

5. $P=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}2&0{,}1\\0{,}1&0{,}8&0{,}1\\0{,}1&0{,}2&0{,}7\end{pmatrix}$, $\bar v_o=(0{,}2;0{,}5;0{,}3)$.

6. $P=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}2&0{,}5\\0{,}1&0{,}8&0{,}1\\0{,}1&0{,}2&0{,}7\end{pmatrix}$, $v_o=(0{,}5;0{,}5;0)$.

7. $P=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_o=(0,5;0,2;0,3)$. 8. $P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, $v_o=(0,5;0,5;0)$.

9. $P=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, $v_o=(0,5;0,5;0)$. 10. $P=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, $v_o=(0,5;0,5;0)$.

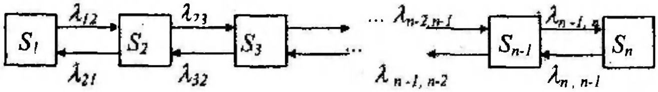
Тема 7. *Элементы теории массового обслуживания*

1. *Классификация систем массового обслуживания, их основные характеристики.*
2. *Входящий и выходящий поток требований.*
3. *Процесс "гибели и размножения".*
4. *Система массового обслуживания (СМО) с параллельными обслуживающими устройствами и ограниченной очередью.*
5. *СМО с отказами.*
6. *СМО с неограниченной очередью для ожидания.*
7. *Замкнутые СМО.*

Теория массового обслуживания изучает зависимость между характером потока заявок (требований), числом каналов (единицы обслуживания), их производительностью, правилами работы систем массового обслуживания (СМО) и эффективностью обслуживания.

В СМО происходит случайный процесс, что обусловлено случайным характером потока заявок и временем их обслуживания. Будем считать, что все потоки событий (потоки заявок, потоки обслуживания заявок и т.д.), переводящие СМО из состояния в состояние, являются пуассоновскими (тогда процесс, протекающий в системе, является марковским) и интервал времени T между поступлениями требований в СМО в этом потоке есть случайная величина, распределенная по показательному закону $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t>0$; λ - интенсивность потока событий. Обслуживание заявки продолжается в течение случайного времени $T_{обс.}$, распределенного по показательному закону $f(t)=\mu e^{-\mu t}$, $t>0$; μ – интенсивность обслуживания заявок.

При вычислении основных характеристик эффективности обслуживания СМО основываются на том, что марковский процесс, протекающий в них, является частным случаем процесса "гибели и размножения", т.е. граф состояний имеет вид



а также дифференциальные уравнеийя Колмогорова для этого процесса

$$\begin{cases} \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2; \\ \lambda_{23}p_2 = \lambda_{32}p_3; \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n; \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, \end{cases} \tag{8}$$

где p_i - предельная вероятность состояния S_i системы;

λ_{ij} - интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния S_i в состояние S_j.

При решении системы получаем, что предельная вероятность состояния S_k системы выражается через p_1:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k} \cdot \lambda_{k-2,k-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1} \cdot \lambda_{k-1,k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}} p_1 , \quad k = \overline{2,n} . \tag{9}$$

Из уравнения $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ находим p_1:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23} \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \cdot \ldots \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}}} . \tag{10}$$

СМО могут быть двух типов:

1. *Системы с отказами* - заявка, поступившая в систему, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает ее.
2. *Системы с ожиданием* - заявка, поступившая в систему, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не будет обслужена.

Будем обозначать через q относительную пропускную способность СМО, через А - абсолютную пропускную способность СМО.

1. *Одноканальная СМО с отказами.*

$$\begin{tikzcd} \boxed{S_0} \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_1} \arrow[l, shift left, "\mu"] \end{tikzcd},$$

где $\mu = \dfrac{1}{t_{обсл.}}$ - интенсивность обслуживания заявок.

Из (8) - (10) получаем

$$q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad Тогда \quad A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \mu = \frac{1}{t_{обс}}, \; P_{отк} = 1 - q,$$

где $P_{отк}$ - вероятность отказа (средняя доля необслуженных заявок среди поданных).

