



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный  
технический университет

---

Кафедра «Теория механизмов и машин»

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В МАШИНАХ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ  
КОЛЕБАНИЯ, АВТОКОЛЕБАНИЯ**

*Лабораторный практикум  
по дисциплине «Колебания в машинах»*

Минск  
БНТУ  
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теория механизмов и машин»

МОДЕЛИРОВАНИЕ  
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В МАШИНАХ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ  
КОЛЕБАНИЯ, АВТОКОЛЕБАНИЯ

Лабораторный практикум  
по дисциплине «Колебания в машинах»  
для студентов машиностроительных специальностей

Минск  
БНТУ  
2017

УДК 60.001.11:531.8(076.5)

ББК 34.41я73

М74

С о с т а в и т е л и:

В. В. Кудин, Э. И. Астахов, А. М. Авсиевич

Р е ц е н з е н т ы:

А. М. Тареев, А. Н. Орда

**М74 Моделирование** колебательных процессов в машинах. Параметрические колебания, автоколебания : лабораторный практикум по дисциплине «Колебания в машинах» для студентов машиностроительных специальностей / сост.: В. В. Кудин, Э. И. Астахов, А. М. Авсиевич. – Минск : БНТУ, 2017. – 26 с.

ISBN 978-985-550-594-6.

Содержатся методы математического, компьютерного и лабораторного моделирования механической системы при параметрических и фрикционных автоколебаниях. В каждой работе даются краткие теоретические сведения, порядок математического моделирования, описание лабораторной установки, порядок выполнения, содержание отчета о лабораторной работе, контрольные вопросы по темам.

Издание предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов по дисциплине «Колебания в машинах».

УДК 60.001.11:531.8(076.5)

**ББК 34.41я73**

ISBN 978-985-550-594-6

© Белорусский национальный  
технический университет, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Колебания в машинах» относится к общетехническим, в которых изучаются колебательные процессы, протекающие в механических системах с учетом упругих и диссипативных свойств системы. Задачами дисциплины являются исследования различных механических колебаний в машинах, их физическое и математическое моделирование, выявление параметров, вызывающих вибрации машин, изучение и анализ эффективности различных методов их виброзащиты.

Усвоение теоретических основ дисциплины «Колебания в машинах» закрепляется и расширяется при выполнении лабораторных работ, на которых производится моделирование тех или иных колебательных процессов с использованием лабораторных установок либо современных средств моделирования на персональных ЭВМ. Данное издание посвящено исследованию параметрических колебаний, происходящих в механических системах с рычажными механизмами привода, а также моделированию фрикционных автоколебаний.

В практикуме приведены краткие теоретические сведения, описание установки для проведения лабораторных исследований, а также порядок выполнения лабораторной работы и контрольные вопросы для самоконтроля.

## 1. Лабораторная работа 7К

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЫЧАЖНЫМ МЕХАНИЗМОМ

**Цель работы:** теоретическое и экспериментальное определение собственных частот параметрических колебаний механической системы с рычажным механизмом и анализ устойчивости параметрических колебаний.

#### Основные теоретические положения

*Параметрическими* называются такие колебания систем, в которых инерционные  $a_i$  или жесткостные  $c_i$  параметры являются периодическими функциями какого-либо параметра  $P(t)$ , изменяющегося во времени, т. е.  $a_i(P(t))$ ,  $c_i(P(t))$ . Дифференциальное уравнение параметрических свободных колебаний одномассовой системы с обобщенной координатой  $q$

$$a(t)\ddot{q} + cq = 0 \text{ или } a\ddot{q} + c(t)q = 0$$

преобразуется к виду уравнений с переменными коэффициентами

$$\ddot{q} + \psi(t)q = 0, \tag{1.1}$$

где  $\psi(t)$  – переменный коэффициент параметра  $P(t)$ :

$$\psi(t) = \frac{c}{a(t)} \text{ или } \psi(t) = \frac{c(t)}{a}.$$

Интегрирование уравнения (1.1) при сложных функциях  $\psi(t)$  довольно сложно и не всегда возможно. Однако многие

задачи сводятся к случаю, когда параметрическое возмущение  $\psi(t)$  близко к закону синуса, т. е.

$$\psi(t) = \psi_0(1 - \mu \cos \omega t), \quad (1.2)$$

где  $\psi_0$  – среднее значение коэффициента (рис. 1.1):

$$\psi_0 \approx \frac{\psi_{\max} + \psi_{\min}}{2};$$

$\mu$  – относительная глубина пульсации:

$$\mu = \frac{\Delta\psi}{\psi_0} = \frac{\psi_{\max} - \psi_{\min}}{2\psi_0} = \frac{\psi_{\max} - \psi_{\min}}{\psi_{\max} + \psi_{\min}};$$

$\omega$  – угловая частота изменения параметра  $\psi$  (или  $P$ ).

