УДК 519.6

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Докт. физ.-мат. наук, проф. МЕЛЕШКО И. Н.,
канд. физ.-мат. наук, доц. ЛАСЫЙ П. Г., асп. ДОВГА Ю. А.

Белорусский национальный технический университет

Интегралы с известной плотностью:

$$J_1(x)=J_1(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln|t-x|\,dt,\ \ x\in[-1,1];\quad (1)$$

$$J_2(x)=J_2(f;x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln|t-x|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ x\in[-1,1];\quad (2)$$

$$J(\varphi)=J(f;\varphi)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau,\ \ \varphi\in[-\pi,\pi],\quad (3)$$

а также интегральные уравнения, содержащие такие операторы, встречаются в решениях важных задач из разных разделов механики, физики и математической физики (например, [1, 2] и библиографии в них).

Полученные в данной статье квадратурные формулы для интегралов (1)–(3) имеют неотрицательные коэффициенты, сравнительно просты, устойчивы и позволяют оценивать погрешность вычислений.

1. Преобразуем интегралы (1), (2) и определим аппроксимацию плотностей этих интегралов:

$$J_1(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln\frac{2}{|t-x|}dt+\frac{\ln 2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)dt;\quad (4)$$

$$J_2(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln\frac{2}{|t-x|}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+$$
$$+\frac{\ln 2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.\quad (5)$$

Зададим на отрезке $[-1,1]$ систему точек

$$x_k=kh,\ k=-n,\ \dots,-1,\ 0,1,\dots n,\ \ h=\frac{2}{2n+1}$$

и аппроксимацию плотности $f(x)$ на этом отрезке определим формулой

$$f(t)\approx\tilde f(x)=\sum_{k=-n}^{n}\theta_k(x)f(x_k),\quad (6)$$

в которой $\theta_k(x)=1,$ если $x\in\left[x_k-\frac{h}{2};\ x_k+\frac{h}{2}\right]$ и $\theta_k(x)=0,$ если $x\notin\left[x_k-\frac{h}{2};\ x_k+\frac{h}{2}\right].$

Очевидно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [–1; 1], то

$$\left|f(x)-\tilde f(x)\right|\le\omega(f;h),\ \ x\in[-1,1],\quad (7)$$

где $\omega(f;\,h)=\max\limits_{\substack{x',x''\in[-1,1]\\ |x'-x''|\le h}}\left|f(x'')-f(x')\right|$ – модуль непрерывности функции $f(x)$.

Если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то с помощью формулы Тейлора легко установить, что

$$\left|f(x)-\tilde f(x)\right|\le\frac{M_1}{2}h,\ \ x\in[-1,1],\quad (8)$$

где $M_1=\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|f'(x)\right|.$

2. Подставив в выражение (4) для $J_1(f;x)$ вместо плотности $f(x)$ ее приближения (6), получим квадратурную формулу

$$J_1(f;x) \approx J_1(\tilde{f};x) = \tilde{J}_1(x) =$$
$$= \sum_{k=-n}^{n} A_k(x) f(x_k) + \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} f(x_k), \tag{9}$$

в которой коэффициенты

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{2}{|t-x|} dt. \tag{10}$$

Очевидно, что все $A_k(x)$ неотрицательны для всех $x \in [-1; 1]$.

Вычисляя интегралы в правой части равенства (10), находим

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi}\left[(1+\ln 2)h + \left(x_k - \frac{h}{2} - x\right)\ln\left|x_k - \frac{h}{2} - x\right| - \right.$$
$$\left. -\left(x_k + \frac{h}{2} - x\right)\ln\left|x_k + \frac{h}{2} - x\right|\right].$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (9).

Теорема 1. *Если плотность интеграла* $J_1(f;x)$ *непрерывна на отрезке* $[-1;\ 1]$, *то имеет место равномерная по* $x \in [-1;\ 1]$ *оценка погрешности*

$$\left|J_1(x) - \tilde{J}_1(x)\right| = \frac{2}{\pi}\omega(f,\ h). \tag{11}$$

Если же плотность f(x) – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$\left|J_1(x) - \tilde{J}_1(x)\right| = \frac{M_1}{\pi} h, \quad x \in [-1,\ 1]. \tag{12}$$

Доказательство:

$$\left|J_1(x) - \tilde{J}_1(x)\right| = \left|J_1(f,x) - J_1(\tilde{f},\ x)\right| =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left|\int \left[f(t) - \tilde{f}(t)\right] \ln|t-x|\, dt\right| \le \tag{13}$$
$$\le \max_{x\in[-1,\ 1]} \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left|\ln|t-x|\right| dt.$$

