МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Инженерная графика строительного профиля»

РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Минск
БНТУ
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная графика строительного профиля»

РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области строительства

Минск
БНТУ
2017

УДК 744:621
ББК 22.151.3я7
Р47

Авторы:
В. В. Тарасов, *Ю. И. Садовский*,
Е. А. Телеш, *И. М. Шуберт*

Рецензенты:
Г. И. Касперов, канд. техн. наук, зав. кафедрой
«Инженерная графика» УО « Белорусский государственный
технологический университет»;
В. А. Бобрович, канд. техн. наук, доцент кафедры
«Инженерная графика» УО «Белорусский государственный
технологический университет»

Решение векторных задач средствами начертательной геометрии :
Р47 учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей / В. В. Тарасов [и др.]. – Минск : БНТУ, 2017. – 28 с.
ISBN 978-985-550-956-2.

Содержатся сведения об основах векторной геометрии и методах решения конкретных векторных задач по определению усилий в плоских и пространственных строительных конструкциях с использованием начертательной геометрии.

Предназначено для студентов строительных специальностей дневной и заочной формы обучения. Учащиеся получают доступный, простой и достаточно точный инструмент для расчёта стержневых систем графическим способом.

УДК 744:621
ББК 22.151.3я7

ISBN 978-985-550-956-2

ВВЕДЕНИЕ

Методы векторной геометрии широко использовались в инженерной строительной практике для определения усилий в стержневых системах при проектировании пролётных строений мостов, ферм покрытия, опор линий электропередач и т. п.

Простота, оперативность и наглядность решения позволяют инженеру с достаточной точностью произвести предварительную оценку несущей способности и экономической целесообразности применения различных вариантов конструктивных решений.

Именно по этой причине и в наше время всеобщей компьютеризации проектного дела курс векторной и начертательной геометрии является неотъемлемой частью инженерного образования США [1].

В предлагаемом учебно-методическом пособии рассматриваются основы векторной геометрии и методики решения компланарных и некомпланарных задач по определению усилий, действующих в элементах стержневых строительных конструкциях, с использованием методов начертательной геометрии.

Издание ориентировано на студентов строительных специальностей в рамках дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная и машинная графика» и включает:

– основные понятия и терминологию векторной геометрии;

– методы определения равнодействующей нескольких некомпланарных векторов;

– примеры решения конкретных задач по расчёту усилий в элементах строительных конструкций.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ ВЕКТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Физические величины могут быть поделены на две группы – скалярные и векторные. Такие скалярные величины, как температура, объем и время, имеют только размер, а такие векторные величины, как сила, скорость, ускорение, имеют и размер и направление.

При изображении вектора одна точка, ограничивающая вектор, называется началом, а вторая – концом вектора. В конце вектора ставится стрелка (рис. 1.1). Для краткой записи вектор можно обозначить с помощью двух букв $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (первая соответствует началу, вторая – концу) или же одной буквы $\vec{a}$ (здесь начало и конец вектора не обозначены).

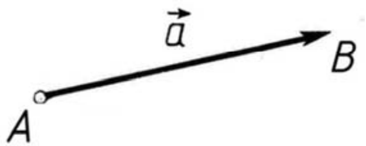

Рис. 1.1. Обозначение вектора

Определение 1.1. Расстояние между началом (хвостиком) и концом (острием) вектора называется его *длиной* и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $\vec{a}$.

Определение 1.2. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется *ноль-вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Определение 1.3. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или параллельных прямых. Векторы называются *неколлинеарными*, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях и не параллельны.

Определение 1.4. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они коллинеарные, одинаково направлены и равны по длине. Записывается это так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Из определения 1.4 следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства. При этом каждый новый вектор будет равен исходному. Однако следует отметить, что все сказанное выше связано с так называемыми свободными векторами. Кроме них существуют еще передвижные и определенные векторы. У свободных векторов точку приложения можно выбирать где угодно. У передвижных ее можно перемещать вдоль самого вектора (например, сила, приложенная к твердому телу). У определенных векторов точка приложения должна быть зафиксирована (например, сила, действующая на жидкость).

В инженерной практике достаточно часто сталкиваются с векторными задачами и двумя доступными методами их решения: один использует математику (векторную алгебру), другой – графический способ (векторную геометрию) [1–6]. Преимущество графического решения векторных задач очевидно, так как нет необходимости в громадном расчетном комплексе, существенно экономятся время и трудозатраты, а графические операции просты для понимания [1]. Кроме того, точность, которую позволяет обеспечить графический способ, вполне достаточна для решения большинства векторных задач.

1.1. Основная терминология

Вектор – отрезок прямой, графически отображающий векторную величину по размеру (длина с учетом масштаба) и направлению.

Линия действия – линия, вдоль которой действует вектор.

Конкурирующие векторы – векторы, линии действия которых пересекаются в общей точке.

Неконкурирующие векторы – векторы, линии действия которых не пересекаются в одной точке.

Компланарные векторы – векторы, принадлежащие одной плоскости (плоская система).

Некомпланарные векторы – векторы, не лежащие в одной плоскости (трехмерная система).

Результирующий (*равнодействующий*) *вектор* – вектор, заменяющий действие двух или более векторов как по размеру, так и по направлению.

Уравновешивающий вектор – вектор, противодействующий одному или нескольким векторам и поддерживающий систему в равновесии.

Пространственная схема (без масштаба) отражает только положение и направление векторов.

