Ю.С. Крук
Ю.Е. Дудовская

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Минск
БНТУ
2016

Ю.С. Крук
Ю.Е. Дудовская

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Минск
БНТУ
2016

УДК 519.2

Крук, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания с неактивными заявками / Ю.С. Крук, Ю.Е. Дудовская. – Минск: БНТУ, 2016. – 131 с. – ISBN 978-985-550-933-3.

Монография содержит результаты теоретических исследований в области теории сетей массового обслуживания с неактивными заявками. Для открытых и замкнутых сетей массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания найдено стационарное распределение вероятностей состояний. Установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания заявок и по отношению к функциональной форме распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявок.

Издание предназначено для ученых, аспирантов, магистрантов и студентов, специализирующихся в области теории сетей массового обслуживания.

Библиогр. 29 назв.

Рекомендовано научно-техническим советом Белорусского национального технического университета
(протокол № 8 от 4.11.2016)

Рецензенты:
заведующий кафедрой высшей математики ГГУ им. Ф. Скорины, д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Н. Семенчук*;
заведующий НИЛ ПВА БГУ, д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Н. Дудин*

ISBN 978-985-550-933-3

СОДЕРЖАНИЕ

Посвящается Ученому и Преподавателю
Юрию Владимировичу Малинковскому

ВВЕДЕНИЕ

В теории сетей массового обслуживания достаточно актуальной является проблема исследования надежности обслуживающих систем (узлов). Однако не только обслуживающая система может выходить из строя. По целому ряду причин могут терять свои качественные характеристики и поступающие в систему заявки. С точки зрения надежности поступающих заявок большой интерес для исследователей представляют сети массового обслуживания с неактивными заявками. Заявки в таких сетях делятся на два класса: первые могут обслуживаться узлами, а вторые являются временно неактивными и не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот.

Неактивные заявки можно интерпретировать как заявки, имеющие некоторый дефект, делающий их непригодными для обслуживания. Действительно, при передаче данных в информационно-телекоммуникационных сетях может возникать ситуация, когда пересылаемая заявка становится непригодной для обслуживания в результате какой-либо поломки или сбоя в процессе ее пересылки. Таким образом, очевидно, что результаты изучения сетей массового обслуживания с неактивными заявками представляют интерес с точки зрения исследования функционирования реальных объектов, имеющих сетевую структуру. В большинстве случаев исследователей интересуют характеристики стационарного функционирования таких сетей, в частности вид стационарного распределения вероятностей состояний.

В [1] Г.Ш. Цициашвили и М.А. Осиповой рассмотрена открытая сеть с временно неактивными заявками: исследовано стационарное распределение вероятностей состояний в предположении, что длительности обслуживания заявок распределены по экспоненциальному закону. В [2–5] исследовано стационарное функционирование сетей массового обслуживания, являющихся обобщением модели из [1]: найдено стационарное распределение вероятностей состояний открытых и замкнутых сетей массового обслуживания с заявками различных типов и обходами узлов.

Классические модели сетей, такие как замкнутая сеть Гордона – Ньюэлла и открытая сеть Джексона, исследованы в [6, 7] в предположении, что длительность обслуживания заявки имеет показательное распределение, однако на практике это ограничение выполняется редко. Действительно, закон распределения длительности обслуживания заявки чаще всего отличается от показательного. Поэтому существует актуальная проблема разработки аналитического аппарата для исследования сетей массового обслуживания с произвольными функциями распределения времени обслуживания, привлекающая все большее внимание исследователей [8–14]. Открытые и замкнутые сети массового обслуживания с неактивными заявками и произвольным распределением длительностей обслуживания исследованы в [13, 14]. Установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний сетей имеет мультипликативную форму и инвариантно относительно функционального вида распределения длительности обслуживания заявки.

В.А. Ивницкий в [15] при исследовании немарковских сетей массового обслуживания ввел в рассмотрение понятие кусочно-линейных (КЛСеМО) и кусочно-непрерывных сетей массового обслуживания (КНСеМО). Обслуживание в таких сетях имеет не «временну́ю», а так называемую «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить. Поскольку при произвольных функциях распределения количества работы, необходимого для обслуживания заявки, случайный процесс, характеризующий количество заявок в каждом из узлов, уже не марковский, то, как и в большинстве работ по инвариантности, используется метод расширения фазового пространства (метод дополнительных переменных). В зависимости от того, как ведут себя дополнительные переменные, характеризующие остаточное количество работы, необходимое для окончания некоторой операции обслуживания, и происходит деление немарковских сетей массового обслуживания на КЛСеМО и КНСеМО.

Для КЛСеМО дополнительные переменные $\xi(t)$ убывают по линейному закону, при этом скорость убывания может зависеть от состояния узла или состояния сети в целом

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\alpha.$$

Для КНСеМО скорость убывания зависит от остаточного количества работы. Эта зависимость выражается некоторой непрерывной функцией

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\beta(\xi(t)).$$

В [15] приведены результаты по инвариантности для многих открытых и замкнутых сетей массового обслуживания с различными «немедленными» дисциплинами обслуживания: для сети Джексона с зависимостью параметров обслуживания и циркуляции от состояния сети, для сети с разными классами заявок и параметрами обслуживания и циркуляции, зависящими от состояния сети, для сети с обобщенным групповым обслуживанием, сети с детерминированной циркуляцией, для замкнутой звездообразной сети, для открытой сети с потерями и для многих других сетей массового обслуживания.

Энергетическая интерпретация обобщает представление о процессе обслуживания, представляет большой интерес с практической точки зрения и позволяет рассматривать более широкий класс задач и исследовать более сложные и интересные модели сетей массового обслуживания.

В [16, 17] установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний для замкнутой и открытой сетей с неактивными заявками для случая энергетической постановки.

Установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний сетей имеет мультипликативную форму и инвариантно относительно функционального вида распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявки.

Большое значение для практических приложений представляет изучение сетей массового обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут выходить из строя. Действительно, в реальных сетях любые технические средства в силу естественного износа или нарушения условий эксплуатации могут либо полностью прекращать функционирование, либо продолжать работать с меньшей производительностью. Однако найти стационарное распределение для таких сетей достаточно сложно. Так, например, в [15] рассмотрены марковские сети с ненадежными каналами обслуживания, для которых были найдены главные члены асимптотического разложения стационарного распределения вероятностей состояний. Сети с ненадежными каналами обслуживания также были рассмотрены в [18, 19], для указанных сетей было найдено стационарное распределение вероятностей состояний в мультипликативной форме.

В работах Ю.В. Малинковского и А.Ю. Нуемана [20, 21] исследованы открытые и замкнутые сети, в которых приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в «щадящем» режиме. В таких сетях однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах. Установлено, что стационарное распределение имеет форму произведения. В [22–24] исследованы сети с многорежимными стратегиями обслуживания, отрицательными заявками и информационными сигналами, найдено стационарное распределение в мультипликативной форме и условия его существования. В [9, 10, 12] для сетей с многорежимными стратегиями обслуживания найден вид стационарного распределения вероятностей состояний, найдены условия эргодичности, установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявок. Сети с отрицательными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания рассмотрены в [11], установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения количества работы по переключению режимов.

Для сетей массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания в [25–28] найден вид и условия существования стационарного распределения вероятностей состояний. Доказано, что стационарное распределение вероятностей состояний сетей имеет мультипликативную форму и инвариантно относительно функционального вида распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявок.

Настоящая работа посвящена исследованию инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний открытых и замкнутых сетей массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания.

В первой главе исследуются открытая и замкнутая сети массового обслуживания с неактивными заявками. Предполагается, что длительности обслуживания заявок в узлах распределены по произвольному закону. Для рассмотренных моделей сетей устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Вторая глава посвящена исследованию открытой и замкнутой сетей массового обслуживания с неактивными заявками. Предполагается, что количество работы, требующееся для обслуживания заявки – случайная величина с произвольной функцией распределения. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей по отношению к функциональной форме распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявок, при фиксированных первых моментах.

В третьей главе исследуются открытая и замкнутая сети массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания. Приборы в узлах сети могут функционировать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности узлов. Каждый режим отличается своим набором показателей. При переходе узла в режим с большим номером производительность узла уменьшается, ухудшается процесс обслуживания. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания. Для указанных сетей находится стационарное распределение вероятностей состояний в мультипликативной форме, устанавливается инвариантность стационарного распределения по отношению к к функциональной форме распределений длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

В четвертой главе исследуются открытая и замкнутая сети массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания. Предполагается, что количество работы, требующееся для обслуживания заявки – случайная величина с произвольной функцией распределения. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей по отношению к функциональной форме распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявок, при фиксированных первых моментах.

Авторский коллектив выражает искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору Гурами Шалвовичу Цициашвили за ценные идеи и советы.

1 ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТЕЙ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

1.1 Инвариантность стационарного распределения замкнутой сети с неактивными заявками

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \dots, N\}$. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу количество обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы в сети не требуют обслуживания.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \Big((n_i(t), n_i'(t)),\ i \in J\Big)$, где $(n_i(t), n_i'(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$ и $n_i'(t)$ – число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $n_i(t)+n_i'(t)$ – общее число заявок в i-м узле. Случайный процесс $z(t)$ обладает конечным фазовым пространством

$$Z = \{z = ((n_1, n_1'), \dots, (n_N, n_N')) :$$

$$n_i,\, n_i' \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N}(n_i + n_i') = M, i \in J\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i. Поступающий в i-й узел сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером n'_i+1. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Дисциплина обслуживания – $LCFS$–PR. Поступающая в i-й узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер n_i+ $+1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени неактивные заявки в сети отсутствуют.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел $\left(\sum_{j\in J} p_{i,j} = 1,\ i \in J\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{1.1}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение ε_j [6].