2. *Многоканальная СМО с отказами:*

$$\begin{tikzcd} \boxed{S_0} \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_1} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_2} \arrow[l, shift left, "2\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \ldots \arrow[l, shift left, "3\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_n} \arrow[l, shift left, "n\mu"] \end{tikzcd}$$

Из (8) - (10) получаем:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_o, \; k = \overline{2,n}\,; \; p_o = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ *– приведенная интенсивность заявок.*

Тогда

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad q = 1 - p_n, \quad A = \lambda q.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \ldots + n \cdot p_n$, либо $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu} = \rho(1 - p_n)$.

3. 1). *Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью (число мест в очереди m):*

$$\begin{tikzcd} \boxed{S_0} \arrow[r, bend left=50, no head, "\text{очереди нет}"] \arrow[r, shift left, "\lambda"'] & \boxed{S_1} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_2} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \ldots \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_{m+1}} \arrow[l, shift left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Из (8) - (10) получаем:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},\ p_1 = \rho \cdot p_0\ ,\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0\ ,\ldots,\ p_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot p_0. \qquad (11)$$

Если ρ = 1, то

$$p_0 = \frac{1}{m+2}.\ \text{Тогда}\ \ P_{отк} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}},\ \ q = 1 - P_{отк}.\ \ A = \lambda q.$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди:

$$\bar{r} = 1 \cdot p_2 + 2p_3 + \ldots + m \cdot p_{m+1}\ ,\ \ \text{либо}\ \ \bar{r} = \frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок под обслуживанием $\bar{\omega} = \dfrac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}$.

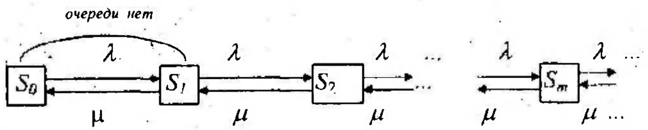
Среднее число заявок, связанных с системой: $\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega}$.

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{ож} = p_1 \cdot \frac{1}{\mu} + p_2 \cdot \frac{2}{\mu} + \ldots + p_m \cdot \frac{m}{\mu} \qquad \text{либо}\ \ \bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист} = \dfrac{\bar{r}}{\lambda} + \dfrac{a}{\mu}$.

2). Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью.



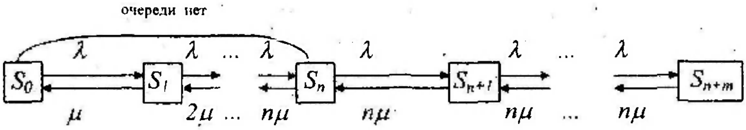
Из (11) при $m \to \infty$ получаем:

$$p_0 = 1-\rho,\quad p_1 = \rho(1-\rho),\quad \ldots,\quad p_m = \rho^m(1-\rho),\ \ldots\ .\qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Тогда $q = 1$, $A = \lambda q$, $\bar{r} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$, $\bar{k} = \bar{r} + \rho$, $\bar{t}_{ож} = \dfrac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$, $\bar{t}_{обсл} = \dfrac{1}{\mu}$,

$$\bar{t}_{сист} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}.$$

4. 1). *Многоканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью (число мест в очереди m).*



Из (8) - (10) следует:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}\right)^{-1}; \qquad (12)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \; p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ldots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Тогда $\quad P_{отк} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$, $q = 1 - P_{отк}$, $A = \lambda q.$

Среднее число занятых каналов $\quad \bar{z} = \dfrac{A}{\mu}.$

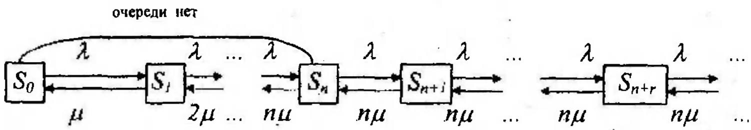
Среднее число заявок в очереди $\bar{r} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \ldots + m \cdot p_{n+m}$ либо

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1) \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^m + m \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}.$$

Среднее число заявок, связанных с системой:

$$\bar{k}=\bar{z}+\bar{r},\quad \bar{t}_{ож}=\frac{\bar{r}}{\lambda},\quad \bar{t}_{сист}=\bar{t}_{ож}+\frac{\bar{q}}{\mu}\ .$$

2). *Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью.*



Нужно, чтобы $\frac{\rho}{n}<1$, иначе очередь будет бесконечно возрастать.