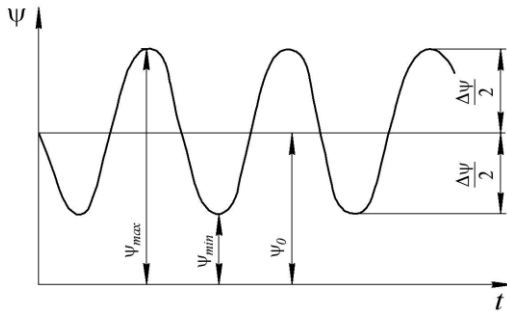


Рис. 1.1

Тогда уравнение (1.1) с учетом (1.2) принимает вид

$$\ddot{q} + \psi_0(1 - \mu \cos \omega t)q = \ddot{q} + k_0^2(1 - \mu \cos \omega t)q = 0, \quad (1.3)$$

где  $k_0$  – средняя собственная частота колебаний системы:

$$k_0 = \sqrt{\frac{c}{a_0}} \text{ или } k_0 = \sqrt{\frac{c_0}{a}};$$

$a_0, c_0$  – средние значения инерционного  $a(t)$  или жесткостного  $c(t)$  параметра.

Дифференциальное уравнение (1.3) параметрических колебаний после замены переменных

$$\psi_1 = \omega_1 t = 2\tau, \quad t = 2\tau/\omega_1, \quad dt = 2d\tau/\omega$$

сводится к известному в математике уравнению Матье:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + (d - 2\varepsilon \cos 2\tau) q = 0, \quad (1.4)$$

где  $d$  и  $\varepsilon$  – постоянные, зависящие от параметров системы:

$$d = \frac{4k_0^2}{\omega_1^2} = \frac{4c}{a_0\omega_1^2}, \quad \varepsilon = \frac{\mu d}{2}.$$

Параметрические колебания, описываемые уравнениями (1.1) или (1.3), в зависимости от свойств системы и характера изменений её параметров  $a(P)$ ,  $c(P)$  или  $\psi(t)$  могут иметь ограниченные или возрастающие во времени амплитуды. Последний случай называют *параметрическим резонансом*. Одной из задач анализа параметрических колебаний является определение условий возникновения параметрического резонанса, т. е. исследование устойчивости системы. Если амплитуды колебаний с течением времени остаются ограниченными, то система устойчива, а при возрастающих амплитудах имеет место параметрический резонанс и система неустойчива.

Решения уравнения Матье (1.4) также имеют колебательный характер и дают возможность анализа устойчивости па-

раметрических колебаний по коэффициентам  $d$  и  $\varepsilon$ . Границы между областями устойчивых и неустойчивых решений представляются в виде диаграммы Айнса–Стретта, построенной в координатах  $d$  и  $\varepsilon$  (рис. 1.2).

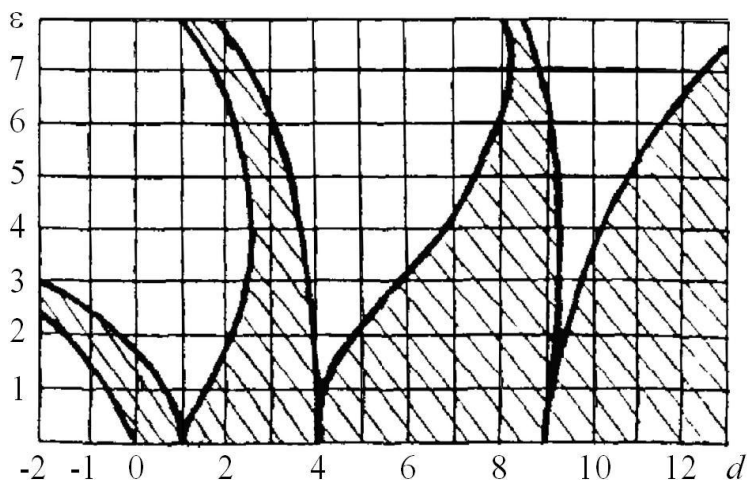


Рис. 1.2

Каждой системе, характеризуемой коэффициентами  $d_i$  и  $\varepsilon_i$ , соответствует точка на диаграмме на рис. 1.2. Если точка находится в заштрихованной зоне, то система устойчива, а неустойчивым системам соответствуют точки на белых полях. Наиболее широкая, а потому и более важная область устойчивости содержит точку  $d = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ . В окрестностях этой точки, т. е. при небольших значениях  $\varepsilon$ , условия устойчивости  $d < 1 - \varepsilon$  и  $d > 1 + \varepsilon$  можно объединить в одно условие:

$$\varepsilon^2 < (1 - d^2). \quad (1.5)$$

Диаграмма Айнса–Стретта при анализе устойчивости системы освобождает от операций по решению уравнения Ма-



тье. Достаточно уравнение (1.1) параметрических колебаний привести к виду (1.4), найдя значения коэффициентов  $d$  и  $\varepsilon$ , и нанести точку с координатами  $d$  и  $\varepsilon$  на диаграмму рис. 1.2 или воспользоваться проверкой условия (1.5).

