

УДК 620.174 (075.8)

## **РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ В СТУПЕНЧАТЫХ БАЛКАХ**

студенты гр.101071-15 Курьянов П.В, Грищенко М.Ю.,

студент гр. 101081-15 Верас А.К.

*Научный руководитель – доц. Реут Л.Е.*

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Идеальной формой элемента, работающего на изгиб, является балка равного сопротивления, обладающая рядом преимуществ по сравнению с аналогичными элементами, но имеющими постоянную жесткость. Для выполнения условия равенства напряжений по всей длине балка равного сопротивления должна иметь определенную форму, строго изменяющуюся по заданному закону. Теоретический расчет конфигурации такой балки не является сложной задачей, но главная проблема состоит в практическом ее изготовлении, которое требует использования специального оборудования и оснащения. Поэтому на практике при создании балки равного сопротивления, как правило, применяют ее приближенную форму в виде *ступенчатого стержня*, характеризующегося сходными свойствами – меньшим весом и большей деформируемостью, но при этом более простого и технологичного в изготовлении.

Однако классическая теория изгиба, рассматриваемая в механике материалов, справедлива только для балок постоянного сечения. Если же форма сечения изменяется по длине, то даже при чистом изгибе сечения не остаются плоскими и линейный закон распределения напряжений по высоте профиля нарушается. Поэтому для балок переменного сечения использование расчетных формул требует корректировки. Если сечение изменяется плавно или оно постоянно в пределах отдельных участков, как, например, в ступенчатых стержнях, то использование изложенной теории изгиба допустимо, хотя и дает небольшую погрешность. Для других, более сложных конструкций необходимо использовать методы и подходы, применяемые в теории упругости.

В данной работе исследуется вопрос определения деформаций в ступенчатых балках и применение метода начальных параметров в расчете элементов, имеющих переменную по длине жесткость.

Рассмотрим ступенчатую балку, нагруженную системой сил (рис. 1, *a*) и имеющую три участка разного сечения с моментами инерции  $I_{x(1)}$ ,  $I_{x(2)}$  и  $I_{x(3)}$ .

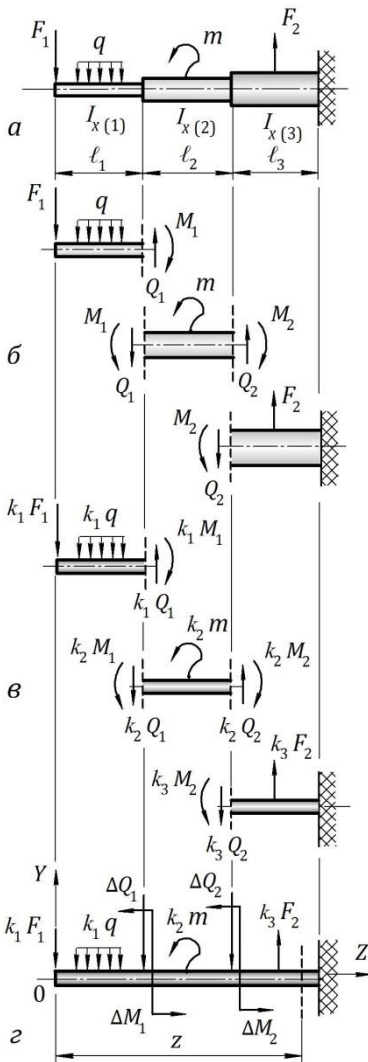


Рис. 1

Методика получения уравнений прогибов и углов поворота по методу начальных параметров предполагает постоянную жесткость балки по всей длине, а значит, применять ее в таком же виде к стержням переменного сечения нельзя. Применение метода начальных параметров к ступенчатой балке требует, чтобы ее форма была изменена и приведена к некоторому эквивалентному по деформациям стержню постоянного сечения. Чтобы обеспечить тождественность между исходной и измененной балками, все внешние и внутренние силы также должны быть изменены и приведены к соответствующим значениям.