Из (12) при $m\to\infty$ следует:

$$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1};$$

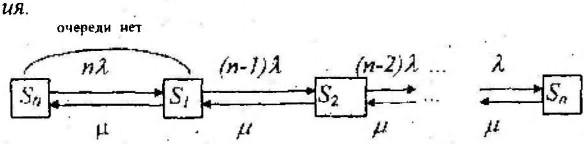
$$p_1=\frac{\rho}{1!}p_0,\ \ldots,\ p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\ p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0,\ \ldots,\ p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0,\ldots$$

Тогда

$$P_{отк}=0,\ q=1,\ A=\lambda,\ \bar{r}=\frac{\rho^{n+1}\cdot p_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2},\quad \bar{t}_{ож}=\frac{\bar{r}}{\lambda},\ \bar{z}=\frac{A}{\mu}=\rho,\ \bar{k}=\bar{r}+\bar{z}.$$

5. СМО, в которых интенсивность потока заявок зависит от состояния самой СМО, называются *замкнутой*.

1). Рассмотрим замкнутую СМО с n источниками заявок и одним каналом обслуживания.



Из (8) - (10) получаем:

$$p_0=\left(1+n\rho+n(n-1)\rho^2+\ldots+n!\,\rho^n\right)^{-1},$$

$$p_1=n\rho\cdot p_0,\quad p_2=n(n-1)\rho^2p_0,\quad \ldots,\quad p_n=n!\,\rho^n\cdot p_0\ .$$

Тогда

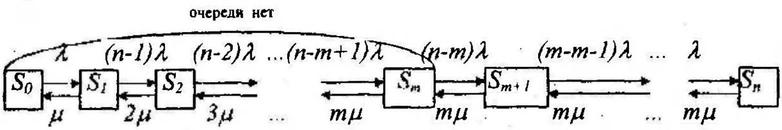
$$P_{зан} = 1 - p_0; \quad A = (1 - p_0)\mu; \quad P_{своб.} = p_0 .$$

Среднее число заявок, связанных с обслуживанием:

$$\bar{\omega} = 1p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n \quad или \quad \bar{\omega} = n - \frac{1 - p_0}{\rho} .$$

Среднее число заявок $\bar{r}$, ожидающих в очереди: $\bar{r} = n - (1 - p_0)(1 + p_0)$.

2). Замкнутая СМО с n источниками заявок и m каналами обслуживания (m < n).



Из (8) - (10) следует:

$$p_0 = [1 + \frac{n}{1!}\rho + \frac{n(n-1)}{2!}\rho^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\rho^m + \\ + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{m!\cdot m}\rho^{m+1} + \ldots + \frac{n!}{m!m^{n-m}}\cdot\rho^n]^{-1};$$

$$p_1 = \frac{n}{1!}\rho\cdot p_0; \quad \ldots; \quad p_m = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\rho^m\cdot p_0;$$

$$p_{m+1} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{m!\cdot m}\rho^{m+1}p_0, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{n!}{m!m^{n-m}}\cdot\rho^n\cdot p_0.$$

Тогда среднее число занятых каналов:

$$\bar{z} = 0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + \ldots + m(p_m + p_{m+1} + \ldots + p_n);$$

$$A = \bar{z}\cdot\mu, \quad \bar{\omega} = n - \frac{\bar{z}}{\rho} .$$

Пример 8. Двухканальная СМО с отказами представляет одну телефонную линию. Заявка-вызов, пришедший в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0{,}8$ (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора $t = 1{,}5$ мин. Все потоки событий простейшие. Определить предельные (при $t \to \infty$) значения: 1) относительную пропускную способность q; 2) абсолютную пропускную способность А; 3) вероятность отказа $P_{отк}$

Решение. Найдем интенсивность обслуживания $\mu = \dfrac{1}{t_{обсл.}} \approx 0{,}667$

и затем приведенную интенсивность $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 1{,}2$.

Тогда $p_0 = \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!}\right)^{-1} \approx 342$.

Вероятность отказа $P_{отк.} = p_2 = \dfrac{\rho^2}{2!} \cdot p_0 \approx 0{,}246$,

относительная пропускная способность $q = 1 - p_2 \approx 0{,}754$,

а абсолютная пропускная способность $А = \lambda \cdot q \approx 0{,}6$.