В данной работе рассматривается механическая система привода с рычажным механизмом (рис.1.3, *a*), у которого инерционный параметр (приведенная масса  $m_n$  или приведенный момент инерции  $J_n$ ) является функцией угла  $\varphi_1$  поворота входного звена  $1$ .

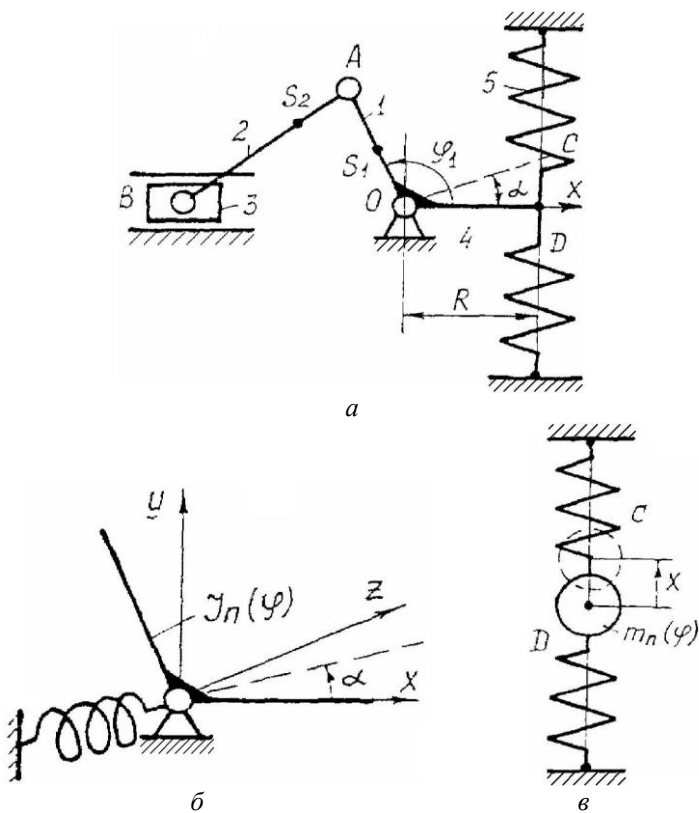


Рис. 1.3

Механическая система на рис. 1.3, *a* состоит из рычажного механизма с подвижными звеньями 1, 2, 3, входное звено 1 которого через рычаг 4 соединено упругой связью со стойкой. Как известно [3], в динамических расчётах инерционность механизмов с абсолютно жесткими звеньями и при отсутствии зазоров в кинематических парах может быть заменена или приведённой массой  $m_{\Pi}$  некоторой точки, или приведенным моментом инерции  $J_{\Pi}$  вращающегося звена. Тогда динамическая модель механической системы на рис. 1.3, *a* может быть представлена или подпружиненным качающимся звеном 1 с приведенным моментом инерции  $J_{\Pi}$  (рис. 1.3, *б*), или поступательной приведённой массой  $m_{\Pi}$  (рис. 1.3, *в*), соединенными упругой связью  $C$  со стойкой. Выражение приведенной массы  $m_{\Pi}$  (или приведенного момента инерции  $J_{\Pi}$ ) получается из равенства кинетических энергий  $T$  подвижных звеньев системы:

$$T_{\Pi} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad \frac{m_{\Pi} v_{\Pi}^2}{2} = \frac{J_{\Pi} \omega_1^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n T_i \left( m_i \frac{v_{S_i}^2}{2} + J_{S_i} \frac{\omega_i^2}{2} \right),$$

где  $n$  – число подвижных звеньев;

$m_i$  – массы звеньев;

$J_{S_i}$  – осевые моменты инерции относительно центра масс  $S_i$ .

Приведенные моменты инерции звена 1:

$$J_{\Pi 1} = \frac{2 \sum_{i=1}^n T_i}{\omega_1^2} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{S_i}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \left( m_i U_{S_i}^2 + J_{S_i} U_{i,1}^2 \right);$$

для приведения массы в точке  $D$  на рис. 1.3, *в* ( $v_D = \omega_1 R$ )

$$m_{\Pi} = \frac{2 \sum_{i=1}^n T_i}{v_D^2} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{S_i}}{v_D} \right)^2 + J_{S_i} \left( \frac{\omega_i}{v_D} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \left( m_i U_{S_i-1}^2 + \frac{J_{S_i}}{R^2} U_{i,1}^2 \right),$$