Мысленно разрезаем балку на участки постоянного сечения и показываем действующие на нее в граничных сечениях поперечные силы и изгибающие моменты (рис. 1, б). Дифференциальные уравнения изогнутой оси на каждом участке с соответствующе жесткостью  $EI_x$  имеют вид:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{z_1}}{EI_{x(1)}}; \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{z_2}}{EI_{x(2)}}; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{z_3}}{EI_{x(3)}}; \quad \dots \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{z_n}}{EI_{x(n)}}$$

где  $n$  – номер соответствующего участка.

Приводим сечения всех участков к одному размеру, например, размеру первого участка, принимая его жесткость за базовую. Для этого правую часть уравнений (1) умножим и разделим на  $I_{x(1)}$ . В результате преобразований уравнения (1), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_1}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{k_1 M_{z_1}}{EI_{x(1)}}; \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_2}}{EI_{x(2)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{M_{z_2}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(2)}} = \frac{k_2 M_{z_2}}{EI_{x(1)}}; \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_3}}{EI_{x(3)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{M_{z_3}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(3)}} = \frac{k_3 M_{z_3}}{EI_{x(1)}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_n}}{EI_{x(n)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{M_{z_n}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(n)}} = \frac{k_n M_{z_n}}{EI_{x(1)}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k_i$  – коэффициент приведения  $i$ -го участка:

$$\begin{aligned} k_1 &= I_{x(1)} / I_{x(1)} = 1; \quad k_2 = I_{x(1)} / I_{x(2)}; \\ k_3 &= I_{x(1)} / I_{x(3)}; \quad \dots \quad k_n = I_{x(1)} / I_{x(n)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученные дифференциальные уравнения (2) описывают изогнутую ось соответствующих участков балки, но имеющих одинаковое сечение с одинаковой жесткостью  $I_{x(1)}$ . А значит, умножив изгибающий момент каждой части балки на коэффициент приведения (3) соответствующего участка и заменив жесткость этой части на жесткость базового участка, получаем эквивалентную по деформациям конструкцию: форма изогнутой оси каждого приведенного к одинаковому сечению участка будет полностью соответствовать форме изогнутой оси того же участка исходной ступенчатой балки.

Однако изгибающие моменты, которые действуют в сечениях, находятся в линейной зависимости от внешних нагрузок, поэтому, если изгибающие моменты в приведенной балке принимают значения, равные  $k_i M_{z_i}$ , то, внешние силы, приложенные к балке, и

внутренние усилия  $M$  и  $Q$  в сечениях также будут иметь другие значения, которые отличаются в  $k_i$  раз и получаются умножением исходных величин на этот коэффициент (рис. 1, в).

Последним шагом приведения балки является ее восстановление в цельном виде. Для этого участки постоянного сечения с приведенными внешними и внутренними силами (см. рис. 1, в) соединяют в единую балку и нагружают ее на соответствующих участках измененной внешней нагрузкой, а в граничных сечениях дополнительно прикладывают силы и моменты, которые представляют собой разность приведенных внутренних усилий, приложенных к левой и правой сторонам сечения:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= Q_1(k_2 - k_1); \quad \Delta M_1 = M_1(k_2 - k_1); \\ \Delta Q_2 &= Q_2(k_3 - k_2); \quad \Delta M_2 = M_2(k_3 - k_2). \end{aligned} \quad (4)$$

В результате окончательный вид приведенной балки, которая по форме изогнутой оси полностью эквивалентна ступенчатой балке, представлен на рис. 1, г. Теперь для полученного стержня постоянного сечения, используя метод начальных параметров, можно записать уравнения прогибов и углов поворота и выполнить решение по определению деформаций, как это было сделано выше для балок постоянной жесткости.

### **Пример**

Для ступенчатой балки (рис. 2, а) с отношением жесткостей участков  $I_{x(1)} : I_{x(2)} : I_{x(3)} = 1 : 2 : 4$  определяем прогиб и угол поворота конца консоли. Балка выполнена из одного материала.