Рассмотрим случай, когда длительности обслуживания заявок в узлах имеют показательное распределение с параметрами μ_i. В этом случае $z(t)$ – марковский процесс, для которого справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид*

$$p((n_1, n'_1), \dots, (n_N, n'_N)) = G^{-1}(M, N) p_1(n_1, n'_1) \dots p_N(n_N, n'_N). \tag{1.2}$$

Здесь $((n_1, n'_1), \dots, (n_N, n'_N)) \in Z$,

$$p_i(n_i, n'_i) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i}\right)^{n'_i}$$

– стационарное распределение вероятностей состояний i-го узла, ε_i – решение системы уравнений трафика (1.1), $G(M, N)$ *– нормирующая константа, находящаяся из условия*

$$\sum_{((n_1, n'_1), \dots, (n_N, n'_N)) \in Z} p((n_1, n'_1), \dots, (n_N, n'_N)) = 1. \tag{1.3}$$

Доказательство. По эргодической теореме Маркова $z(t)$ эргодичен [29]. Тогда существует и единственное стационарное распределение вероятностей состояний процесса $\{p(z), z \in Z\}$.

Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i) = (1, 0)$, $e'_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i) = (0, 1)$.

Система уравнений глобального равновесия для стационарных вероятностей имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(\mu_i I_{n_i > 0} + \varphi_i I_{n'_i > 0} + \nu_i I_{n_i > 0}\Big) p(z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big(\varphi_i p(z - e_i + e'_i) I_{n_i > 0} + \nu_i p(z + e_i - e'_i) I_{n'_i > 0}\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \mu_i p(z + e_i - e_j) p_{i,j} I_{n_j > 0}, \; z \in Z.$$

Здесь I_A – индикаторная функция множества A.

Подставляя (1.2) в уравнения глобального равновесия, с учетом системы уравнений трафика (1.1), получаем тождество. Таким образом, (1.2) является решением уравнений глобального равновесия и соответственно стационарным распределением вероятностей состояний процесса $z(t)$. *Теорема доказана.*$\square$

Рассмотрим теперь случай, когда длительность обслуживания заявки в i-м узле – случайная величина с произвольной функцией распределения $B_i(n_i+n_i', s)$ и конечным математическим ожиданием $1/\mu_i$. Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \xi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t))$. Здесь $\xi_i(t) = (\xi_{i,1}(t), \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t))$, где $\xi_{i,k}(t)$ – время, оставшееся до окончания обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле.

Введем обозначения:

$$F(z,x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$

$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\,\forall\, k,\ l.$$

Функции $F(z,x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z,x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 1.2. *Марковский процесс $\zeta(t)$ эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z,x)$ определяются по формулам*

$$F(z,x) = G^{-1}(M,N)p_1(n_1,n_1')p_2(n_2,n_2')\ldots p_N(n_N,n_N')\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{N} \mu_i^{n_i+n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \int_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s,u))du,\ z \in Z, \qquad (1.4)$$

где

$$p_i(n_i,n_i') = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i}\left(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\mu_i\varphi_i}\right)^{n_i'}, \tag{1.5}$$

ε_i – *решение системы уравнений трафика* (1.1), *а константа* $G(M,N)$ *находится из условия нормировки* (1.3).

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. По эргодической теореме Маркова [29] $z(t)$ в марковском случае эргодичен, следовательно, и в общем случае $\zeta(t)$ эргодичен, поскольку получается из $z(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h)=z, \xi_{i,1}(t+h)<x_{i,1},\ldots,\xi_{i,n_i+n_i'}(t+h)<x_{i,n_i+n_i'},\, i\in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло, и обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t)=z, \xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots, hI_{n_i>0}\le \xi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$
$$< x_{i,n_i+n_i'}+hI_{n_i>0},\, i\in J\}\times$$
$$\times\Big(1-\sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0})h+o(h)\Big).$$

2) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло, $i,j\in J$.

$$P\{z(t)=z-e_i+e_j, \xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots, hI_{n_k>0}\le \xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \leq \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1}+$$

$$+hI_{n_i>1}\} \times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h).$$

Здесь $h - \theta$ – время, которое прошло с момента t до окончания обслуживания заявки, $0 < \theta < h$.

3) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество временно неактивных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$h \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}.$$

4) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество временно неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

5) И, наконец, за время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем:

$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\xi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\} =$$

$$= P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0},\ i \in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0})h + o(h)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\ne i}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_j, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,\ k \ne j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + h\}(\nu_i h + o(h)) I_{n'_i>0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h)) I_{n_i>0} + o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в приведенные выше уравнения, выразим через функции вида

$$F_t(z,x) = P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z,x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n'_i}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J\} =$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J, i \ne k; x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k+n'_k-1}, h) +$$

$$+ \ldots + F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i-1}, h,\ i \in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h, i \in J\} =$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} h -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{l,1}, \ldots, x_{l,n_l+n'_l},\ l \in J, l \neq i; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i-1}, 0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \times$$

$$\times h + o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z, x)$ по переменной t стремится к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$F(z, x) = F(z, x) + h \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} - \left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0} \right) I_{n_i>0} -$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0} \right) h + o(h) \right) F(z, x) +$$

$$+ h \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1, i\neq j}^{N} p_{j,i} B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i}) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial F(z + e_j - e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}} \right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} F(z + e_i - e'_i, x)(\nu_i h + o(h)) I_{n'_i>0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} F(z - e_i + e'_i, x)(\varphi_i h + o(h)) I_{n_i>0} + o(h).$$

Вычтем из обеих частей $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\left(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\right)I_{n_i>0}+ \tag{1.6}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}.$$

Разобьем систему уравнений (1.6) на уравнения локального баланса:

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)=$$

$$=F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}; \tag{1.7}$$

$$\left(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\right)I_{n_i>0}=$$

$$=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times \tag{1.8}$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0},\ i\in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (1.4), (1.5), являются решением уравнений (1.7) и (1.8), а следовательно, и уравнений (1.6).

Если $n_i > 0$, то подставляя (1.4), (1.5) в уравнение (1.8), приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})F(z-e_i,x)$, получим уравнение трафика (1.1). Если $n_i = 0$, то (1.8) превращается в тождество. И, наконец, подставляя (1.4), (1.5) в (1.7), получим тождество. *Теорема доказана.* $\square$

Под $\{p(z),\ z \in Z\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 1.2 с учетом равенства $p(z) = F(z,+\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 1.1. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z),\ z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s,x)$, $i \in J$ и имеет мультипликативную форму*

$$p(z) = G^{-1}(M,N)p_1(n_1,n'_1)p_2(n_2,n'_2)\dots p_N(n_N,n'_N),\ z \in Z,$$

где $p_i(n_i,n'_i)$ определяются по формулам (1.5), *а константа $G(M,N)$ находится из условия нормировки* (1.3).

1.2 Инвариантность стационарного распределения открытой сети с неактивными заявками

Исследуется открытая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \ldots, N\}$. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями λ_i, $i \in J$. Также в узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу количество обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы не требуют обслуживания.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \Big((n_i(t), n_i'(t)),\ i \in J\Big)$, где $(n_i(t), n_i'(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$ и $n_i'(t)$ – число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $n_i(t)+n_i'(t)$ – общее число заявок в i-м узле. Случайный процесс $z(t)$ обладает счетным фазовым пространством

$$Z = \{z = ((n_1, n_1'), \ldots, (n_N, n_N')) : n_i,\, n_i' \geq 0,\, i \in J\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в i-й узел информационный сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Дисциплина обслуживания – $LCFS$–PR. Поступающая в i-й узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i +$ $+1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени неактивные заявки в сети отсутствуют.

Длительность обслуживания заявки в i-м узле – случайная величина с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n'_i, s)$ и конечным математическим ожиданием $1/\mu_i$.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть массового обслуживания $\Big(\sum_{j\in J} p_{i,j} + p_{i,0} = 1,\ i \in J\Big)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0,\ i \in J$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Для открытых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{1.9}$$

имеет единственное положительное решение ε_j [7].

В [1] рассмотрен случай, когда $B_i(n_i + n'_i, s)$ является функцией экспоненциально распределенного времени обслуживания. Для этого случая показано, что при выполнении условий эргодичности

$$\varepsilon_i < \mu_i,$$

$$\varepsilon_i \nu_i < \mu_i \varphi_i,\ i \in J,$$

стационарное распределение вероятностей состояний марковского процесса $z(t) = (n_i(t), n'_i(t),\ i \in J)$ имеет вид

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1) p_2(n_2, n'_2) \ldots p_N(n_N, n'_N),\ z \in Z,$$

где

$$p_i(n_i, n_i') = \Big(1 - \frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i \mu_i}\Big)\Big(1 - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\Big)\Big(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i \mu_i}\Big)^{n_i'}\Big(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\Big)^{n_i}, \ i \in J,$$

ε_i – решение системы уравнений трафика (1.9).

Исследуем более широкий случай, когда длительность обслуживания имеет произвольную функцию распределения $B_i(n_i + n_i', s)$ и конечное математическое ожидание $1/\mu_i$. Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \xi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t))$. Здесь $\xi_i(t) = (\xi_{i,1}(t), \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t))$, где $\xi_{i,k}(t)$ – время, оставшееся до окончания обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле.