где  $U$  – передаточные функции (отношения, аналоги скоростей), получаемые дифференцированием линейных  $r_{S_i}$  или угловых  $\varphi_j$  координат по углу  $\varphi_1$ :

$$U_{S_i} = \frac{dr_{S_i}}{d\varphi_i}, \quad U_{i,1} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1},$$

$$U_{S-S_i} = \frac{v_{S_i}}{v_D} = \frac{U_{S_i} \omega_1}{\omega_1 R} = \frac{U_{S_i}}{R}.$$

В рычажных, кулачковых и подобных механизмах передаточные функции  $U_i$  являются периодическими функциями обобщённой координаты  $\varphi_1$ , поэтому  $J_{\Pi}$ ,  $m_{\Pi}$  также являются периодическими функциями угла  $\varphi_1$ , т. е.  $J_{\Pi} = J_{\Pi}(\varphi_1)$ ,  $m_{\Pi} = m_{\Pi}(\varphi_1)$ .

Тогда из дифференциального уравнения (1.3) частота  $k_0$  собственных колебаний механической системы будет являться также функцией параметра  $\varphi_1$  (при постоянной линейной жёсткости  $c$ ):

$$k(\varphi_i) = \sqrt{\frac{c}{m_{\Pi}(\varphi_i)}}; \quad k(\varphi_1) = \sqrt{\frac{c \cdot R^2}{J_{\Pi}(\varphi_1)}}.$$

### Экспериментальное определение собственных частот колебаний

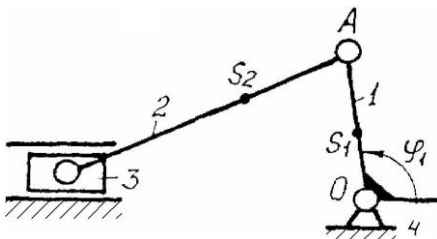


Рис. 1.4

Лабораторная установка ТММ-46 выполнена в виде кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.4).

Определение собственных частот колебаний механизма в установке основано на принципе сов-

падения частоты собственных и вынужденных колебаний одно-массовой системы с  $m_n$  или  $J_n$  (см. рис. 1.3, б, в) при резонансе.

На рис. 1.5 показана установка с кривошипно-ползунным механизмом, состоящая из корпуса 17, на котором с левой стороны закреплен исследуемый механизм 1, 2, 3, а с правой стороны – вибровозбудитель для получения резонанса. Кривошипный узел 5 механизма имеет угловую шкалу (лимб) 6 и стопор 7 для установки кривошипа 1 в 12 положениях через  $30^\circ$ . С кривошипом 1 механизма жестко соединен рычаг 4 с добавочным грузом 9, устанавливаемым по шкале 8 на заданное расстояние  $R_d$ . Концы рычага соединены с пружинами 12.

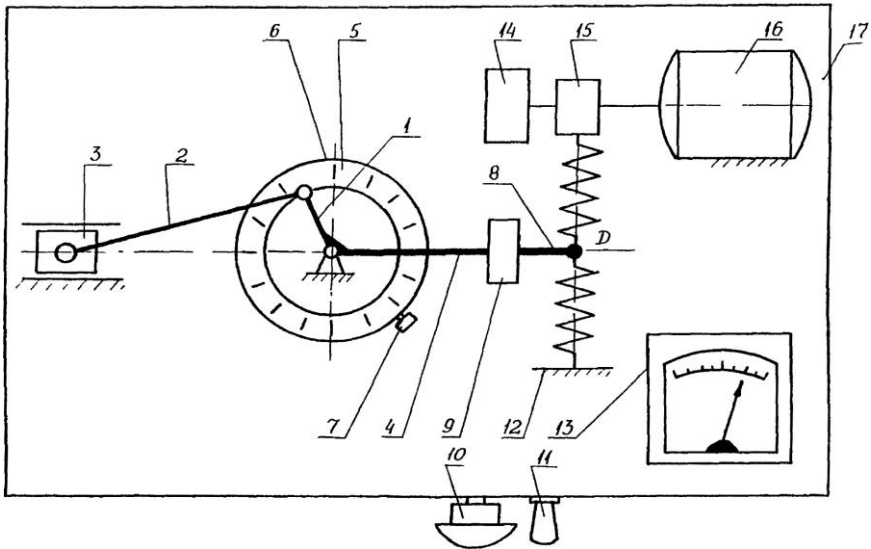


Рис. 1.5

Вибровозбудитель для получения резонанса состоит из электродвигателя 16 и эксцентрикового механизма 15, соединённого с верхней пружиной. При вращении ротора двигателя на конце пружины создаются вынужденные гармонические колебания, которые передаются рычагом 4 на исследуемый

механизм. Регулируя обороты двигателя, можно менять частоту вынужденных колебаний и возбудить резонансные колебания, когда собственная частота колебаний механизма совпадает с частотой возмущающей силы.