Векторная диаграмма – чертеж, отражающий сложение или разложение векторов, вычерченных с действительным направлением и размером (с учетом принятого масштаба).

1.2. Основные положения

1. Принцип перемещения говорит, что вектор может быть передвинут в любое место вдоль линии его действия без изменения эффекта, оказываемого этим вектором.
2. Два конкурирующих или параллельных вектора всегда лежат в одной плоскости. Если же речь идет о трех и более векторах, то они могут и не принадлежать одной плоскости, и тогда мы имеем трехмерную (пространственную) систему.
3. Каждый вектор в векторной диаграмме должен быть параллелен соответствующему вектору пространственной схемы их действия.
4. Векторная диаграмма нескольких сил, равновесных относительно некоторой точки, при использовании полигонального метода должна представлять собой замкнутую фигуру из векторов, последовательно составленных с учетом их направления. Это означает, что окончание последнего вектора должно упираться в начало первого, и доказывает, что уравновешенные силы не оказывают силового воздействия на точку.

5. В случае равновесия точки приняты следующие правила:

вектор в элементе конструкции, действующий из точки, означает растяжение в этом элементе;

вектор в элементе конструкции, действующий в направлении точки, означает сжатие в элементе.

2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛАНАРНЫХ ВЕКТОРОВ

2.1. Равнодействующая конкурирующих компланарных векторов

Обычно используются два метода: способ параллелограмма и полигональный способ. Последний требует наличия конструктивной схемы и применяется чаще. Примеры, использующие оба способа, приведены ниже.

Рассмотрим способ параллелограмма. Равнодействующей любых двух векторов, исходящих из одной точки, является диагональ параллелограмма, сторонами которых являются эти векторы.

П р и м е р

На рис. 2.1 дана пространственная схема трех сил $\vec{a} = 50\#$, $\vec{b} = 180\#$ и $\vec{c} = 90\#$, и требуется найти их равнодействующую. Знаком # обозначена условная размерная величина.

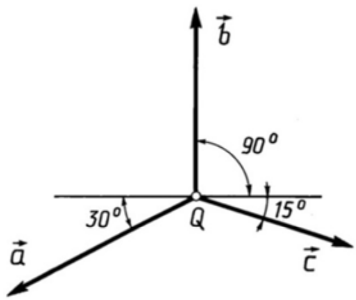

Рис. 2.1. Пространственная схема векторов

На рис. 2.2 из точки пересечения векторов Q в принятом масштабе по соответствующему направлению откладываем указанные выше размерные величины, т. е. строим векторную диаграмму.

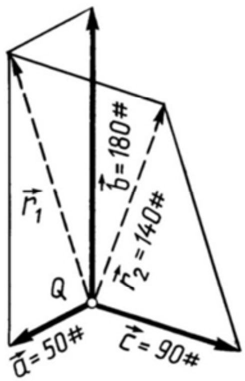

Рис. 2.2. Сложение векторов способом параллелограмма

Прежде всего находим равнодействующую $\vec{r_1}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Затем находим равнодействующую $\overrightarrow{r_2}$ как диагональ параллелограмма со сторонами $\vec{r_1}$ и $\vec{c}$. Полученный вектор $\overrightarrow{r_2}$ и является равнодействующим по отношению к трем векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Вектором, уравновешивающим действие векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, будет вектор, действующий через точку Q противоположно равнодействующему вектору $\overrightarrow{r_2}$ и равный ему по размеру.

Порядок сложения векторов в способе параллелограмма не имеет значения, но векторы всегда должны размещаться в диаграмме началом друг к другу (т. е. выходить из общей точки Q).

Разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет равна сумме двух векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, где вектор $-\vec{b}$ равен по величине вектору $\vec{b}$, но направлен в противоположную сторону на той же самой линии действия, т. е. если вектор

$$\overrightarrow{r_2} = \vec{a} - \vec{b},$$

то

$$\overrightarrow{r_2} + \vec{b} = \vec{a} \text{ (рис. 2.3).}$$

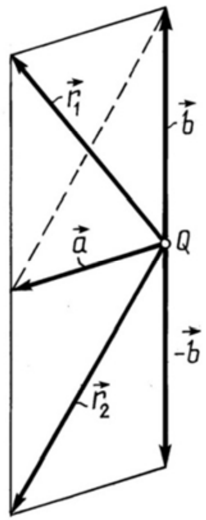

Рис. 2.3. Вычитание векторов способом параллелограмма

В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна диагональ будет равна их сумме, а другая – разности.

Полигональным способом те же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ последовательно составляем, соблюдая их длину и направление, начиная в данном примере с вектора $\vec{a}$, выходящего из точки Q. При этом предыдущий вектор $(\vec{a})$ должен острием упираться в последующий $(\vec{b})$ и т. д. (рис. 2.4).

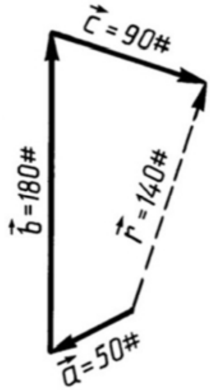

Рис. 2.4. Полигональный способ сложение векторов

Последний вектор $\vec{r}$, замыкающий полигональную ломаную $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, выходящий из точки взаимодействия и упирающийся своим острием в острие вектора $\vec{c}$, и будет равнодействующим системы исходных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Первый и второй способ решения дали один и тот же результат. Равнодействующий вектор равен 140#.