Введем обозначения:

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$

$$z \in Z, \ x_{k,l} \in \mathbb{R} \, \forall \, k, \ l.$$

Функции $F(z, x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z, x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 1.3. *При выполнении условий*

$$\varepsilon_i < \mu_i,$$

$$\varepsilon_i \nu_i < \mu_i \varphi_i, \ i \in J, \qquad (1.10)$$

процесс $\zeta(t)$ эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z, x)$ определяются по формулам

$$F(z, x) = p_1(n_1, n_1') p_2(n_2, n_2') \ldots p_N(n_N, n_N') \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{N} \mu_i^{n_i+n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \int\limits_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s,u))du, \ z \in Z, \qquad (1.11)$$

где

$$p_i(n_i, n_i') = \left(1 - \frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i \mu_i}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)\left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i \mu_i}\right)^{n_i'}\left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i}, \ i \in J, \qquad (1.12)$$

ε_i – *решение системы уравнений трафика* (1.9).

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условия (1.10) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита [29], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок) и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние «0» является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления в сеть заявок или поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i') = (1, 0)$, $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i') = (0, 1)$.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t+h) < x_{i,n_i+n_i'}, \ i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло, и обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq$$

$$\leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0},\ i \in J\} \times$$

$$\times \Big(1 - \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0})h + o(h)\Big).$$

2) За время h заявка поступила в i-й узел и сразу начала обслуживаться, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \leq \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$

$$\times (\lambda_i h + o(h)) B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta) I_{n_i>0},$$

где $h - \theta$ – время, которое прошло с момента t до поступления заявки, а θ – время с момента поступления заявки до $t + h$, $0 < \theta < h$.

3) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло, $i, j \in J$.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \leq \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'-1} + hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i + n_i', x_{i,n_i+n_i'} + \theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h),$$

где $h - \theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0 < \theta < h$.

4) За время h в i-м узле заявка была обслужена, после чего она покинула сеть, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z + e_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n_k'}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n_k'} + hI_{n_k>0}, k \in J,\, k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'+1}(t) < h\}p_{i,0} + o(h).$$

5) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество неактивных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось.

$$P\{z(t) = z + e_i - e_i', \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n_k'}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n_k'} + hI_{n_k>0}, k \in J,\, k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'} + h\}(\nu_i h + o(h))I_{n_i'>0}.$$

6) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось.

$$P\{z(t)=z-e_i+e_i',\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,hI_{n_k>0}\le\xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},k\in J,\,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,hI_{n_i>1}\le\xi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n_i'}+hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}.$$

7) И, наконец, за время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

Естественно, что в каждом из выше перечисленных пунктов и для каждого узла параметр θ свой. Но для того, чтобы не загромождать выкладки, индексация для θ не вводится.

В силу сказанного выше имеем:

$$P\{z(t+h)=z,\xi_{i,1}(t+h)<x_{i,1},\dots,$$

$$\xi_{i,n_i+n_i'}(t+h)<x_{i,n_i+n_i'},\,i\in J\}=P\{z(t)=z,\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,$$

$$hI_{n_i>0}\le\xi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}+hI_{n_i>0},\,i\in J\}\times$$

$$\times\Big(1-\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0})h+o(h)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\Big(P\{z(t)=z-e_i,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,hI_{n_k>0}\le\xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},k\in J,\,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,hI_{n_i>1}\le\xi_{i,n_i+n_i'-1}(t)<x_{i,n_i+n_i'-1}+hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times(\lambda_i h+o(h))B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'}+\theta)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}P\{z(t)=z-e_i+e_j,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,$$

$$hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \ne i,\ k \ne j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+$$

$$+P\{z(t) = z + e_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i+1}(t) < h\}p_{i,0}+$$

$$+P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}+$$

$$+P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0} + o(h)\Big).$$

Далее каждую вероятность, входящую в приведенные выше уравнения, выразим через функции вида

$$F_t(z, x) = P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z, x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n'_i}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t)=z,\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,h\le\xi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i}+h,\ i\in J\}=$$

$$=F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n'_i}+h,\ i\in J)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n'_i}+h,\ i\in J,i\ne k;x_{k,1},\dots,x_{k,n_k+n'_k-1},h)+$$

$$+\dots+F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n'_i-1},h,\ i\in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t)=z,\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,h\le\xi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i}+h,i\in J\}=$$

$$=F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}h-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{l,1},\dots,x_{l,n_l+n'_l},\ l\in J,l\ne i;x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n'_i-1},0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\times$$

$$\times h+o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функции переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$F(z,x)=F(z,x)+h\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}-\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\right)I_{n_i>0}-$$

$$-\Big(\sum_{i=1}^{N}\big(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)h+o(h)\Big)F(z,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i,x)B_i(n_i+n_i',x_{n_i+n_i'})(\lambda_i h+o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{i=1}^{N}p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)(\nu_i h+o(h))I_{n_i'>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+o(h).$$

Вычтем из обеих частей $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\big(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Bigg(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\Bigg)I_{n_i>0}+ \qquad (1.13)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i,x)B_i(n_i+n_i',x_{n_i+n_i'})\lambda_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N} p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}.$$

Разобьем систему уравнений (1.13) на уравнения локального баланса:

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}\big)=F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+$$

$$+F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}; \tag{1.14}$$

$$\Big(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)I_{n_i>0}=$$

$$=\sum_{j=1,j\neq i}^{N} p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0}+ \tag{1.15}$$

$$+F(z-e_i,x)B_i(n_i+n'_i,x_{n_i+n'_i})\lambda_i I_{n_i>0};$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i F(z,x)=\sum_{i=1}^{N} p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0}. \tag{1.16}$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (1.11), (1.12), являются решением уравнений (1.14) – (1.16), а следовательно, и уравнений (1.13). Действительно, подставляя (1.11), (1.12) в уравнения локального баланса (1.14) – (1.16), а также учитывая систему уравнений трафика (1.9), получаем тождество. *Теорема доказана.*$\square$

Под $\{p(z),\ z \in Z\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 1.3 с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 1.2. *Если выполняется условие* (1.10)*, то процесс* $z(t)$ *эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний* $\{p(z),\ z \in Z\}$ *не зависит от функционального вида распределений* $B_i(s,x)$*,* $i \in J$ *и имеет мультипликативный вид*

$$p(z) = p_1(n_1, n_1')p_2(n_2, n_2') \dots p_N(n_N, n_N'),\ z \in Z,$$

где $p_i(n_i, n_i')$ *определяются по формулам* (1.12)*. Здесь* $p_i(n_i, n_i')$ *– стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла.*

2 ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТЕЙ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЛИЧЕСТВА РАБОТЫ ПО ОБСЛУЖИВАНИЮ ЗАЯВКИ

2.1 Инвариантность стационарного распределения замкнутой сети с неактивными заявками

Исследуется замкнутая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \ldots, N\}$. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i информационный сигнал уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу количество обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы не требуют обслуживания в узлах сети.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \Big((n_i(t), n_i'(t)),\ i \in J\Big)$, где $(n_i(t), n_i'(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$ и $n_i'(t)$ – число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $n_i(t)+n_i'(t)$ – общее число заявок в i-м узле. Случайный процесс $z(t)$ обладает конечным фазовым пространством

$$Z = \{z = ((n_1, n_1'), \ldots, (n_N, n_N')) :$$

$$n_i,\, n_i' \geq 0,\, \sum_{i=1}^{N}(n_i + n_i') = M, i \in J\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i.

Поступающий в i-й узел сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку под номером n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Дисциплина обслуживания – $LCFS$–PR. Поступающая в i-й узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + +1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени неактивные заявки в сети отсутствуют.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n'_i(t))$, и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной $\eta_i(n_i+n'_i+1)$ с функцией распределения $B_i(n_i+n'_i+1, s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n'_i + 1)$. Предполагается, что $B_i(n_i + n'_i + 1, 0) = 0$, $i \in J$.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть $(n_i(t), n'_i(t))$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i(n_i+n'_i)$, то есть зависит от состояния узла, $i \in J$. Обслуживание имеет не «временну́ю», а, так называемую, «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел $\left(\sum_{j\in J} p_{i,j} = 1, \ i \in J\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации для сети предполагается неприводимой.

Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{2.1}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение ε_j [6].

В первой главе рассмотрен случай замкнутой сети, для которой $B_i(n_i+n_i', s) = 1 - exp\{-\mu_i s\}$ $(s > 0,\ \mu_i > 0)$, $\tau_i(n_i+n_i') = 1/\mu_i$ с единичной скоростью обслуживания $\alpha_i(n_i + n_i') = 1$, то есть $B_i(n_i+n_i', s)$ являлась функцией экспоненциально распределенного времени обслуживания, $i \in J$. Тогда $z(t)$ – марковский процесс, для которого найдено стационарное распределение вероятностей состояний. Далее предполагалось, что функция распределения времени обслуживания произвольная и устанавливалась инвариантность стационарного распределения по отношению к функциональной форме распределения времени обслуживания.

Рассмотрим теперь случай так называемой энергетической постановки, когда количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i(n_i+n_i')$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n_i', s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n_i')$.

Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\psi_i(t) = (\psi_{i,1}(t), \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t))$, $i \in J$.

В силу сказанного выше, если состояние i-го узла есть (n_i, n_i'), $i \in J$, то

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n_i'}(t)}{dt} = -\alpha_i(n_i + n_i').$$

В общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t),\ \psi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z,x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$

$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\,\forall\, k,\ l.$$

Функции $F(z,x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z,x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 2.1. *Марковский процесс $\zeta(t)$ эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z,x)$ определяются по формулам*

$$F(z,x) = G^{-1}(M,N)p_1(n_1,n_1')p_2(n_2,n_2')\ldots p_N(n_N,n_N')\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{1}{\tau_i(s)} \int\limits_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s,u))du,\ z \in Z, \tag{2.2}$$

где

$$p_i(n_i,n_i') = {\varepsilon_i}^{n_i}\left(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s)}, \tag{2.3}$$

ε_i *– решение системы уравнений трафика* (2.1), $G(M,N)$ *– нормирующая константа, находящаяся из условия*

$$G(M,N) = \Big(\sum_{((n_1,n_1'),\ldots,(n_N,n_N'))\in Z} p_1(n_1,n_1')\ldots p_N(n_N,n_N')\Big)^{-1}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. По эргодической теореме Маркова [29] $z(t)$ в марковском случае эргодичен, следовательно, и в общем случае $\zeta(t)$ эргодичен, поскольку получается из $z(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i) = (1, 0)$, $e'_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i) = (0, 1)$.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло, и обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0} \leq \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0},\ i \in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0})h + o(h)\Big).$$

2) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло, $i, j \in J$.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) <$$

$$< \alpha_j(n_j + n'_j + 1)(h - \theta),$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i + n'_i - 1)(h - \theta)I_{n_i > 1} \le \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i-1} + \alpha_i(n_i + n'_i - 1)(h - \theta)I_{n_i>1}\} \times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h),$$

где $h - \theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0 < \theta < h$.

3) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество временно неактивных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \dots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i + n'_i)h \le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)h\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}.$$

4) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество временно неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \dots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>1} \le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

5) И, наконец, за время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем:

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \dots,$$

$$\psi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\} =$$

$$= P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0} \le$$

$$\le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0},\ i \in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0})h + o(h)\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\ne i}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_j, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \dots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} +$$

$$+\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,\ k \ne j, \psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \dots,$$

$$\psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < \alpha_j(n_j + n'_j + 1)(h - \theta),$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n_i' - 1)(h - \theta)I_{n_i>1} \leq \tag{2.5}$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n_i'-1}(t) < x_{i,n_i+n_i'-1} + \alpha_i(n_i + n_i' - 1)(h - \theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i + n_i', x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i + n_i')\theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e_i - e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n_k')hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k + n_k')hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i + n_i')h \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i + n_i')h\}\times$$

$$\times(\nu_i h + o(h))I_{n_i'>0} + \sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n_k')hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k + n_k')hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i + n_i')hI_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i + n_i')hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0} + o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в (2.5), выразим через функции вида

$$F_t(z, x) = P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'},\ i \in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z, x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n_i'}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n_i')h\le\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i')h,\ i\in J\}=$$

$$=F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i')h,\ i\in J)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i')h,\ i\in J,i\ne k;$$

$$x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k+n_k'-1},\alpha_k(n_k+n_k')h)+\ldots+$$

$$+F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n_i'-1},\alpha_i(n_i+n_i')h,\ i\in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n_i')h\le\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i')h,i\in J\}=F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n_i'},\ i\in J)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n_i'},\ i\in J)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\alpha_i(n_i+n_i')h-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{l,1},\ldots,x_{l,n_l+n_l'},\ l\in J,l\ne i;x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n_i'-1},0)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\times$$

$$\times\alpha_i(n_i+n_i')h+o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i')\theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$F(z,x) = F(z,x) + h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n'_i)\times$$
$$\times\Bigg(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} - \Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\Bigg)I_{n_i>0}-$$
$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{N}\big(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0}\big)h + o(h)\Bigg)F(z,x)+$$
$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1, i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})\times \tag{2.6}$$
$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e'_i,x)(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e'_i,x)(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0} + o(h).$$

Вычтем из обеих частей (2.6) $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\big(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0}\big) =$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n'_i)\Bigg(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} - \Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\Bigg)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times \qquad (2.7)$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}.$$

Разобьем систему уравнений (2.7) на уравнения локального баланса:

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}\big)=F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+$$

$$+F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}; \qquad (2.8)$$

$$\alpha_i(n_i+n'_i)\bigg(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\bigg)I_{n_i>0}=$$

$$=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times \qquad (2.9)$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0},\ i\in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (2.2), (2.3), являются решением уравнений (2.8) и (2.9), а следовательно, и уравнений (2.7).

Если $n_i>0$, то подставляя (2.2), (2.3) в уравнение (2.9), приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})F(z-e_i,x)$, получим уравнение трафика (2.1); если $n_i=0$, то (2.9) превращается в тождество. И, наконец, подставляя (2.2), (2.3) в (2.8), с помощью элементарных преобразований получим тождество. *Теорема доказана.* $\square$

Под $\{p(z),\, z \in Z\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 2.1 с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 2.1. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z),\, z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s, x)$, $i \in J$ и имеет мультипликативную форму*

$$p(z) = G^{-1}(M, N) p_1(n_1, n'_1) p_2(n_2, n'_2) \ldots p_N(n_N, n'_N),\ z \in Z,$$

где $p_i(n_i, n'_i)$ определяются по формулам (2.3), *$G(M, N)$ – нормирующая константа, находящаяся из условия* (2.4).

2.2 Инвариантность стационарного распределения открытой сети с неактивными заявками

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \ldots, N\}$. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями λ_i, $i \in J$. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. Предполагается поступление в узлы сети извне независимых пуассоновских потоков информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i информационный сигнал уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу количество обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы не требуют обслуживания.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \Big((n_i(t), n_i'(t)),\ i \in J\Big)$, где $(n_i(t), n_i'(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$ и $n_i'(t)$ – число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $n_i(t)+n_i'(t)$ – общее число заявок в i-м узле. Случайный процесс $z(t)$ обладает счетным фазовым пространством

$$Z = \{z = ((n_1, n_1'), \ldots, (n_N, n_N')) : n_i,\, n_i' \geq 0,\, i \in J\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных (активных) заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в i-й узел сигнал ν_i

воздействует на обыкновенную заявку под номером 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку под номером n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Дисциплина обслуживания – *LCFS-PR*. Поступающая в i-й узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + 1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени неактивные заявки в сети отсутствуют.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n'_i(t))$ и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной $\eta_i(n_i + n'_i + 1)$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n'_i + 1, s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n'_i + 1)$. Предполагается, что $B_i(n_i + n'_i + 1, 0) = 0$, $i \in J$. Если в момент времени t состояние i-го узла есть $(n_i(t), n'_i(t))$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i(n_i + n'_i)$, то есть зависит от состояния узла, $i \in J$. Обслуживание имеет не «временну́ю», а так называемую «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть массового обслуживания $\left(\sum_{j \in J} p_{i,j} + p_{i,0} = 1,\ i \in J\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации сети массового обслуживаия предполагается неприводимой.

Для открытых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{2.10}$$

имеет единственное положительное решение ε_j [7].

В [1] рассмотрен случай, когда $B_i(n_i + n_i', s) = 1 - \exp\{-\mu_i s\}$ ($\mu_i > 0$, $s > 0$), $\tau_i(n_i + n_i') = 1/\mu_i$ с единичной скоростью обслуживания $\alpha_i(n_i + n_i') = 1$, то есть в этом случае $B_i(n_i + n_i', s)$ являлась функцией распределения экспоненциального времени обслуживания. Для $z(t)$ было найдено стационарное распределение вероятностей состояний в форме произведения геометрических распределений. В первой главе рассматривался случай, когда функция распределения времени обслуживания произвольная и устанавливалась инвариантность стационарного распределения по отношению к функциональной форме распределения времени обслуживания.

Исследуем теперь более широкий случай, рассматривая энергетическую интерпретацию процесса обслуживания. Пусть количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i(n_i + n_i')$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n_i', s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n_i')$.

Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\psi_i(t) = (\psi_{i,1}(t), \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t))$, $i \in J$.

В силу сказанного, если состояние i-го узла есть (n_i, n_i'), то

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n_i'}(t)}{dt} = -\alpha_i(n_i + n_i'),\ i \in J.$$

В общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \psi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$

$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\ \forall\, k,\, l.$$

Функции $F(z,x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z,x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 2.2. *При выполнении условия*

$$\sum_{z\in Z} q(z)\prod_{i=1}^{N}\Big(\varepsilon_i^{n_i}\Big(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\tau_i(s)\alpha_i(s)^{-1}\Big)<\infty, \tag{2.11}$$

где

$$q(z)=\sum_{i=1}^{N}\Big(\lambda_i+\tau_i(n_i+n_i')^{-1}\alpha_i(n_i+n_i')I_{n_i>0}+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\Big),$$

процесс $\zeta(t)$ *эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний* $F(z,x)$ *определяются по формулам*

$$F(z,x)=p_1(n_1,n_1')p_2(n_2,n_2')\dots p_N(n_N,n_N')\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{1}{\tau_i(s)}\int\limits_0^{x_{i,s}}(1-B_i(s,u))du,\ z\in Z, \tag{2.12}$$

где

$$p_i(n_i,n_i')=\varepsilon_i{}^{n_i}\Big(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s)}p_i(0,0), \tag{2.13}$$

ε_i – *решение системы уравнений трафика* (2.10), *а*

$$p_i(0,0)=\Big(\sum_{n_i=0}^{\infty}\sum_{n_i'=0}^{\infty}\varepsilon_i{}^{n_i}\Big(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s)}\Big)^{-1},\ i\in J. \tag{2.14}$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условия (2.11) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита

[29], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии "0" (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок), и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние "0" является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления в сеть заявок или поступления информационных сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния в неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i') = (1,0)$, $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i') = (0,1)$.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t+h) < x_{i,n_i+n_i'},\, i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло, и обслуживание ни в одном из узлов сети не закончилось.

$$P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i')hI_{n_i>0} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$
$$< x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i')hI_{n_i>0},\, i \in J\}\times$$
$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0})h + o(h)\Big).$$

2) За время h заявка поступила в i-й узел и сразу начала обслуживаться, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \dots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} +$$

$$+\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ \ k \in J,\ \ k \neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i + n'_i - 1)(h - \theta)I_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i-1} + \alpha_i(n_i + n'_i - 1)(h - \theta)I_{n_i>1},\ i \in J\}\times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)\theta)(\lambda_i h + o(h))I_{n_i>0},$$

где $h - \theta$ – время, которое прошло с момента t до поступления заявки, а θ – время с момента поступления заявки до $t + h$, $0 < \theta < h$.

3) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \dots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \dots, \psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) <$$

$$< \alpha_j(n_j + n'_j + 1)(h - \theta),$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i + n'_i - 1)(h - \theta)I_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i-1} + \alpha_i(n_i + n'_i - 1)(h - \theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+o(h),$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0<\theta<h$.

4) За время h в i-м узле заявка была обслужена, после чего она покинула сеть, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t)=z+e_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\le\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i},\psi_{i,n_i+n'_i+1}(t)<$$

$$<\alpha_i(n_i+n'_i+1)(h-\theta)\}p_{i,0}+o(h),$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0<\theta<h$.

5) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество неактивных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось.

$$P\{z(t)=z+e_i-e'_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\le\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)h\le\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)h\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}.$$

6) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось.

$$P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

7) И, наконец, за время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого события есть $o(h)$.

Естественно, что в каждом из перечисленных пунктов и для каждого узла параметр θ свой. Но чтобы не загромождать выкладки, индексация для θ не вводится.

В силу сказанного имеем:

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\psi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\} =$$

$$= P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0} \leq \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0},\ i \in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0})h + o(h)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z-e_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\leq$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t)<x_{i,n_i+n'_i-1}+\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1},\ i\in J\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta)(\lambda_i h+o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N} P\{z(t)=z-e_i+e_j, \psi_{k,1}(t)<$$

$$<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,\ k\neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t)<x_{j,1},\ldots,\psi_{j,n_j+n'_j}(t)<x_{j,n_j+n'_j},$$

$$\psi_{j,n_j+n'_j+1}(t)<\alpha_j(n_j+n'_j+1)(h-\theta),$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\leq \qquad (2.15)$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t)<x_{i,n_i+n'_i-1}+\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N} P\{z(t)=z+e_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i}, \psi_{i,n_i+n'_i+1}(t)<$$

$$<\alpha_i(n_i+n'_i+1)(h-\theta)\}p_{i,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z+e_i-e'_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)h\leq\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)h\}(\nu_i h+o(h))I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z-e_i+e'_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leq\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)hI_{n_i>1}\leq\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в уравнения (2.15), выразим через функции вида

$$F_t(z,x)=P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z,x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n'_i}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая, что

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)h\leq\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)h,\ i\in J\}=$$

$$=F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)h,\ i\in J)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N} F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)h,\ i\in J, i\neq k;$$

$$x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k+n'_k-1},\alpha_k(n_k+n'_k)h)+\ldots+$$

$$+F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i-1},\alpha_i(n_i+n'_i)h,\ i\in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)h\le\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)h,i\in J\}=F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\alpha_i(n_i+n'_i)h-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{l,1},\ldots,x_{l,n_l+n'_l},\ l\in J,\ l\ne i;x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i-1},0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\times$$

$$\times\alpha_i(n_i+n'_i)h+o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функции переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$F(z,x)=F(z,x)+h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n'_i)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}-\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\right)I_{n_i>0}-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i+\nu_iI_{n_i>0}+\varphi_iI_{n'_i>0}\right)h+o(h)\right)F(z,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_ih+o(h)\right)B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})F(z-e_i,x)I_{n_i>0}+\qquad(2.16)$$

$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n'_i+1)p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e'_i,x)(\nu_i h+o(h))I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e'_i,x)(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+o(h).$$

Вычтем из обеих частей (2.16) $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n'_i)\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\right)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})F(z-e_i,x)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0}+\qquad(2.17)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i'+1)p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}.$$

Разобьем систему дифференциально-разностных уравнений (2.17) на уравнения локального баланса:

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i F(z,x)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i'+1)p_{i,0}\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0};\tag{2.18}$$

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)=F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+$$

$$+F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0};\tag{2.19}$$

$$\alpha_i(n_i+n_i')\bigg(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\bigg)I_{n_i>0}=$$

$$=\lambda_i B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})F(z-e_i,x)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\alpha_j(n_j+n_j'+1)p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times\tag{2.20}$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0},\ i\in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z, x)$, определенные формулами (2.12) – (2.14), являются решением системы уравнений (2.18) – (2.20), а следовательно, и системы дифференциально-разностных уравнений (2.17).

Если $n_i > 0$, то подставляя (2.12) – (2.14) в уравнение (2.20), приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i})F(z - e_i, x)$, получаем уравнение трафика (2.10), если $n_i = 0$, то (2.20) превращается в тождество. Подставляя (2.12) – (2.14) в (2.18), с помощью элементарных преобразований получаем следствие уравнения трафика

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,0}.$$

И, наконец, подставляя (2.12) – (2.14) в (2.19), получаем тождество. *Теорема доказана.* □

Пусть $\{p(z),\ z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 2.2 с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 2.2. *Если выполняется соотношение* (2.11)*, то процесс* $z(t)$ *эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний* $\{p(z),\ z \in Z\}$ *не зависит от функционального вида распределений* $B_i(s, x)$, $i \in J$ *и имеет мультипликативную форму*

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1)p_2(n_2, n'_2)\ldots p_N(n_N, n'_N), z \in Z,$$

где $p_i(n_i, n'_i)$ *определяются по формулам* $(2.13), (2.14)$*. Здесь* $p_i(n_i, n'_i)$ *– стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла.*

3 ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОРЕЖИМНЫХ СЕТЕЙ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1 Стационарное распределение замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

Исследуется замкнутая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \ldots, N\}$. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i информационный сигнал уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает количество неактивных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i-й узел может функционировать в одном из $r_i + 1$ режимов. Обозначим l_i – номер режима, в котором функционирует i-й узел $\left(l_i = \overline{0, r_i},\ r_i > 0, i \in J\right)$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$ и $n_i'(t)$ – число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла, $n_i(t) + n_i'(t)$ – общее число заявок в i-м узле.

Случайный процесс $z(t)$ имеет конечное фазовое пространство

$$Z = \{z = ((n_1, n'_1, l_1), \ldots, (n_N, n'_N, l_N)) :$$

$$n_i,\, n'_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{N} (n_i + n'_i) = M, l_i = \overline{0, r_i}\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i. Поступающий в i-й узел сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i, которая становится активной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n'_i, l_i)$, в режиме l_i $(l_i = \overline{0, r_i}, i \in J)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\sigma_i(n_i + n'_i, l_i) > 0$ i-й узел переходит в $(l_i + 1)$-й режим $(l_i = \overline{0, r_i - 1})$, а с интенсивностью $\rho_i(n_i + n'_i, l_i) > 0$ – в $(l_i - 1)$-й режим $(l_i = \overline{1, r_i})$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Время обслуживания активной заявки в i-м узле имеет показательное распределение с параметром $\mu_i(n_i + n'_i, l_i), i \in J$. Дисциплина обслуживания – *LCFS-PR*. Поступающая в i-й узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + 1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел,

$$\sum_{j \in J} p_{i,j} = 1,\, i \in J.$$

Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{3.1}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение ε_j [6].

Процесс $z(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и конечным фазовым пространством Z.

Предположим, что изолированный i-й узел сети имеет конечную ёмкость M. Это значит, что если поступающая заявка застаёт узел в состоянии (n_i, n_i', l_i), для которого $n_i + n_i' = M$, то она покидает узел.

Обозначим $p_i^M(n_i, n_i', l_i)$ – стационарное распределение изолированного i-го узла, которое, вообще говоря, может отличаться от стационарного распределения i-го узла сети. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

$$\varepsilon_i p_i^M(n_i - 1, n_i', l_i) I_{n_i > 0} =$$

$$= \mu_i(n_i + n_i', l_i) p_i^M(n_i, n_i', l_i);$$

$$\nu_i(n_i + n_i', l_i) p_i^M(n_i + 1, n_i' - 1, l_i) I_{n_i' > 0} =$$

$$= \varphi_(n_i + n_i', l_i) p_i^M(n_i, n_i', l_i); \tag{3.2}$$

$$\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1) p_i^M(n_i, n_i', l_i - 1) I_{l_i > 0} =$$

$$= \rho_i(n_i + n_i', l_i) p_i^M(n_i, n_i', l_i),\ i \in J.$$

Используя уравнения обратимости (3.2), находим стационарное распределение изолированного узла емкости M.

$$p_i^M(n_i,n_i',l_i)=\left(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\varepsilon_i}{\mu_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}p_i^M(0,0,0).$$

Здесь ε_i – решение системы уравнений трафика (3.1).

Пусть $\{p(z),\ z\in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Обозначим $e_i\in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i,n_i',l_i)=(1,0,0)$, $e_i'\in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i,n_i',l_i)=$ $=(0,1,0)$, $e_i''\in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i,n_i',l_i)=(0,0,1)$.

Уравнения глобального равновесия имеют вид

$$\begin{gathered}
p(z)\sum_{i=1}^{N}\Big(\mu_i(n_i+n_i',l_i)I_{n_i>0}+\nu_iI_{n_i>0}+\varphi_iI_{n_i'>0}+\\
+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\Big)=\\
=\sum_{i=1}^{N}\Big(p(z-e_i+e_i')\varphi_iI_{n_i>0}+p(z+e_i-e_i')\nu_iI_{n_i'>0}+\\
+p(z+e_i'')\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{l_i<r_i}+\\
+p(z-e_i'')\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}+\\
+\sum_{j=1}^{N}p(z-e_i+e_j)\mu_j(n_j+n_j'+1,l_j)p_{j,i}I_{n_i>0}\Big),\ z\in Z.
\end{gathered}\tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен. При выполнении условий*

$$\begin{gathered}
\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)\mu_i(n_i+n_i',l_i)\rho_i(n_i+n_i'-1,l_i)=\\
=\sigma_i(n_i+n_i'-1,l_i-1)\mu_i(n_i+n_i',l_i-1)\rho_i(n_i+n_i',l_i),
\end{gathered}\tag{3.4}$$

$$1 \le n_i + n_i' \le M, \quad l_i = \overline{1, r_i}, \quad i \in J,$$

стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид

$$p((n_1, n_1', l_1), \ldots, (n_N, n_N', l_N)) =$$
$$= G^{-1}(M, N) p_1(n_1, n_1', l_1) \ldots p_N(n_N, n_N', l_N). \tag{3.5}$$

Здесь вероятности $p_i(n_i, n_i', l_i)$ могут быть найдены как стационарные вероятности состояний изолированного i-го узла ёмкости M, $G(M,N)$ – нормирующая константа, находящаяся из условия:

$$\sum_{((n_1, n_1', l_1), \ldots, (n_N, n_N', l_N)) \in Z} p((n_1, n_1', l_1), \ldots, (n_N, n_N', l_N)) = 1.$$

Доказательство. Эргодичность марковского процесса $z(t)$ следует из эргодической теоремы Маркова [29].