Воспользуемся методом сечений для заданной ступенчатой балки, построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 2, б, в). В статически определимых системах внутренние усилия не зависят от жесткости элементов или участков конструкции, и определяются только величиной внешних нагрузок, а следовательно, ступенчатость балки на вид эпюр не влияет.

Затем балка разрезается на ступеньки, на которые наносится внешняя нагрузка, а в граничных сечениях прикладываются внутренние усилия  $Q$  и  $M$  (рис. 2, г), величина и направление которых указывается в соответствии с эпюрами (см. рис. 2, б, в).

После этого разрезанные участки приводятся к сечению одного размера с жесткостью, равной, например, жесткости первого

участка  $I_{x(1)}$ , принимаемого за базовый. Тогда коэффициенты приведения для каждого участка согласно заданным соотношениям равны:

$$k_1 = I_{x(1)} / I_{x(1)} = 1;$$

$$k_2 = I_{x(1)} / I_{x(2)} = 1/2;$$

$$k_3 = I_{x(1)} / I_{x(3)} = 1/4.$$

Умножим все внешние и внутренние силы, действующие на соответствующую ступеньку (рис. 1, д) на  $k_1, k_2$  и  $k_3$  (5), и получаем участки одинаковой жесткости, но с приведенными нагрузками, пропорционально измененными таким образом, чтобы для новых и исходных участков балки обеспечивалась эквивалентность изогнутой оси. В результате такого приведения внутренние силы в общих сечениях левых и правых участков будут неодинаковыми (см. рис.8.7, д), что приводит к появлению здесь дополнительных сил и моментов, которые вычисляются алгебраическим суммированием значений  $Q$  и  $M$  в этих сечениях. Дополнительные силы  $\Delta Q$  и  $\Delta M$  называются *добавочными нагрузками*, и их следует учитывать в расчетной схеме новой балки.

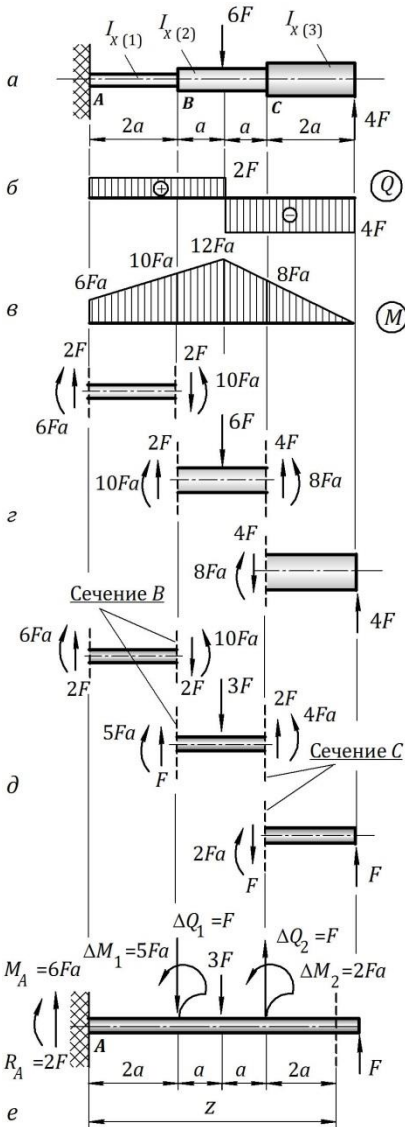


Рис. 2

$$\left. \begin{array}{l} \text{Сечение В: } \Delta Q_1 = 2F \downarrow - F \uparrow = F \downarrow; \Delta M_1 = 10Fa - 5Fa = 5Fa. \\ \text{Сечение С: } \Delta Q_2 = 2F \uparrow - F \downarrow = F \uparrow; \Delta M_2 = 4Fa - 2Fa = 2Fa. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Процесс приведения балки к элементу постоянного сечения завершается восстановлением ее целостности путем соединения разрезанных участков и приложения к балке внешних сил, приведенных к новому значению, а также добавочных нагрузок  $\Delta Q$  и  $\Delta M$  (6) в сечениях разреза. В результате, в окончательном своем виде (рис. 1, е) балка полностью эквивалентна по деформациям исходной балке ступенчатой формы (см. рис. 1, а).