2.2. Равнодействующая неконкурирующих компланарных векторов

П р и м е р

Рассмотрим последовательность определения равнодействующей векторов сил $\vec{a} = 20\#$, $\vec{b} = 15\#$, $\vec{c} = 25\#$, действующих на балку (рис. 2.5).

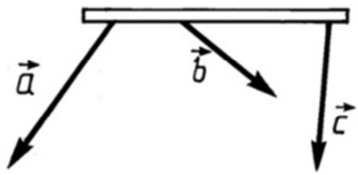

Рис. 2.5. Пространственная схема сил, действующих на балку

По линии действия передвигаем два вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$ в точку пересечения Q и находим равнодействующую способом параллелограмма (рис. 2.6).

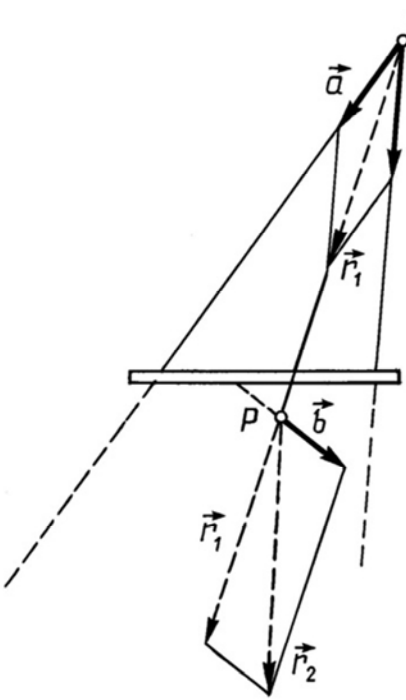

Рис. 2.6. Сложение векторов способом параллелограмма с использованием метода линии действия

Затем, используя найденную равнодействующую $\vec{r_1}$, суммируем ее с третьим исходным вектором $\vec{b}$ тем же способом и получаем окончательную равнодействующую $\vec{r_2}$.

Размер и направление равнодействующей тех же векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, действующих на балку (см. рис. 2.5), найдены полигональным способом построения векторной диаграммы (рис. 2.7).

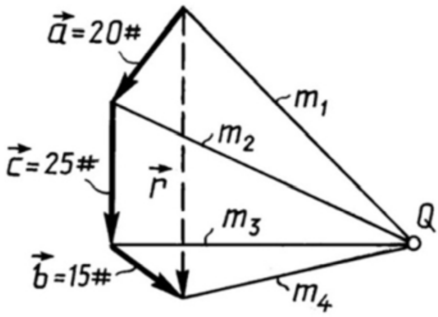

Рис. 2.7. Сложение векторов полигональным составным способом. Полигональная векторная диаграмма действующих сил

Размер равнодействующей по первому (см. рис. 2.6) и второму методу (см. рис. 2.7) составляет примерно 50#.

Начальные и конечные точки векторов на векторной диаграмме соединяем с точкой пересечения конструктивных линий m_1, m_2, m_3, m_4 в точке *Q*. Отметим, что линии m_2 и m_3 пересекаются с двумя векторами.

Для определения направления и точки приложения равнодействующего вектора $\vec{r}$ строим пространственную схему векторов сил (рис. 2.8). Так как m_2 пересекается с векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$, на пространственной схеме параллельно m_2 между линией действия вектора $\vec{a}$ проводим прямую m_2' к вектору $\vec{c}$ из некоторой точки *E* до пересечения с линией действия вектора $\vec{c}$ в точке *D*. Далее таким же образом из точки *D* параллельно m_3 проводим прямую m_3' до пересечения с линией действия вектора $\vec{b}$ в точке *F*. Так как m_1 пересекается только с вектором $\vec{a}$, а m_4 – только с вектором $\vec{b}$, из точки *E* проводим m_1' параллельно m_1 и из точки *F* проводим m_4' параллельно m_4.

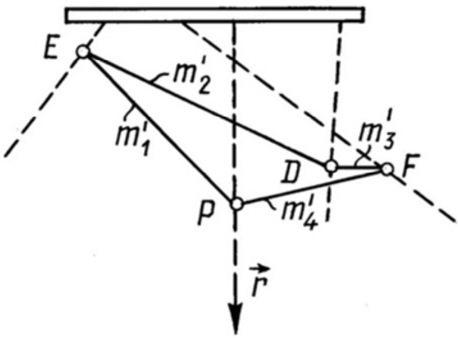

Рис. 2.8. Сложение векторов полигональным составным способом. Пространственная схема векторов сил

Через точку P пересечения m_1' и m_4' пройдет линия действия равнодействующей векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, так как m_1 и m_4 пересекают равнодействующую $\vec{r}$ на векторной диаграмме (см. рис. 2.7).

3. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ КОНКУРИРУЮЩИХ НЕКОМПЛАНАРНЫХ ВЕКТОРОВ

Так как конкурирующие некомпланарные векторы не лежат в одной плоскости, необходимо, как минимум, две проекции векторов, чтобы определиться с их размером и положением в пространстве. После построения векторных диаграмм в каждой из проекций получены две проекции равнодействующей, по которой и определяется ее натуральный (действительный) размер любым из известных способов преобразования проекций.

П р и м е р

На рис. 3.1 дана пространственная схема трех векторов силы $\vec{a} = 250\#$, $\vec{b} = 150\#$, $\vec{c} = 170\#$. Требуется определить их равнодействующую.