Задание 7

Варианты

1. Исследуется работа СТО автомобилей, в распоряжении которой имеется 4 подъемника ($n = 4$). Станция работает с отказами 8 часов в сутки. На станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 3$ автомобиля в час. Время обслуживания распределено по показательному закону и характеризуется средней продолжительностью $t = 2$ часа на автомобиль. Требуется построить график состояний системы и вычислить основные числовые характеристики функционирования станции.

2. АЗС представляет собой СМО с одним каналом обслуживания. Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более 4-х машин одновременно ($m = 4$). Если в очереди уже находится 4 машины, то очередная машина, прибывающая к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 0{,}8$ (машин в мин). Процесс заправки продолжается в среднем 2,5 мин. Определить: 1) вероятность отказа; 2) относительную и абсолютную пропускную способность СМО; 3) среднее число машин, ожидающих заправки; 4) среднее число машин, находящихся на АЗС (включая и обслуживающую); 5) среднее время ожидания машины в очереди; 6) среднее время пребывания машины на АЗС (включая и обслуживающую).

3. Рассматривается 4-канальная СМО с отказами, представляющая собой АТС. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0{,}7$ (вызовов в мин). Средняя продолжительность разговора $t = 2{,}5$ мин. Все потоки событий простейшие. Найти вероятности состояний, абсолютную и относительную пропускную способность, вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

4. АЗС с тремя колонками ($n = 3$) может вместить на своей площадке очередь не более 4-х машин ($m = 4$). Все остальные машины получают отказ. Поток машин, прибывающих на АЗС, имеет интенсивность $\lambda = 2$ (машины в мин), среднее время обслуживания одной машины 3 мин. Требуется построить график состояний системы и найти характеристики СМО: 1) вероятность отказа; 2) относительную и абсолютную пропускную способность; 3) среднее число занятых колонок; 4) среднее число машин в очереди; 5) среднее время ожидания и пребывания машины на АЗС.

5. Дана АЗС, на которой имеется 4 заправочные колонки ($n = 4$). Заправка одной машины длится в среднем 3 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди практически неограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, "терпеливо" дожидаются своей очереди. Определить среднее время, проходящее с момента прибывания машины на заправку, до момента ее заправки, а также другие характеристики работы: среднее число занятых мест; среднее число машин в очереди; среднее время простоя колонки между заправками.

6. Группа из 10 станков обслуживается одним рабочим. Среднее время наладки станков равно 15 мин, каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час. Определить характеристики СМО: вероятность занятости рабочего; абсолютную пропускную способность; среднее количество неисправных станков; среднюю относительную потерю производительности группы станков за счет неисправностей.

7. 3 рабочих обслуживают группу из 9 станков. Остановки каждого (работающего) станка случаются в среднем через каждые 45 мин. Процесс наладки занимает у рабочего в среднем 15 мин. Определить характеристики замкнутой СМО: среднее число занятых рабочих; абсолютную пропускную способность; среднее количество неисправных станков.

8. Автоматическая линия представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка-вызов, пришедший в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0{,}9$ (вызовов в мин). Средняя продолжительность изготовления детали $t = 2{,}7$ мин. Все потоки событий простейшие. Определить предельные (при $t \to \infty$) значения: 1) относительную пропускную способность q; 2) абсолютную пропускную способность А; 3) вероятность отказа $P_{отк}$.

9. На станции техобслуживания автомобилей имеется три подъемника.

Станция работает с отказами 14 часов в сутки. На станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 4$ автомобиля в час. Среднее время продолжительности обслуживания автомобиля $t = 2{,}5$ часа и распределено по показательному закону. Требуется вычислить основные числовые характеристики функционирования станции.

10. Рабочий обслуживает 8 станков. На наладку одного станка в среднем требуется 10 минут, каждый станок останавливается в среднем один раз в час. Построить граф состояний СМО и найти ее характеристики: 1) вероятность занятости рабочего; 2) абсолютную пропускную способность; 3) среднее количество неисправных станков; 4) среднюю относительную потерю производительности группы станков за счет неисправностей.