Заметив, что $I(x) = \int_{-1}^{1} \left|\ln|t-x|\right| dt$ является четной функцией, положим $0 \le x \le 1$ и преобразуем этот интеграл

$$I(x) = \int_{-1}^{0} \left|\ln|t-x|\right| dt + \int_{0}^{1} \left|\ln|t-x|\right| dt =$$
$$= -\int_{-1}^{0} \left|\ln|t+x|\right| dt - \int_{0}^{1} \ln|t-x|\, dt =$$
$$= -\int_{0}^{1-x} \left|\ln|t+x|\right| dt - \int_{1-x}^{1} \ln|t+x|\, dt - \int_{0}^{1} \ln|t-x|\, dt.$$

После исследования функции

$$I(x) = 2 - 2x + \ln\frac{1+x}{1-x} + x\ln(1-x^2), \quad x \in [0,\ 1]$$

находим, что

$$\max_{x\in[-1,\,1]} I(x) = I(0) = 2. \tag{14}$$

Из соотношений (13), (14) и неравенств (7), (8) вытекают оценки (11), (12).

3. Заменим плотность $f(x)$ в представлении интеграла $J_2(f,x)$ (5) по формуле (6). В результате получим квадратурную формулу для этого интеграла

$$J_2(f,x) \approx J_2(\tilde{f},\ x) \approx \tilde{J}_2(x) =$$
$$= -\sum_{k=-n}^{n} A_k(x) f(x_k) - \frac{\ln 2}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} (\eta_k^+ - \eta_k^-) f(x_k), \tag{15}$$

где $\eta_k^{\pm} = \arccos\left(x_k \pm \dfrac{h}{2}\right)$, а коэффициенты

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \ln\frac{2}{|t-x|} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{16}$$

Снова замечаем, что все $A_k(x)$ неотрицательны для всех $x \in [-1,\ 1]$.

Вычислим коэффициенты (16). Имеем последовательно:

$$\int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \eta_k^- - \eta_k^+; \tag{17}$$

$$-\int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \ln|t-x| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\eta_k^-}^{\eta_k^+} \ln|\cos\sigma - \cos\eta|\, d\sigma =$$
$$= (\eta_k^+ - \eta_k^-)\ln 2 + 2\int_{\frac{\eta_k^- + \eta}{2}}^{\frac{\eta_k^+ + \eta}{2}} \ln|\sin\tau|\, d\tau + 2\int_{\frac{\eta_k^- - \eta}{2}}^{\frac{\eta_k^+ - \eta}{2}} \ln|\sin\tau|\, d\tau. \tag{18}$$

Обращаясь к формуле разложения логарифма в ряд по косинусам и пользуясь равенствами (17), (18), после простых преобразований найдем, что

$$A_k(x)=\frac{1}{\pi}\Big[2(\eta_k^- -\eta_k^+)\ln 2+N^2(\eta-\eta_k^-)-$$

$$-N^2(\eta+\eta_k^+)+N^2(\eta-\eta_k^+)-N^2(\eta-\eta_k^-)\Big],$$

где η = arcos x, а функция $N^2(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k^2}$ – значения мнимой части полилогарифма второго порядка на единичной окружности $L^2(z)=$ $=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$ (дилогарифма Эйлера) [3]. Известно также, что $N^2(\theta)$ связана с функцией Лобачевского [4]

$$L(\theta)=-\int_0^\theta \ln|\cos\tau|d\tau,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

равенством [3]

$$N^2(\theta)=(\pi-\theta)\ln 2-2L\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right).$$

Получим теперь неравенства для оценки погрешности квадратурной формулы (15)

$$\left|J_2(x)-\tilde J_2(x)\right|=\left|J_2(f,x)-J_2(\tilde f,x)\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\tilde f(t)\right]\ln|t-x|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right|\le \qquad (19)$$

$$\le\max_{x\in[-1,1]}\left|f(t)-\tilde f(t)\right|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left|\ln|t-x|\right|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

С помощью неравенств (7), (8), (19) и известной оценки [5]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left|\ln|t-x|\right|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\le 3\ln 2$$

легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть плотность интеграла* $J_2(f,x)$ *непрерывна на отрезке* $[-1,1]$, *тогда имеет место следующая, равномерная по* $x\in$ $\in[-1,1]$, *оценка погрешности квадратурной формулы (15):*

$$\left|J_2(x)-\tilde J_2(x)\right|\le 3\omega(f;h)\ln 2,$$

если же $f(x)$ *– непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то*

$$\left|J_2(x)-\tilde J_2(x)\right|\le\frac{3}{2}M_1\ln 2.$$

4. Квадратурную формулу для интеграла $J(\varphi)$ (3) будем строить и исследовать аналогично. Возьмем на отрезке $[-\pi,\pi]$ систему точек

$$\varphi_k=kh,\ k=-n,\ ...,\ -1,\ 0,\ 1,\ ...,\ n,\quad h=\frac{2\pi}{2n+1}$$

и приблизим плотность интеграла $J(f;\varphi)$ на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi)\approx\tilde f(\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}\theta_k f(\varphi_k),$$

где $\theta_k(\varphi)=1$, когда $\varphi\in\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\ \varphi_k+\frac{h}{2}\right]$ и $\theta_k(\varphi)=0$, если $\varphi\notin\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\ \varphi_k+\frac{h}{2}\right]$.

Получается следующая квадратурная формула:

$$J(f;\varphi)\approx J(\tilde f;\varphi)=\tilde J(\varphi)=-\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi)f(\varphi_k), \qquad (20)$$

где

$$A_k(\varphi)=-\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau. \qquad (21)$$

Из представления (21) для коэффициентов видно, что все они неотрицательны для всех $\varphi\in[-\pi,\pi]$.

Для вычисления интегралов в (21) воспользуемся разложением логарифма в ряд по косинусам

$$\int_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau=2\int_{\varphi_k-\frac{h}{2}-\varphi}^{\varphi_k+\frac{h}{2}-\varphi}\ln|\sin t|dt=$$

$$= -2\left[t\ln 2 + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 4t}{2\cdot 2^2} + \ldots\right]\Bigg|^{\frac{\varphi_k + \frac{h}{2} - \varphi}{2}}_{\frac{\varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi}{2}}.$$

Теперь после простых преобразований для коэффициентов $A_k(\varphi)$ получается единая формула

$$A_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\left[h\ln 2 + N^2\left(\varphi - \varphi_k + \frac{h}{2}\right) - \right.$$

$$\left. -N^2\left(\varphi - \varphi_k - \frac{h}{2}\right)\right],$$

где функция $N^2(\theta)$ определена выше в п. 3.

Займемся оценкой погрешности квадратурной формулы (20). Очевидно, что в случае непрерывности плотности $f(\varphi)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$\left|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)\right| \le \omega(f, \varphi),\ \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (22)$$

Если же $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке, то

$$\left|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)\right| \le \frac{M_1}{2}h,\ \varphi \in [-\pi, \pi],$$
$$M_1 = \max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}\left|f'(\varphi)\right|. \quad (23)$$

Сравнивая $J(\varphi)$ и $\tilde{J}(\varphi)$, получаем

$$\left|J(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)\right| = \left|J(f;\varphi) - J(\tilde{f};\varphi)\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\tau) - \tilde{f}(\tau)\right]\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau\right| \le \quad (24)$$

$$\le \max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}\left|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)\right|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|\right|d\tau.$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|\right|d\tau = 2\ln 2. \quad (25)$$

Из неравенств и соотношений (22)–(25) вытекает следующее.

Теорема 3. *В случае непрерывности плотности интеграла* $J(f;\varphi)$ *на отрезке* $[-\pi, \pi]$

$$\left|J(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)\right| \le 2\ln 2\,\omega(f;h),\ \ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Если же плотность $f(\varphi)$ *– непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то равномерно по* $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$$\left|J(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)\right| \le \ln 2\, M_1.$$

5. В качестве примера возьмем интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int(\sin\varphi + \tau\cos\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau,\ \ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Нетрудно получить для него точное равенство

$$J(\sin\tau + \tau\cos\tau;\varphi) = -2\sin\varphi\,\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Результаты численного эксперимента по точной формуле и с помощью квадратурной формулы (20) приводим в табл. 1.

Таблица 1

φ	Число верных знаков (n = 10)	Число верных знаков (n = 50)
$\pi/12$	2	3
$\pi/4$	2	4

В Ы В О Д

Для интегралов с логарифмической особенностью специального вида получены квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами. Равномерные оценки погрешностей приближенных формул позволяют вычислять такие интегралы с заданной точностью.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Александров, В. М.** Контактные задачи тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 487 с.

2. **Габдулхаев, Б. Г.** Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. – 288 с.

3. **Пыхтеев, Г. Н.** Полилогарифмы и их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. – Минск: Изд-во БГУ, 1976. – 68 с.

4. **Градштейн, Н. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

5. **Мелешко, И. Н.** Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. – Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 197 с.

Поступила 28.10.2011