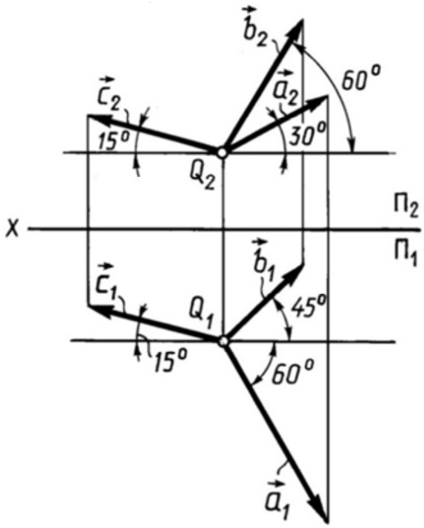

Рис. 3.1. Пространственная схема трех некомпланарных векторов

Прежде чем приступить к построению векторной диаграммы, требуется определить (в принятом масштабе) размеры проекций векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, соответствующие их заявленным в условии действительным размерам.

Для этого используются методы преобразования проекций начертательной геометрии (рис. 3.2).

Принимаем горизонтальную и фронтальную проекции точки Q как базовые. Через них проводим проекции прямых, параллельные проекциям вектора $\vec{a}$ (см. рис. 3.1, 3.2). На этой прямой задаем произвольную точку *1*. Выполняем процедуру замены плоскостей проекций Π_1 / Π_2 на Π_1 / Π_4, размещая новую ось проекций x' параллельно горизонтальной проекции отрезка $Q_1 1_1$ (x' параллельна $Q_1 1_1$). На новой проекции отрезка $Q_4 1_4$ от точки Q_4 откладываем действительную длину вектора $\vec{a} = 250\#$ в принятом ранее масштабе и, проведя линии связи, возвращаем полученную конечную точку вектора $\vec{a}$

в исходные горизонтальную и фронтальные плоскости. Используя полигональный способ, из острия вектора $\vec{a}$ проводим две проекции линии, параллельные вектору $\vec{b}$, на которых принимаем произвольную точку *2*.

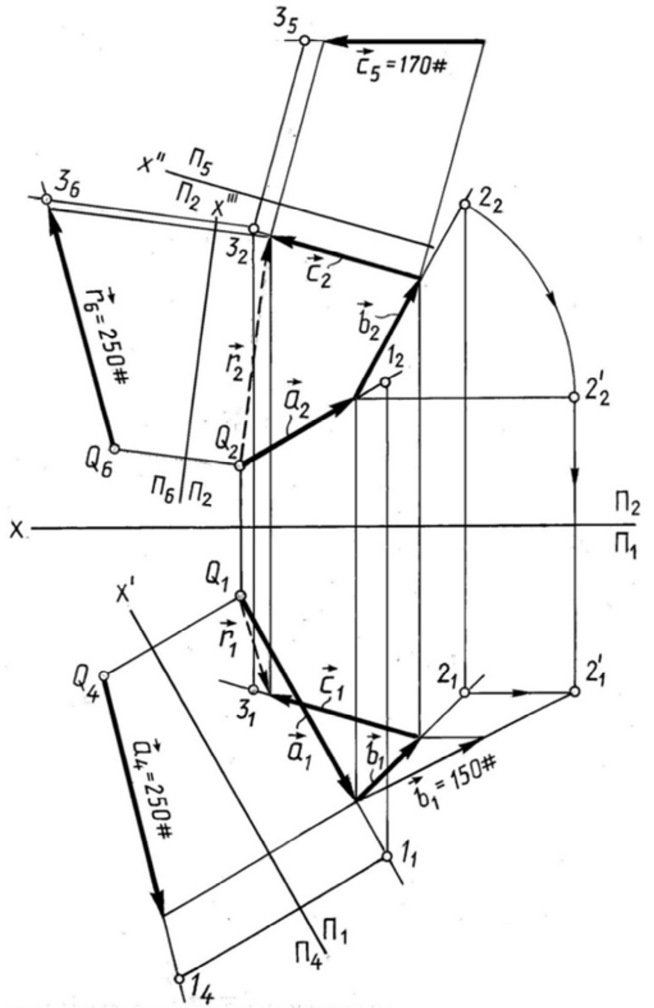

Рис. 3.2. Определение равнодействующей трех некомпланарных векторов полигональным способом

Используя способ поворота вокруг проецирующей оси, определяем длины $\overrightarrow{b_1}$ и $\overrightarrow{b_2}$ проекций вектора $\vec{b}$, имеющего реальный размер 150#. Из острия вектора $\vec{b}$ проводим две проекции прямой, параллельной вектору $\vec{c}$, на которых принимаем произвольную точку *3*.

Заменяем систему проекций Π_1/Π_2 на новую Π_5/Π_2, для чего проводим новую ось проекций x'', параллельную $\overrightarrow{c_2}$, т. е. фронтальной проекции вектора $\vec{c}$, получаем проекцию точки 3_5. Через данную точку строим новую проекцию линии действия вектора $\vec{c}$, на которой и откладываем его действительную длину $\overrightarrow{c_5} = 170\#$. Затем возвращаемся в систему плоскостей проекций Π_1 и Π_2 и получаем реальные длины проекций вектора $\vec{c}$ ($\overrightarrow{c_2}$ и $\overrightarrow{c_1}$). Соединив начальные и конечные точки горизонтальной и фронтальной проекции полигона векторной диаграммы, получаем соответствующие проекции $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$ равнодействующей векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Выполнив процедуру замены плоскостей проекций Π_1/Π_2 на Π_2/Π_6, получаем действительный размер r_6 равнодействующего вектора $\vec{r} = 250\#$.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

4.1. Разложение вектора на два составляющих компонента

Каждый вектор может быть разложен на две составляющие, действующие в заданном направлении, при этом используется все то же правило параллелограмма.