Для определения резонансной частоты установка имеет измерительную электрическую цепь, состоящую из микроамперметра 13 и тахогенератора 14. По шкале амперметра с помощью тарировочной таблицы можно определить резонансную частоту вращения двигателя  $n$ , об/мин, а затем угловую частоту  $k$  и частоту  $f$  собственных колебаний:

$$k = \frac{2\pi n}{60}; \quad f = \frac{n}{60}. \quad (1.6)$$

### Порядок выполнения работы

1. Вычертить схему лабораторной установки с исследуемым механизмом, составить динамическую модель механической системы.

2. Выписать размеры, инерционные и жесткостные параметры исследуемого механизма, параметры добавочного груза, частоту вращения кривошипа (табл. П1).

3. Из равенства кинетической энергии получить выражение приведённой массы  $m_n(\varphi_1)$  (или приведенного момента инерции  $J_n(\varphi_1)$ ), используя формулы передаточных функций  $U(\varphi)$  из табл. П2.

4. Рассчитать аналитические значения  $m_n(\varphi)$  или  $J_n(\varphi)$  и частоты  $k$  и  $f$  собственных колебаний системы для ряда углов  $\varphi_1$ , определив максимальное, минимальное и среднее значения.

5. Привести дифференциальное уравнение параметрических колебаний системы к уравнению Матье и, рассчитав коэффициенты  $d$  и  $\varepsilon$ , сделать анализ устойчивости колебаний.

6. Экспериментально определить частоты собственных колебаний системы с рычажным механизмом.

6.1. Установить добавочный груз  $9$  по шкале  $8$  (см. рис. 1.5) на заданном радиусе  $R_d$ .

6.2. Установить механизм по лимбу  $6$  в одном из  $12$  положений, стопором  $7$  зафиксировав кривошип  $1$  с рычагом  $4$ , начав от  $\varphi_1 = 0$ .

6.3. Подключить лабораторную установку к электросети  $220$  В и включить тумблер  $11$ , плавно увеличивая скорость вращения электродвигателя потенциометром  $10$ . Добиться чётко выраженного пика резонанса. По микроамперметру  $13$  измерить ток / при резонансе.

6.4. Повторить пп. 6.2, 6.3 для  $12$  положений механизма (через  $30^\circ$  по лимбу  $6$ ).

6.5. По тарировочной таблице определить резонансную частоту вращения  $n$  и по формуле (1.6) – собственные частоты  $k_s$  и  $f_s$ .

7. По результатам расчётов  $f$  и  $m_n$  (или  $J_n$ ) построить графики экспериментальных частот  $f_s(\varphi_1)$ , аналитические кривые  $m_n(\varphi_1)$  и  $J_n(\varphi_1)$ .

8. Сопоставить аналитические и экспериментальные результаты  $f_{\max}$ ,  $f_{\min}$ ,  $f_0$  и в выводах записать анализ полученных результатов.

## Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Схема установки с исследуемым механизмом.
3. Динамическая модель системы.
4. Размеры, инерционные и жесткостные параметры рычажного механизма.
5. Аналитический расчёт экстремальных значений  $m_{\max}$  и  $m_{\min}$  приведённой массы  $m_n$  (или приведённого момента инерции  $J_n$ ) механизма.
6. Аналитический расчёт собственных частот колебаний системы:
  - 6.1. Дифференциальное уравнение собственных колебаний системы;

6.2. Экстремальных значения собственных частот.

7. Анализ устойчивости параметрических колебаний:

7.1. Дифференциальное уравнение параметрических колебаний;

7.2. Преобразованное к виду Матье дифференциальное уравнение колебаний;

7.3. Коэффициенты  $d, \varepsilon$  уравнения для системы с исследуемым механизмом.

8. Экспериментальное определение собственных частот колебаний:

8.1. Измерения собственных частот на установке.

8.2. Таблица экспериментальных измерений.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi_1$ , град													
$I$ , мкА													
$n$ , об/мин													
$k$ , $c^{-1}$													
$f$ , Гц													

где  $n =$  [об/мин],  $k =$  [рад/с],  $f = n/60$  [Гц].

8.3. Графики собственных частот и приведённой массы в функции параметра  $\alpha$ .

9. Выводы.

### Контрольные вопросы

1. Назвать причины возникновения параметрических колебаний.

2. Записать дифференциальное уравнение собственных колебаний одномассовой системы с переменным параметром.

3. Записать дифференциальное уравнение Матье при параметрических колебаниях.

4. Дать понятие об устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний. Как по диаграмме Айнса–Стретта определить устойчивость параметрических колебаний?

5. Изобразить динамическую модель системы в лабораторной установке с рычажным механизмом.

6. Какой является переменным параметр в лабораторной установке с рычажным механизмом?

7. Как аналитически и экспериментально определяется угловая частота  $k$  свободных параметрических колебаний в данной работе?

8. В чем особенности графиков приведенной массы  $m_n(\varphi_1)$  и угловой частоты  $k(\varphi_1)$  (или  $f(\varphi_1)$ ) свободных параметрических колебаний в установке с рычажным механизмом?