Докажем, что (3.5) удовлетворяют уравнениям равновесия (3.3). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (3.3) на уравнения локального равновесия:

$$p(z)\Big(\mu_i(n_i + n_i', l_i) I_{n_i > 0} + \nu_i I_{n_i > 0}\Big) =$$
$$= p(z - e_i + e_i')\varphi_i I_{n_i > 0} + \sum_{j=1}^{N} p(z - e_i + e_j) \times \tag{3.6}$$
$$\times \mu_j(n_j + n_j' + 1, l_j) p_{j,i} I_{n_i > 0};$$

$$p(z)\varphi_i I_{n_i' > 0} = p(z + e_i - e_i')\nu_i I_{n_i' > 0}; \tag{3.7}$$

$$p(z)\Big(\sigma_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i < r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i > 0}\Big) =$$
$$= p(z + e_i'')\rho_i(n_i + n_i', l_i + 1) I_{l_i < r_i} + p(z - e_i'')\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1) I_{l_i > 0}. \tag{3.8}$$

Подставим (3.5) в уравнение локального баланса (3.6), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \ldots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим

$$\mu_i(n_i + n'_i, l_i)I_{n_i>0} + \nu_i I_{n_i>0} =$$

$$= \frac{p_i(n_i - 1, n'_i + 1, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)}\varphi_i I_{n_i>0} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{p_i(n_i - 1, n'_i, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \times \frac{p_j(n_j + 1, n'_j, l_j)}{p_j(n_j, n'_j, l_j)}\mu_j(n_j + n'_j + 1, l_j)p_{j,i}I_{n_i>0} =$$

$$= \frac{\nu_i}{\varphi_i}\varphi_i I_{n_i>0} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_i(n_i + n'_i, l_i)}{\varepsilon_i} \times \frac{\varepsilon_j \mu_j(n_j + n'_j + 1, l_j)}{\mu_j(n_j + n'_j + 1, l_j)} p_{j,i}I_{n_i>0} =$$

$$= \nu_i I_{n_i>0} + \frac{\mu_i(n_i + n'_i, l_i)}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{j,i} I_{n_i>0} =$$

$$= \nu_i I_{n_i>0} + \mu_i(n_i + n'_i, l_i)I_{n_i>0}.$$

Подставим (3.5) в уравнение локального баланса (3.7), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \ldots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим

$$\varphi_i I_{n'_i>0} = \frac{p_i(n_i + 1, n'_i - 1, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)}\nu_i I_{n'_i>0} = \frac{\varphi_i}{\nu_i}\nu_i I_{n'_i>0} = \varphi_i I_{n'_i>0}.$$

Подставим (3.5) в уравнение локального баланса (3.8), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \ldots, (n_N, n'_N, l_N))$ и с учетом (3.4) получим

$$\sigma_i(n_i + n'_i, l_i)I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n'_i, l_i)I_{l_i>0} =$$

$$= \frac{p_i(n_i, n'_i, l_i + 1)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)}\rho_i(n_i + n'_i, l_i + 1)I_{l_i<r_i} +$$

$$+ \frac{p_i(n_i, n'_i, l_i - 1)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)}\sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1)I_{l_i>0} =$$

$$
= \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\mu_i(s, l_i)}{\mu_i(s, l_i+1)} \times \frac{\sigma_i(0, l_i)}{\rho_i(0, l_i+1)} \rho_i(n_i+n_i', l_i+1) I_{l_i<r_i} +
$$

$$
+ \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\mu_i(s, l_i-1)}{\mu_i(s, l_i)} \times \frac{\rho_i(0, l_i)}{\sigma_i(0, l_i-1)} \sigma_i(n_i+n_i', l_i-1) I_{l_i>0} =
$$

$$
= \sigma_i(n_i+n_i', l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i+n_i', l_i) I_{l_i>0}.
$$

Таким образом, поскольку вероятности состояний процесса $\{p(z), z \in Z\}$, определенные по формуле (3.5), удовлетворяют уравнениям локального равновесия (3.6) – (3.8), то они удовлетворяют и уравнениям глобального равновесия (3.3), а следовательно образуют стационарное распределение процесса $z(t)$. *Теорема доказана.* $\square$

3.2 Инвариантность стационарного распределения замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания из пункта 3.1 на случай произвольного распределения длительности обслуживания заявки.

Пусть в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$. Если сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая начинает немедленно обслуживаться, то длительность ее обслуживания является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B_i(n_i+n_i'+1, s)$ и конечным математическим ожиданием $1/\mu_i$. Предполагается, что $B_i(n_i + n_i' + 1, 0) = 0$, $i \in J$.

Пусть $\xi_{i,k}(t)$ – время, оставшееся до окончания обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\xi_i(t) = (\xi_{i,1}(t), \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t))$, $i \in J$.

В общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \xi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$

$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\,\forall\, k,\ l.$$

Функции $F(z, x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z, x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 3.2. *Марковский процесс* $\zeta(t)$ *эргодичен. При выполнении условий*

$$\sigma_i(n_i+n_i', l_i-1)\rho_i(n_i+n_i'-1, l_i) =$$

$$= \sigma_i(n_i+n_i'-1, l_i-1)\rho_i(n_i+n_i', l_i), \tag{3.9}$$

$$1 \le n_i+n_i' \le M, \quad l_i = \overline{1, r_i}, \quad i \in J,$$

стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z, x)$ *определяются по формулам*

$$F(z,x) = G^{-1}(M,N)p_1(n_1,n_1',l_1)p_2(n_2,n_2',l_2)\dots p_N(n_N,n_N',l_N)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\mu_i^{n_i+n_i'}\int\limits_0^{x_{i,s}}(1-B_i(s,u))du,\ z\in Z, \tag{3.10}$$

где

$$p_i(n_i,n_i',l_i) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i}\left(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i\mu_i}\right)^{n_i'}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}, \tag{3.11}$$

ε_i *– решение системы уравнений трафика* (3.1), $G(M,N)$ *– нормирующая константа, находящаяся из условия:*

$$\sum_{((n_1,n_1',l_1),\dots,(n_N,n_N',l_N))\in Z} p((n_1,n_1',l_1),\dots,(n_N,n_N',l_N)) = 1. \tag{3.12}$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. По эргодической теореме Маркова [29] $z(t)$ в марковском случае эргодичен, следовательно, и в общем случае $\zeta(t)$ эргодичен, поскольку получается из $z(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Пусть $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n_i', l_i) = (1,0,0)$; $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n_i', l_i) = (0,1,0)$, $e_i'' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n_i', l_i) = (0,0,1)$, $i \in J$.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t+h) < x_{i,n_i+n_i'},\ i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло и обслуживание ни в одном узле не закончилось. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} + hI_{n_i>0},\ i \in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i + n_i', l_i)I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i)I_{l_i>0})h + o(h)\Big).$$

2) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'} + hI_{n_k>0},$$

$$k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j, \xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n_j'}(t) < x_{j,n_j+n_j'},$$

$$\xi_{j,n_j+n_j'+1}(t) < h, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h).$$

Здесь $h - \theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0 < \theta < h$.

3) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество временно неактивных заявок, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + h\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}.$$

4) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество временно неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

5) За время h режим работы i-го узла увеличился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e''_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1)hI_{l_i>0} + o(h))I_{l_i>0}.$$

6) За время h режим работы i-го узла уменьшился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z + e''_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\rho_i(n_i + n'_i, l_i + 1)hI_{l_i<r_i} + o(h))I_{l_i<r_i}.$$

7) За время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем

$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\xi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\} = P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$hI_{n_i>0} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0},\ i \in J\} \times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0} + \sigma_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i<r_i} +$$

$$+\rho_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i>0})h\Big) + \tag{3.13}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\ne i}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_j, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,\ k \ne j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta) p_{j,i} I_{n_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + h\}(\nu_i h + o(h)) I_{n'_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h)) I_{n_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e''_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1)hI_{l_i>0} + o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e''_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\rho_i(n_i + n'_i, l_i + 1)hI_{l_i<r_i} + o(h))I_{l_i<r_i} + o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в (3.13), выразим через функции вида

$$F_t(z, x) = P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z, x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n'_i}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J\} =$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N} F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i}+h,\ i \in J, i \neq k; x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k+n'_k-1}, h)+$$

$$+ \ldots + F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i-1}, h,\ i \in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z, x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h, i \in J\} =$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i},\,i\in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}h-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{l,1},\ldots,x_{l,n_l+n'_l},\,l\in J,l\neq i;x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i-1},0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\times$$

$$\times h+o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$F(z,x)=F(z,x)+h\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}-\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\right)I_{n_i>0}-$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{N}\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}+\sigma_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i<r_i}+$$

$$+\rho_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i>0}\big)h+o(h)\Bigg)F(z,x)+$$

$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times \tag{3.14}$$

$$\times\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e'_i,x)(\nu_i h+o(h))I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e'_i,x)(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e''_i,x)(\sigma_i(n_i+n'_i,l_i-1)hI_{l_i>0}+o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i'',x)(\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)hI_{l_i<r_i}+o(h))I_{l_i<r_i}+o(h).$$

Вычтем из обеих частей $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}+$$
$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\big)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\right)I_{n_i>0}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N} p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times$$
$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0}+ \tag{3.15}$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i'',x)\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i'',x)\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{l_i<r_i}.$$

Разобьем систему дифференциально-разностных уравнений (3.15) на уравнения локального баланса:

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)=F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+$$

$$+F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}; \tag{3.16}$$

$$\left(\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)I_{n_i>0}=$$

$$=\sum_{j=1,j\neq i}^{N} p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times \tag{3.17}$$

$$\times\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}I_{n_i>0};$$

$$F(z,x)\big(\sigma_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i>0}\big)=$$

$$=F(z-e''_i,x)\sigma_i(n_i+n'_i,l_i-1)I_{l_i>0}+ \tag{3.18}$$

$$+F(z+e''_i,x)\rho_i(n_i+n'_i,l_i+1)I_{n_i<r_i},\ i\in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (3.10), (3.11), являются решением уравнений (3.16) – (3.18), а следовательно, и уравнений (3.15).