П р и м е р

Дана некоторая сила $\vec{a} = 1000\#$, действующая на блок в точке Q (рис. 4.1, *а*). Требуется найти силы, действующие в направлении прямых m и n, которые могут заменить силу $\vec{a}$.

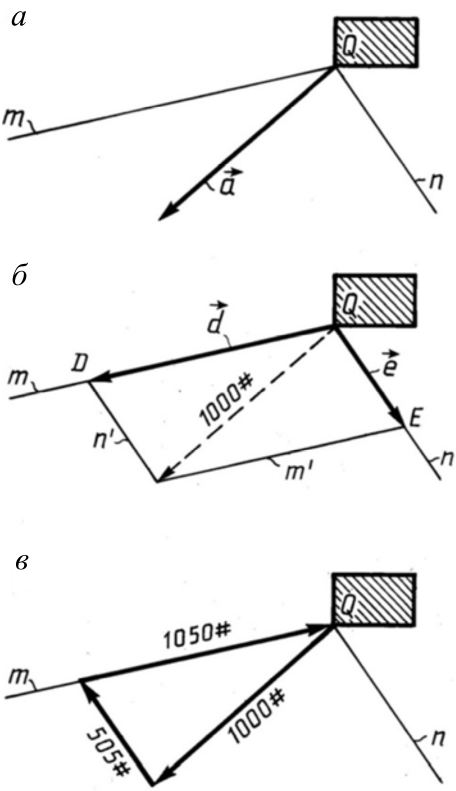

Рис. 4.1. Разложение вектора на две составляющие

Используя приемлемый масштаб, от точки Q вдоль линии действия вектора силы $\vec{a}$ откладываем соответствующую 1000# длину (рис. 4.1, *б*). Затем из конца (острия) вектора $\vec{a}$ проводим прямые n' параллельно n и m' параллельно m до пересечения $n' \cap m$ в точке D и $m' \cap n$ в точке E. Полученные отрезки QD и QE и будут являться векторами сил $\vec{d}$ и $\vec{e}$, заменяющими действие вектора силы $\vec{a}$ на блок. Измеренные с учетом масштаба длины указанных отрезков и дадут размеры векторов $\vec{d} = 1050\#$, $\vec{e} = 505\#$.

Для определения двух противодействующих сил, необходимых для сохранения равновесия блока с действующей на него силой $\vec{a}$, используем полигональный способ.

Необходимые графические действия, выполненные на рис. 4.1, *в*, просты и в комментариях не нуждаются.

4.2. Разложение вектора на три некомпланарные составляющие компонента

Любой вектор трехмерного пространства может быть разложен на три конкурирующих вектора заданного направления и равного действия на точку приложения.

При использовании проецирующей плоскости необходимо преобразовать плоскость, в которой лежат два вектора силы из трех принятых, в проецирующую (например, заменой основной системы ортогональных плоскостей на вспомогательную).

Это позволяет уменьшить число компонентов заменяющих векторов от трех до двух и происходит за счет того, что прямые действия векторов, лежащих на вырожденной проекции их общей плоскости, сольются в одну прямую. Используя еще одну замену плоскостей проекций, разделим общий компонент двух векторов на два с направлением их действия в соответствии с векторной диаграммой.

П р и м е р

Дана тренога, на которой подвешен груз весом 250# (рис. 4.2). Требуется определить усилия, действующие в каждой из ног.

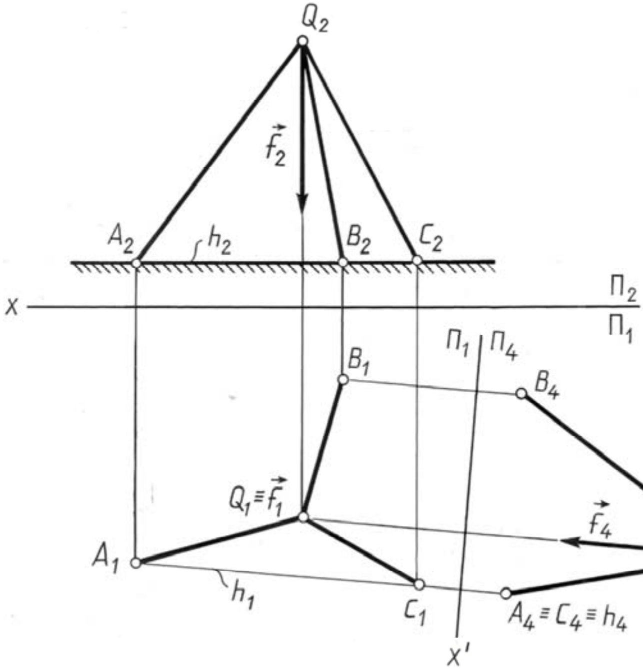

Рис. 4.2. Разложение вектора на три некомпланарные составляющие
с использованием проецирующей плоскости.
Пространственная схема треноги с грузом

Обращаем внимание на то, что все три ноги опираются на горизонтальную плоскость. Значит, через основания любых двух ног мы можем провести горизонтальные прямые. Лежащие на них отрезки между основаниями ног проецируются на $П_1$ в натуральную величину. Выполняем первую замену плоскостей проекции, разместив новую вертикальную плоскость $П_4$ перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 (см. рис. 4.2). На новой проекции линии действия векторов a_4 и c_4 сольются в одну.