9. На чем основано экспериментальное определение частоты свободных параметрических колебаний в данной работе?

## *2. Лабораторная работа 8К*

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ**

#### **Цель работы**

1. Определение параметров автоколебательного процесса.
2. Исследование колебаний на устойчивость.
3. Анализ влияния скорости ведущего звена на фрикционные автоколебания.

#### **Основные теоретические положения**

При определенных параметрах упругой системы станка и характеристиках трения в системе самовозбуждаются фрикционные автоколебания без периодических внешних воздействий. Самовозбуждение колебаний происходит вследствие



превышения энергии, получаемой системой от внешнего источника, над энергией, рассеиваемой при колебаниях. Когда наступает равенство энергий, устанавливаются стационарные колебания с определенной амплитудой.

В отличие от вынужденных или параметрических колебаний автоколебания возникают в системах при отсутствии внешнего периодического воздействия. Кроме того, необходимо наличие источника энергии и механизма, благодаря которому энергия этого источника превращается в колебательную энергию.

Фрикционные колебания представляют собой простейший пример автоколебаний в системе с одной степенью свободы.

На рис. 2.1 тело 2 массой  $m$  находится на движущейся с постоянной скоростью  $v$  ленте 1 и удерживается пружиной 3, имеющей жесткость  $c$ . По плоскости соприкосновения действует сила трения  $F(u)$ , зависящая от относительной скорости

$$u = v - \dot{x}.$$

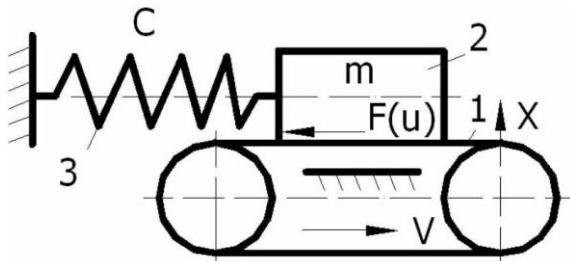


Рис. 2.1

Дифференциальное уравнение движения груза  $m$  имеет вид

$$m\ddot{x} + cx - F(u) = 0,$$

где  $F(u)$  – сила трения, вид которой описывается графиком, изображенным на рис. 2.2.

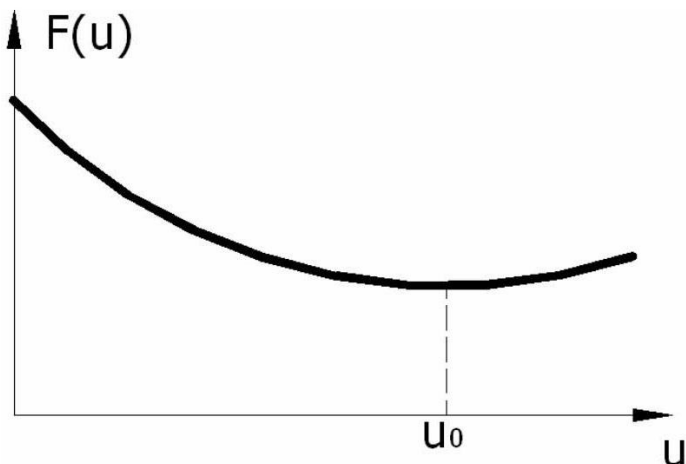


Рис. 2.2

Если  $\left(\frac{dF}{du}\right)_{u=v} > 0$ , т. е. характеристика при данной скорости возрастающая, то положение статического равновесия

$$x = x_0 = \frac{F(v)}{c}$$

является устойчивым по отношению к малым возмущениям. В противном случае положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, при характеристике трения, изображенной на рис. 2.2, положение статического равновесия устойчиво.

Если сила трения сохраняет при скольжении величину постоянную, но меньшую, чем сила трения покоя, то также возникают автоколебания. Такой случай характерен при резании металлов резцом на металлорежущих станках (токарных, строгальных), а также при поступательном перемещении суппорта по направляющим станины.

Рассмотрим этот случай автоколебательного процесса, схема которого изображена на рис. 2.3.

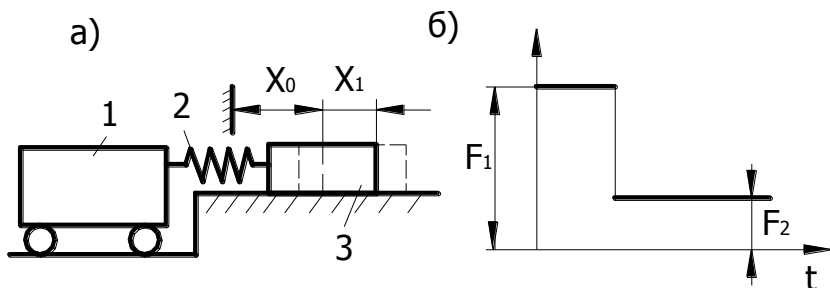


Рис. 2.3

Тело 1 движется с постоянной скоростью  $v_0$ . Между телом 3 и плоскостью развивается сила сухого трения, характеристика которого изображена на рис. 2.3, б, что схематически отражает известное из экспериментов различие между предельной силой трения покоя  $F_1$  и силой трения движения  $F_2$  (при этом  $F_1 > F_2$ ).