Подставляя (3.10), (3.11) в уравнение (3.16), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$, получим тождество. Подставляя (3.10), (3.11) в уравнение (3.17), деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})F(z-e_i,x)$, получим систему уравнений трафика (3.1).

Подставляя (3.10), (3.11) в уравнение (3.18), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$ и используя условие (3.9), получим тождество. *Теорема доказана.* □

Пусть $\{p(z),\ z\in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 3.2 с учетом равенства $p(z)=F(z,+\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 3.1. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен. При выполнении условий* (3.9) *стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z),\, z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s,x)$ и имеет мультипликативный вид*

$$p(z) = G^{-1}(M,N)p_1(n_1,n_1',l_1)\dots p_N(n_N,n_N',l_N),\ z \in Z.$$

Вероятности $p_i(n_i,n_i',l_i)$ могут быть найдены по формулам (3.11)*, $G(M,N)$ – нормирующая константа, находящаяся из условия* (3.12).

3.3 Стационарное распределение открытой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

Исследуется открытая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \ldots, N\}$. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входящего потока независимо от других заявок направляется в i-й узел с вероятностью $p_{0,i}$, $i \in J$,

$$\sum_{i=1}^{N} p_{0,i} = 1.$$

Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Информационный сигнал, поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i, уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i, уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу количество обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы не требуют обслуживания в сети.

Предполагается, что i-й узел может функционировать в одном из $r_i + 1$ режимов. Обозначим l_i – номер режима, в котором функционирует i-й узел $\left(l_i = \overline{0, r_i},\, r_i > 0, i \in J\right)$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i -м узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла, $n_i(t)+n_i'(t)$

– общее число заявок в i-м узле. Фазовое пространство случайного процесса $z_i(t)$ имеет вид

$$Z_i = \{z_i = (n_i, n'_i, l_i) : n_i, n'_i \geq 0, l_i = \overline{0, r_i},\ i \in J\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i. Поступающий в i-й узел сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n'_i, l_i)$, в режиме l_i ($l_i = \overline{0, r_i}, i \in J$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\sigma_i(n_i + n'_i, l_i) > 0$ i-й узел переходит в $(l_i + 1)$-й режим ($l_i = \overline{0, r_i - 1}$), а с интенсивностью $\rho_i(n_i + n'_i, l_i) > 0$ – в $(l_i - 1)$-й режим ($l_i = \overline{1, r_i}$). Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее количество заявок в узле.

Времена обслуживания активных заявок независимы и имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n_i + n'_i, l_i)$, $i \in J$. Дисциплина обслуживания – $LCFS - PR$. Поступающая в i-й узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + 1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть массового обслуживания,

$$\sum_{j \in J} p_{i,j} + p_{i,0} = 1,\ i \in J.$$

Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации рассматриваемой сети предполагается неприводимой.

Для открытых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = p_{0,j} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{3.19}$$

имеет единственное положительное решение ε_j [7].

Процесс $z(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством $Z = \{Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_N\}$, где Z_i – фазовое пространство случайного процесса $z_i(t)$.

Рассмотрим изолированный i-й узел в фиктивной окружающей среде (окружающая среда является фиктивной, поскольку в сети суммарные потоки заявок в узлы, вообще говоря, не являются простейшими), предполагая, что в него поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda\varepsilon_i$, где ε_i – решение системы уравнений трафика (3.19).

Пусть $\{p_i(z_i), z_i \in Z_i\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z_i(t)$. Предположим, что i-й узел обратим. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

$$\lambda\varepsilon_i p_i(n_i - 1, n_i', l_i) I_{n_i > 0} = \mu_i(n_i + n_i', l_i) p_i(n_i, n_i', l_i);$$

$$\nu_i p_i(n_i + 1, n_i' - 1, l_i) I_{n_i' > 0} = \varphi_i p_i(n_i, n_i', l_i);$$

$$\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1) p_i(n_i, n_i', l_i - 1) I_{l_i > 0} = \rho_i(n_i + n_i', l_i) p_i(n_i, n_i', l_i),$$

$$n_i, n_i' > 0, l_i = \overline{1, r_i}, i \in J.$$

Из уравнений обратимости находим стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла

$$p_i(n_i, n_i', l_i) = \left(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i + n_i'} \frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(s, l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)} p_i(0, 0, 0). \tag{3.20}$$

Здесь ε_i – решение системы уравнений трафика (3.19),

$$p_i(0,0,0) = \Big(\sum_{(n_i,n_i',l_i)\in Z_i} \Big(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(s,l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}\Big)^{-1}.$$

Пусть $\{p(z),\ z \in Z\}$ – стационарное распределение процесса $z(t)$. Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i', l_i) = (1,0,0)$, $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i', l_i) = (0,1,0)$, $e_i'' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i', l_i) = (0,0,1)$.

Если $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $z(t)$ из состояния $x \in Z$ в состояние $y \in Z$, $q(x) = \sum\limits_{y\neq x} q(x,y)$ – интенсивность выхода из состояния x, то интенсивности переходов процесса $z(t)$ имеют вид

$$q(z, z+e_i) = \lambda p_{0,i},$$

$$q(z, z-e_i+e_i') = \nu_i I_{n_i>0},$$

$$q(z, z+e_i-e_i') = \varphi_i I_{n_i'>0},$$

$$q(z, z-e_i) = \mu_i(n_i+n_i', l_i) p_{i,0} I_{n_i>0},$$

$$q(z, z-e_i'') = \rho_i(n_i+n_i', l_i) I_{l_i>0},$$

$$q(z, z+e_i'') = \sigma_i(n_i+n_i', l_i) I_{l_i<r_i},$$

$$q(z, z-e_i+e_j) = \mu_i(n_i+n_i', l_i) p_{i,j} I_{n_i>0},$$

$$i,j \in J, z \in Z.$$

Для всех остальных состояний $y \in Z$ $q(x,y) = 0$. Интенсивность выхода получается сложением указанных интенсивностей:

$$q(z) = \lambda + \sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_i+n_i', l_i) I_{n_i>0} + \sum_{i=1}^{N} (\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}),\, z\in Z. \qquad (3.21)$$

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей состояний сети имеют вид

$$p(z)\sum_{i=1}^{N}\Big(\lambda p_{0,i}+\mu_i(n_i+n_i',l_i)I_{n_i>0}+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\Big)= \qquad (3.22)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Big(p(z-e_i)\lambda p_{0,i}I_{n_i>0}+p(z-e_i+e_i')\varphi_i I_{n_i>0}+$$

$$+p(z+e_i-e_i')\nu_i I_{n_i'>0}+p(z+e_i'')\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{l_i<r_i}+$$

$$+p(z-e_i'')\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}+p(z+e_i)\mu_i(n_i+n_i'+1,l_i)p_{i,0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}p(z-e_i+e_j)\mu_j(n_j+n_j'+1,l_j)p_{j,i}I_{n_i>0}\Big).$$

Теорема 3.3. *Если для всех $i\in J$ выполняются условия*

$$\sigma_i(n_i+n_i'-1,l_i-1)\rho_i(n_i+n_i',l_i)\mu_i(n_i+n_i',l_i-1)=$$

$$=\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)\rho_i(n_i+n_i'-1,l_i)\mu_i(n_i+n_i',l_i),$$

$$n_i,n_i'>0, l_i=\overline{1,r_i},$$

и сходится ряд

$$\sum_{z\in Z}q(z)\prod_{i=1}^{N}\Big(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}, \qquad (3.23)$$

где $q(z)$ – интенсивность выхода из состояния z, определяемая равенством (3.21), *то марковский процесс $z(t)$ эргодичен,* *а его стационарное распределение вероятностей состояний имеет мультипликативную форму*

$$p(z) = p_1(z_1)p_2(z_2)...p_N(z_N), z \in Z, \tag{3.24}$$

где $p_i(z_i)$ *определяется по формуле* (3.20).

Доказательство. Докажем, что марковский процесс $z(t)$ эргодичен при выполнении условия (3.23). Согласно эргодической теореме Фостера [29], достаточно доказать, что существует нетривиальное решение $\{p(x),\ x \in Z\}$ системы уравнений равновесия

$$p(x)q(x) = \sum_{y \neq x,\, y \in Z} p(y)q(y,x),\ x \in Z, \tag{3.25}$$

такое, что ряд $\sum\limits_{x \in Z} q(x)p(x)$ сходится.