Далее чертим горизонтальные и вертикальные проекции диаграмм векторов сил и на линии действия $\overrightarrow{f}$ в принятом масштабе откладываем расстояние, соответствующее заданной нагрузке: $\overrightarrow{f_4} = 250\#$ (рис. 4.3).

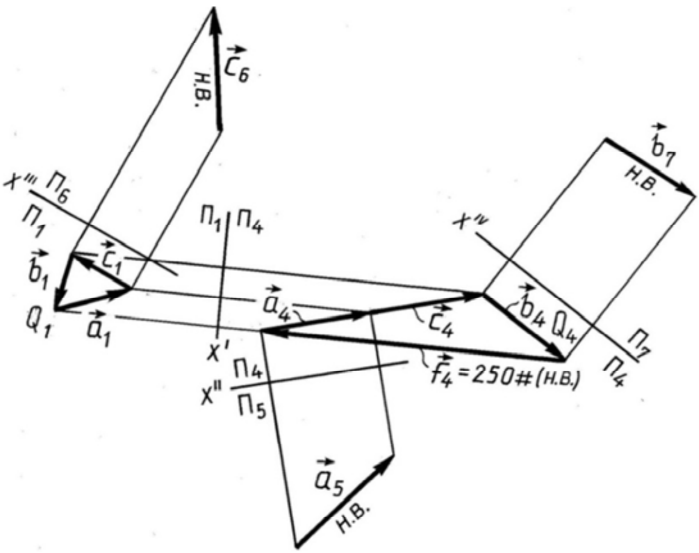

Рис. 4.3. Разложение вектора на три некомпланарные составляющие с использованием проецирующей плоскости. Векторные диаграммы усилий

На векторных диаграммах направления линий действия векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\overrightarrow{f}$ на горизонтальной Π_1 и новой вертикальной плоскости Π_4 принимаем параллельными соответствующим линиям их действия на пространственной схеме на рис. 4.2.

Проекции векторов $\overrightarrow{a_4}$ и $\overrightarrow{c_4}$ будут лежать на одной прямой, что облегчает задачу построения проекций векторной диаграммы на этой плоскости (Π_4). Необходимо помнить, что для равновесия системы векторные диаграммы должны быть замкнуты. Силы, действующие в опорах треноги, должны уравновешивать действующий груз.

Далее по уже знакомому алгоритму определяем натуральные длины векторов сил $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, используя, как в данном примере, способ замены плоскостей проекций или другие известные преобразования чертежа. В результате измеренные в принятом масштабе натуральные значения векторов сил составят $\vec{a} = 105\#$, $\vec{b} = 88\#$, $\vec{c} = 110\#$. Отметим, что вектор $\vec{b}$ действует в направлении точки Q приложения груза $\vec{f}$. А это значит, что во всех трех опорах треноги действует сжатие.

Использование вырожденной проекции одного из компонентов разложения силы заключается в преобразовании проекции линий действия сил таким образом, чтобы одна из них вырождилась в точку. Это позволяет действующие силы на векторной диаграмме во вспомогательной проекции свести к двум.

П р и м е р

Используем то же условие, что и ранее (см. рис. 4.2). Прежде чем получить вырожденную проекцию линии действия вектора $\vec{b}$, преобразуем отрезок QB в линию уровня (рис. 4.4).

Вводим новую вертикальную плоскость Π_4, параллельную $\overrightarrow{b_1}$, и получаем проекцию опоры Q_4B_4 в натуральную величину. Затем размещаем новую плоскость проекций Π_5 перпендикулярно Q_4B_4, и этот отрезок в новой проекции вырождается в точку, т. е. $Q_5 = B_5$, что существенно упрощает задачу. На векторной диаграмме в приемлемом масштабе размещаем силу $\vec{f} = 250\#$, учитывая, что ее вертикальный вектор спроецируется на вертикальную плоскость проекций Π_4 в натуральную величину (рис. 4.5). Учитывая, что проекция $\overrightarrow{f_4}$ представляет собой натуральную длину этого вектора, проекция $\overrightarrow{f_5}$ будет параллельна оси проекций X'', что является свойством любого отрезка прямой уровня. На векторной диаграмме в системе плоскостей проекций Π_4 / Π_5 делим силу $\vec{f}$ на две составляющие $\overrightarrow{a_5}$ и $\overrightarrow{c_5}$, так как проекция $\overrightarrow{b_5}$ вырождается в точку. Линии действия векторов проводим параллельно соответствующим линиям в тех же проекциях на пространственной схеме (см. рис. 4.4).