Обозначим:

$v_0 = \text{const}$  – скорость ведущего звена;

$m$  – масса ведомого звена 3;

$c$  – жесткость пружины.

Частота собственных колебаний системы

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Очевидно, что если скорость звена 1 равна  $v_0$  и мала, то любое малое препятствие может оказаться достаточным для остановки звена 3.

Рассмотрим дальнейшее состояние колебательной системы в горизонтальном направлении.

1-й этап. Ведущее звено 1, продолжая движение, будет сжимать пружину до тех пор, пока сила упругого сжатия сравняется с  $F_1$ .

2-й этап. При  $F_{\text{упр}} = F_1$  происходит срыв звена 3.

Приняв при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , получим уравнение движения ведомого звена  $\mathcal{Z}$ :

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 v_0 t + \frac{F_1 - F_2}{m}.$$

Тогда перемещение звена  $\mathcal{Z}$  выражается зависимостью

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{F_1 - F_2}{c} (1 - \cos kt),$$

где первое слагаемое правой части выражает равномерное движение со скоростью  $v_0$ , а два других – колебания звена  $\mathcal{Z}$ .

В некоторый момент времени  $t = t_1$  при скорости  $\dot{x} = 0$ , т. е. ведомое звено  $\mathcal{Z}$  останавливается:

$$v_0(1 - \cos kt_1) + \frac{k(F_1 - F_2)}{c} \sin kt_1 = 0. \quad (2.1)$$

Из уравнения (2.1) находим время  $t_1$ , при этом вводим безразмерный коэффициент

$$\alpha = \frac{k(F_1 - F_2)}{\omega_0};$$

при  $\alpha > 1$

$$t_1 = \frac{\pi + \arctg\left(\frac{-2\alpha}{1 - \alpha^2}\right)}{k},$$

а при  $\alpha < 1$

$$t_1 = \frac{\frac{3}{2}\pi + \arctg\left|\frac{-2\alpha}{1 - \alpha^2}\right|}{k}.$$

Путь, пройденный звеном 3 за время  $t_1$ :

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{v_0}{k} \sin kt_1 + \frac{F_1 - F_2}{c} (1 - \cos kt_1).$$

3-й этап. Звено 3 находится в покое на протяжении некоторого времени  $t_2$ , при этом

$$t_2 = \frac{2(F_1 - F_2)}{\omega_0}.$$

При  $t = t_1 + t_2$  наступает новый срыв и цикл автоколебаний звена 3 повторяется.

Таким образом, период автоколебаний определяется суммой

$$T = t_1 + t_2,$$

а частота, с которой совершается автоколебательный процесс:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_1 + t_2}.$$

### **Порядок выполнения лабораторной работы**

Моделирование фрикционных автоколебаний осуществляется с помощью пакета программ ЛР8К на персональном компьютере.

После регистрации на экране монитора появляется приглашение для ввода исходных данных. После ввода исходных данных производится расчет частоты свободных колебаний, интервалов времени  $t_1$  и  $t_2$  и периода автоколебаний. Результаты расчетов выводятся на экран монитора. В нижней части экрана моделируется автоколебательный процесс в виде зави-

симости от времени на интервале движения  $t_1$  и покоя  $t_2$ . Одновременно используя мультипликацию на экране, воспроизводят движение звена 1, сжатие пружины 2 и покой либо движение звена 3. На этом же экране воспроизводится фазовая траектория  $v(x)$  движения звена 3.

С целью исследования влияния скорости  $v_0$  на автоколебательный процесс имеется возможность задать  $v'_0 < v_0$  и  $v''_0 < v_0$ , затем повторить моделирование фрикционных автоколебаний в полном объеме.

По окончании моделирования производится распечатка листинга результатов исследования фрикционных автоколебаний при трех значениях скорости  $v_0$ ,  $v'_0$ ,  $v''_0$  ведущего звена 1.

### Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Материальное обеспечение.
3. Схема механической системы, характеризующей фрикционные автоколебания.
4. Основные расчетные формулы.
5. Исходные данные (табл. ПЗ).
6. Определение частоты свободных колебаний.
7. Определение времени  $t_1$  от момента срыва звена 3 до полной остановки. Расчет значения перемещения и скорости звена 3 на интервале  $0 \leq t \leq t_1$ .
8. Определение времени  $t_2$ , на интервале которого звено 3 остается неподвижным при движущемся с постоянной скоростью ведущем звене 1.
9. Определение периода и частоты автоколебаний.
10. Построение графиков  $x = x(t)$ ,  $\dot{x} = \dot{x}(t)$  и  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  по результатам расчета на ЭВМ.
11. Выбор по рекомендации руководителя занятий двух других значений скорости  $v'_0$ ,  $v''_0$ .