Для того, чтобы убедиться в правильности расчетов, выполним статическую проверку приведенной балки (рис. 1, е):

$$\sum Y = 0: \quad R - \Delta Q_1 - 3F + \Delta Q_2 + F = 0 \rightarrow 2F - F - 3F + F + F = 0;$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - \Delta M_1 - \Delta M_2 + \Delta Q_1 \cdot 2a + 3F \cdot 3a - \Delta Q_2 \cdot 4a - F \cdot 6a = 0 \rightarrow \\ 6Fa - 5Fa - 2Fa + 2Fa + 9Fa - 4Fa - 6Fa = 0.$$

Теперь, получив балку постоянного сечения, перейдем к определению деформаций. Используя *метод начальных параметров*, записываем уравнения углов поворота (7) и прогибов (8):

$$EI_{x(1)} \Theta_z = EI_{x(1)} \Theta_0 + Mz + Rz^2 / 2 + \Delta M_1 (z - 2a) - \Delta Q_1 (z - 2a)^2 / 2 - \\ - 3F (z - 3a)^2 / 2 + \Delta M_2 (z - 4a) + \Delta Q_2 (z - 4a)^2 / 2; \quad (7)$$

$$EI_{x(1)} y_z = 6Fa z^2 / 2 + 2Fz^3 / 6 + 5Fa (z - 2a)^2 / 2 - F (z - 2a)^3 / 6 - \\ - 3F (z - 3a)^3 / 6 + 2Fa (z - 4a)^2 / 2 + F (z - 4a)^3 / 6. \quad (8)$$

Подставляя в выражения (7)–(8) значения нагрузок по рис. 2, е и учитывая, что в заделке начальные параметры равны нулю, т. е.  $EI_{x(1)} \Theta_0 = 0$  и  $EI_{x(1)} y_0 = 0$ , получаем уравнения деформаций в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
EI_{x(1)}\Theta_z &= 6Faz + 2Fz^2 / 2 + 5Fa(z - 2a) - F(z - 2a)^2 / 2 - \\
&\quad - 3F(z - 3a)^2 / 2 + 2Fa(z - 4a) + F(z - 4a)^2 / 2; \\
EI_{x(1)}y_z &= 6Faz^2 / 2 + 2Fz^3 / 6 + 5Fa(z - 2a)^2 / 2 - F(z - 2a)^3 / 6 - \\
&\quad - 3F(z - 3a)^3 / 6 + 2Fa(z - 4a)^2 / 2 + F(z - 4a)^3 / 6 .
\end{aligned} \tag{9}$$

Для определения угла поворота и прогиба сечения на конце консоли подставляем в уравнения (9) значение  $z = 6a$ . В результате расчета получаем:

$$\Theta_{z/z=6a} = 75,5Fa^2 / EI_{x(1)}; \quad y_{z/z=6a} = 187,7Fa^3 / EI_{x(1)}.$$

Представленная методика применения метода начальных параметров для определения деформаций в балках переменного сечения может быть использована для балок, выполненных из разных материалов, если изменение жесткости участков обусловлено не переменным сечением, а отличающимся модулем Юнга. В таком случае балку требуется привести к одинаковой жесткости, взяв какой-либо участок, например с модулем  $E_1$  за базовый. Вычислив коэффициенты приведения через модуль Юнга

$$k_1 = E_1 / E_1 = 1; \quad k_2 = E_1 / E_2; \quad k_3 = E_1 / E_3; \quad \dots \quad k_n = E_1 / E_n ,$$

дальнейшее решение выполняют аналогичным образом, как это было сделано выше.

### *Литература*

1. Феодосьев, В.И. Сопrotивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Подскребко, М. Д. Сопrotивление материалов / М.Д. Подскребко – Минск: Издательство «Дизайн ПРО», 1998 – 586 с.
3. Николаенко, В. Л. Механика / В.Л. Николаенко – М.: БНТУ, 2011 – 293 с.
4. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 606 с.