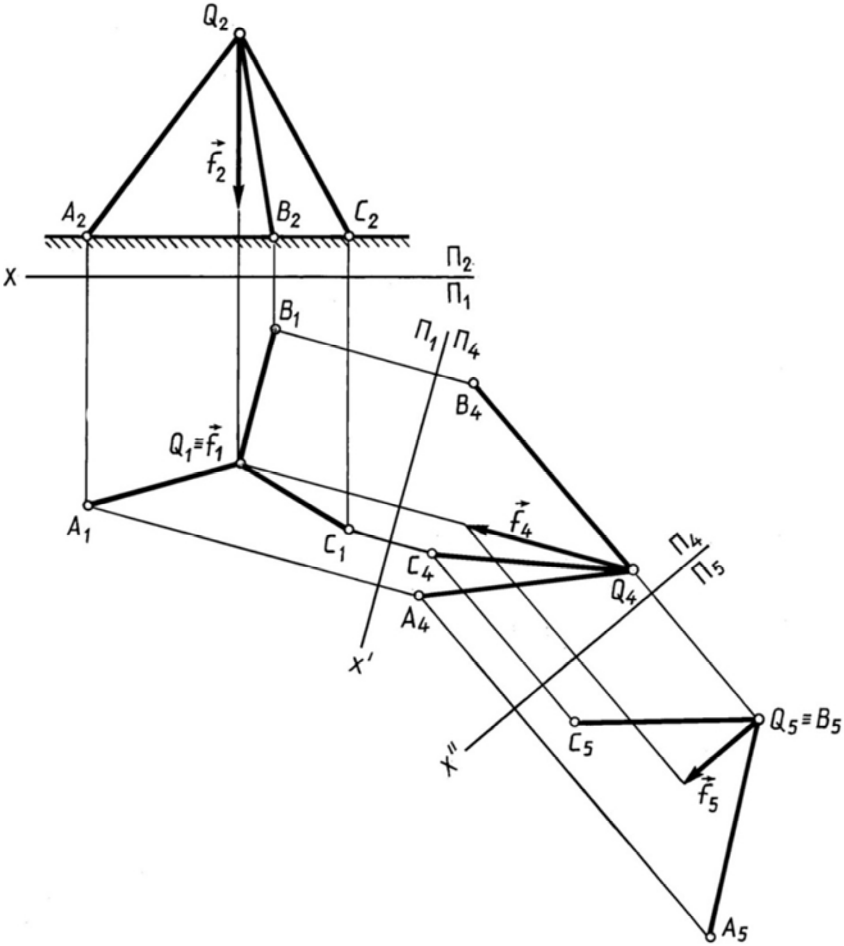

Рис. 4.4. Разложение вектора на три некомпланарные составляющие с преобразованием линии действия одной из них в проецирующую. Пространственная схема треноги с грузом

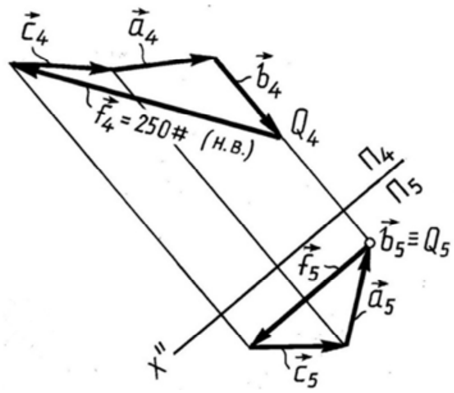

Рис. 4.5. Разложение вектора на три некомпланарные составляющие с преобразованием линии действия одной из них в проецирующую. Векторные диаграммы усилий

Определяем составляющий вектор $\overrightarrow{b_4}$ как замыкающий полигон на плоскости $П_4$. При этом $\overrightarrow{b_4}$ соответствует его натуральной длине, так как на смежной плоскости проекций $П_5$ он проецируется в точку ($\overrightarrow{b_5}$). Векторы должны быть начерчены в непрерывной последовательности в двух проекциях векторной диаграммы. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, совмещенные с соответствующими опорами треноги, будут направлены в сторону точки Q, что означает действие в них сжимающих напряжений. Измерив натуральные длины векторов с учетом принятого масштаба, получаем размеры действующих в опорах усилий: $\vec{a} = 105\#,\ \vec{b} = 88\#,\ \vec{c} = 110\#$.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ МАЧТЕ, ПОДДЕРЖАННОЙ ДВУМЯ ТРОСАМИ

Опираясь на вышеизложенную теорию, рассмотрим конкретный пример определения усилий в трехмерном инженерном сооружении.

Дана конструктивная схема вертикальной мачты и поддерживающих ее двух наклонных тросов (рис. 5.1).

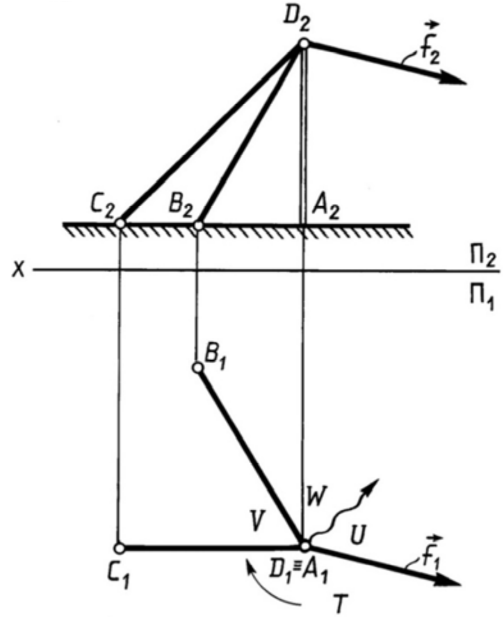

Рис. 5.1. Определение усилий в вертикальной мачте и поддерживающих ее тросах. Пространственная схема мачты, нагруженной силой

На мачту действует усилие $\vec{f} = 1000\#$. Используем векторный масштаб 25 мм $= 1000\#$. Определить усилия, действующие на мачту и в тросах.