12. Моделирование процесса автоколебаний и по результатам расчетов исследование влияния скорости  $v_0$  на основные параметры фрикционных автоколебаний.

13. Анализ результатов моделирования фрикционных автоколебаний и выводы по работе.

### Контрольные вопросы

1. Что называется автоколебаниями?
2. Что является источником и механизмом преобразования энергии во фрикционных автоколебаниях?
3. Дать понятие устойчивости равновесия положения при автоколебаниях.
4. Записать и проанализировать дифференциальное уравнение фрикционных автоколебаний.
5. Как определить период автоколебаний?
6. Записать формулу скорости движения груза на интервале  $0 \leq t \leq t_1$ .
7. Из какого условия определяется время  $t_2$ , при котором груз неподвижен?
8. Дать понятие отрицательного трения.
9. Изображение автоколебаний на фазовой плоскости и их анализ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко, Я. Г. Введение в теорию механических колебаний : учебное пособие / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
2. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6 : Защита от вибраций и ударов. – 456 с.
3. Орликов, М.Л. Динамика станков: учебное пособие для вузов / М.Л. Орликов. – Киев: Наукова думка, 1980. – 256 с.
4. Колебания в машинах : лабораторные работы для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / сост.: Э. И. Астахов, В. В. Кудин, М. В. Кудин. – Минск : БНТУ, 2005. – 95 с.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Исходные данные к лабораторной работе 7К

Таблица П1

Размеры, инерционные и жесткостные параметры механизма

Размеры $l_i$ , м				Массы $m_i$ , кг				Коэффициент жесткости
$l_1 = l_{OA}$	$l_2 = l_{OA}$	$l_{OS1}$	$l_{AS2}$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_d$	$c$ , Н/м
0,032	0,142	0,015	0,064	1,12	0,26	2,1	0,8	7800

Продолжение табл. П1

Осевые моменты инерции, кг·м <sup>2</sup>		Угловая скорость (рад/с) и положение добавочного груза $R_d$ (м) по вариантам						
$J_{S1}$	$J_{S2}$	1	2	3	4	5	6	7
0,00016	0,0000095	250	240	230	220	210	200	190
$J_{O1} = J_{S1} + m_1 l_{OS1}^2 + m_d R_d^2$		0,08	0,09	0,1	0,11	0,012	0,13	0,14
$m_{II} = \frac{J_{II}}{R^2} = \frac{1}{R^2} (J_{O1} + m_2 U_{S2}^2 + J_{S2} U_{21}^2 + m_3 U_{31}^2) = m_{II}(\varphi_1)$								

Таблица П2

Формулы расчета передаточных функций  
при различных углах  $\varphi_1$

$\varphi_1 = 0; 180; 360^\circ$			$\varphi_1 = 90; 270^\circ$		
$U_{31}$	$U_{S2}$	$U_{21}$	$U_{31}$	$U_{S2}$	$U_{21}$
0	$l_1 \left(1 - \frac{l_{AS2}}{l_2}\right)$	$\frac{l_1}{l_2}$	$l_1$	$l_1$	0

## Исходные данные к лабораторной работе 8К

Вариант	$m$ , кг	$c$ , Н/м	$v$ , м/с	$\Delta v$ , м/с	$F_1$ , Н	$F_2$ , Н
1	8	250	1,2	0,4	600	200
2	10	300	2,2	0,5	500	150
3	12	400	2,5	0,6	550	120
4	15	350	3,0	0,5	520	110
5	17	410	2,8	0,4	480	100
6	20	450	1,4	0,3	800	200
7	22	320	0,9	0,2	1100	300
8	25	500	0,8	0,2	900	250
9	30	520	1,5	0,6	1200	350
10	35	600	1,8	0,7	1300	400

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Лабораторная работа 7К. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЫЧАЖНЫМ МЕХАНИЗМОМ .....	4
2. Лабораторная работа 8К. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ.....	15
ЛИТЕРАТУРА .....	23
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	24

Учебное издание

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В МАШИНАХ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ,  
АВТОКОЛЕБАНИЯ**

Лабораторный практикум  
по дисциплине «Колебания в машинах»  
для студентов машиностроительных специальностей

Составители:

**КУДИН** Валентин Валентинович  
**АСТАХОВ** Эдуард Иванович  
**АВСИЕВИЧ** Андрей Михайлович

Редактор *Т. Н. Микулик*  
Компьютерная верстка *А. Е. Дарвиной*

Подписано в печать 20.04.2017. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 1,57. Уч.-изд. л. 1,23. Тираж 200. Заказ 782.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.