Для решения задачи используем способ обхода зон действия сил на одной из проекций пространственной схемы по заданному направлению (показано стрелкой). Центром обхода на горизонтальной проекции схемы будет вырожденная проекция мачты A_1.

На горизонтальной проекции схемы заглавными буквами обозначим зоны действия сил вокруг точки их приложения D_1. С учетом принятого направления обхода зон действия сил вертикально действующую в мачте силу будем читать как *WU*, силу *f* – как *UT*, силу в тросе *C* – как *TV*, а в тросе *B* – как *VW*.

На векторной диаграмме (рис. 5.2) известную силу $\vec{f}$ (*UT*) размещаем следующим образом: на обеих проекциях чертим проекции $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$ параллельно их проекциям на пространственной схеме (см. рис. 5.1).

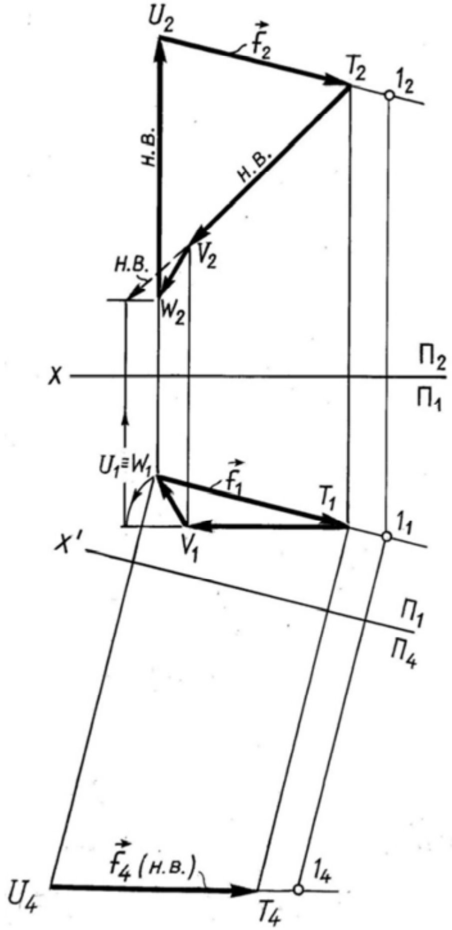

Рис. 5.2. Определение усилий в вертикальной мачте и поддерживающих ее тросах. Векторные диаграммы усилий, действующих на мачту и тросы

На проекциях линий действия $\overrightarrow{f_1}$ и $\overrightarrow{f_2}$ выбираем произвольную точку *1* и заменяем плоскость Π_2 на новую вертикальную плоскость Π_4, которую размещаем параллельно горизонтальной проекции $\overrightarrow{f_1}$. На проекции $U_4 1_4$ от начальной точки U_4 с учетом масштаба откладываем натуральный размер вектора $\overrightarrow{f} = 1000\#$ с последующим переносом полученной конечной точки T_4 в основные проекции Π_1 / Π_2.

Следующим по порядку согласно направлению обхода сил на пространственной схеме будет вектор *TV*. На обеих проекциях векторной диаграммы проводим линии, параллельные линиям D_1C_1 и D_2C_2. Вектор *VW* должен замкнуть треугольник векторов на горизонтальной проекции векторной диаграммы (см. рис. 5.2). Так как вектор *WU*, действующий в мачте, вертикален, то на горизонтальной проекции он вырождается в точку. Строим проекции вектора *VW* на векторной диаграмме, проведя их параллельно проекциям D_1B_1 и D_2B_2 на пространственной (конструктивной схеме). Пересечение построенных линий и определит положение проекций точки *V*. Для определения натуральной длины отрезка *VW* используем способ поворота относительно проецирующей оси. Построения очевидны и пояснений не требуют. Замыкаем полигон на фронтальной проекции векторной диаграммы, соединяем точки W_2 и U_2. Эта проекция вектора *WU* является его натуральной величиной. Натуральные длины векторов позволяют с учетом принятого масштаба определить усилия, действующие в элементах рассматриваемого инженерного сооружения.

С учетом базовых принципов в мачте будет действовать вектор сжимающей силы $WU = 1210\#$, а в поддерживающих тросах растягивающие силы: $TV = 1040\#$, $VW = 370\#$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Minor, Clyde Hawk. Schaum's outlaine series of Theory and Problems of Descriptive Geometry / Clyde Hawk Minor. – Mc Graw – Hill, Inc., USA, 192. – 212 p.

2. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огинский. – М. : Наука, 1988. – 271 с.

3. Волков, Т. Ф. Тензоры и векторы : учебное пособие / Т. Ф. Волков. – Долгопрудный: МФТИ, 1976. – 143 с.

4. Ефимов, Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит R, 2003. – 584 с.

5. Клейн, Ф. А. Высшая геометрия / Ф. А. Клейн. – Изд. 2-е. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

6. Клейн, Ф. Высшая геометрия : пер. с нем. / Ф. Клейн. – Изд. 3-е. – Либрком, 2009. – 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ТАРАСОВ Виктор Васильевич
САДОВСКИЙ Юрий Игоревич
ТЕЛЕШ Евгений Александрович
ШУБЕРТ Ирина Михайловна

РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 15.02.2017. Формат $60\times84\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,27. Тираж 150. Заказ 1042.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.