Докажем, что (3.24) удовлетворяет уравнениям равновесия (3.22). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (3.22) на уравнения локального равновесия:

$$p(z)\sum_{i=1}^{N} \lambda p_{0,i} = \sum_{i=1}^{N} p(z+e_i)\mu_i(n_i+n'_i+1, l_i)p_{i,0}; \tag{3.26}$$

$$p(z)\Big(\mu_i(n_i+n'_i, l_i)I_{n_i>0} + \nu_i I_{n_i>0}\Big) =$$

$$= p(z-e_i)\lambda p_{0,i}I_{n_i>0} + p(z-e_i+e'_i)\varphi_i I_{n_i>0} + \tag{3.27}$$

$$+\sum_{j=1}^{N} p(z-e_i+e_j)\mu_j(n_j+n'_j+1, l_j)p_{j,i}I_{n_i>0};$$

$$p(z)\varphi_i I_{n'_i>0} = p(z+e_i-e'_i)\nu_i I_{n'_i>0}; \tag{3.28}$$

$$p(z)\Big(\sigma_i(n_i+n'_i, l_i)I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i+n'_i, l_i)I_{l_i>0}\Big) =$$

$$= p(z+e''_i)\rho_i(n_i+n'_i, l_i+1)I_{l_i<r_i} + \tag{3.29}$$

$$+p(z-e_i'')\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}.$$

Подставим (3.24) в уравнение локального равновесия (3.26), разделим обе части на $p(z)$, получим

$$\lambda=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(n_i+1,n_i',l_i)}{p_i(n_i,n_i',l_i)}\mu_i(n_i+n_i'+1,l_i)p_{i,0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(n_i+n_i'+1,l_i)}\mu_i(n_i+n_i'+1,l_i)p_{i,0}=\sum_{i=1}^{N}\lambda\varepsilon_i p_{i,0}=\lambda.$$

Подставим (3.24) в уравнение локального баланса (3.27), разделим обе части на $p(z)$, получим

$$\mu_i(n_i+n_i',l_i)I_{n_i>0}+\nu_i I_{n_i>0}=$$

$$=\frac{p_i(n_i-1,n_i',l_i)}{p_i(n_i,n_i',l_i)}\lambda p_{0,i}I_{n_i>0}+\frac{p_i(n_i-1,n_i'+1,l_i)}{p_i(n_i,n_i',l_i)}\varphi_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_i(n_i-1,n_i',l_i)}{p_i(n_i,n_i',l_i)}\times\frac{p_j(n_j+1,n_j',l_j)}{p_j(n_j,n_j',l_j)}\times$$

$$\times\mu_j(n_j+n_j'+1,l_j)p_{j,i}I_{n_i>0}=\frac{\mu_i(n_i+n_i',l_i)}{\lambda\varepsilon_i}\lambda p_{0,i}I_{n_i>0}+\frac{\nu_i}{\varphi_i}\varphi_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_i(n_i+n_i',l_i)}{\varepsilon_i}\times\frac{\varepsilon_j\mu_j(n_j+n_j'+1,l_j)}{\mu_j(n_j+n_j'+1,l_j)}p_{j,i}I_{n_i>0}=$$

$$=\nu_i I_{n_i>0}+\frac{\mu_i(n_i+n_i',l_i)}{\varepsilon_i}\Big(p_{0,i}+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j p_{j,i}\Big)I_{n_i>0}=$$

$$=\nu_i I_{n_i>0}+\mu_i(n_i+n_i',l_i)I_{n_i>0}.$$

Подставим (3.24) в уравнение локального баланса (3.28), разделим обе части на $p(z)$, получим

$$\varphi_i I_{n_i'>0}=\frac{p_i(n_i+1,n_i'-1,l_i)}{p_i(n_i,n_i',l_i)}\nu_i I_{n_i'>0}=\frac{\varphi_i}{\nu_i}\nu_i I_{n_i'>0}=\varphi_i I_{n_i'>0}.$$

Подставим (3.24) в уравнение локального баланса (3.29), разделим обе части на $p(z)$, получим

$$\sigma_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i>0} =$$

$$= \frac{p_i(n_i, n_i', l_i + 1)}{p_i(n_i, n_i', l_i)} \rho_i(n_i + n_i', l_i + 1) I_{l_i<r_i} +$$

$$+ \frac{p_i(n_i, n_i', l_i - 1)}{p_i(n_i, n_i', l_i)} \sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1) I_{l_i>0} =$$

$$= \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\mu_i(s, l_i)}{\mu_i(s, l_i + 1)} \times \frac{\sigma_i(0, l_i)}{\rho_i(0, l_i + 1)} \rho_i(n_i + n_i', l_i + 1) I_{l_i<r_i} +$$

$$+ \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\mu_i(s, l_i - 1)}{\mu_i(s, l_i)} \times \frac{\rho_i(0, l_i)}{\sigma_i(0, l_i - 1)} \sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1) I_{l_i>0} =$$

$$= \sigma_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i>0}.$$

Из требования теоремы Фостера о сходимости ряда $\sum\limits_{x \in Z} q(x)p(x)$, учитывая (3.23), получим уравнение (3.25). *Теорема доказана.* $\square$

3.4 Инвариантность стационарного распределения открытой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания из пункта 3.3 на случай произвольного распределения длительности обслуживания заявки.

Пусть в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$. Если сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая начинает немедленно обслуживаться, то длительность ее обслуживания является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B_i(n_i+n'_i+1, s)$ и конечным математическим ожиданием $1/\mu_i$. Предполагается, что $B_i(n_i + n'_i + 1, 0) = 0$, $i \in J$.

Пусть $\xi_{i,k}(t)$ – время, оставшееся до окончания обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\xi_i(t) = (\xi_{i,1}(t), \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i}(t))$, $i \in J$.

В общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \xi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n'_1}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n'_N}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i}, i \in J\},$$

$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\,\forall\, k,\ l.$$

Функции $F(z, x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z, x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 3.4. *При выполнении условий*

$$\lambda\varepsilon_i < \mu_i,$$
$$\lambda\varepsilon_i\nu_i < \mu_i\varphi_i,\ i \in J, \tag{3.30}$$

$$\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1)\rho_i(n_i + n_i' - 1, l_i) =$$
$$= \sigma_i(n_i + n_i' - 1, l_i - 1)\rho_i(n_i + n_i', l_i), \tag{3.31}$$
$$l_i = \overline{1, r_i}, \quad i \in J,$$

процесс $\zeta(t)$ *эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний* $F(z, x)$ *определяются по формулам*

$$F(z, x) = p_1(n_1, n_1', l_1)p_2(n_2, n_2', l_2)\dots p_N(n_N, n_N', l_N)\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} \mu_i^{n_i+n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \int\limits_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s, u))du,\ z \in Z, \tag{3.32}$$

где

$$p_i(n_i, n_i', l_i) = \Big(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i\mu_i}\Big)^{n_i'}\Big(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i}\Big)^{n_i} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)} p_i(0, 0, 0), \tag{3.33}$$

$$p_i(0, 0, 0) = \Big(1 - \frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i\mu_i}\Big)\Big(1 - \frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i}\Big)\Big(\sum_{l_i=0}^{r_i} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)}\Big)^{-1},$$

ε_i – *решение системы уравнений трафика* (3.19).

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условия (3.30) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита [29], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок) и периодов занятости сети (в противном случае).

Момент перехода сети в свободное состояние «0» является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i', l_i) = (1, 0, 0)$, $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i', l_i) = (0, 1, 0)$,$e_i'' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n_i', l_i) = (0, 0, 1)$.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления в сеть заявок или поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n_i'}(t+h) < x_{i,n_i+n_i'},\ i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло и обслуживание ни в одном узле не закончилось. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}+$$

$$+hI_{n_i>0},\ i \in J\}\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\lambda p_{0,i} + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i + n_i', l_i)I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i)I_{l_i>0})h + o(h)\Big).$$

2) За время h заявка поступила в i-й узел и сразу начала обслуживаться, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n_k'}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n_k'} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \leq \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$

$$\times(\lambda p_{0,i}h + o(h))B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)I_{n_i>0},$$

где $h - \theta$ – время, которое прошло с момента t до поступления заявки, а θ – время с момента поступления заявки до $t+h$, $0 < \theta < h$.

3) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \leq \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\}B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h).$$

Здесь $h - \theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0 < \theta < h$.

4) За время h в i-м узле заявка была обслужена, после чего она покинула сеть, спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z + e_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i+1}(t) < h\}p_{i,0} + o(h).$$

5) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество временно неактивных заявок, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z + e_i - e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + h\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}.$$

6) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество временно неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e'_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

7) За время h режим работы i-го узла увеличился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e''_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1)hI_{l_i>0} + o(h))I_{l_i>0}.$$

8) За время h режим работы i-го узла уменьшился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z + e''_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \leq \xi_{k,n_k+n'_k}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\rho_i(n_i + n'_i, l_i + 1)hI_{l_i<r_i} + o(h))I_{l_i<r_i}.$$

9) За время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

Естественно, что в каждом из перечисленных пунктов и для каждого узла параметр θ свой. Но чтобы не загромождать выкладки, индексация для θ не вводится.

В силу сказанного выше имеем:

$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\xi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\} = P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$hI_{n_i>0} \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0},\ i \in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\lambda p_{0,i} + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0} +$$

$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0})h+o(h)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\{z(t)=z-e_i,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\le\xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},k\in J,\,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,hI_{n_i>1}\le\xi_{i,n_i+n_i'-1}(t)<x_{i,n_i+n_i'-1}+hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times(\lambda p_{0,i}h+o(h))B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'}+\theta)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}P\{z(t)=z-e_i+e_j,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\le$$

$$\le\xi_{k,n_k+n_k'}(t)<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},\,k\in J,\,k\ne i,\,k\ne j,$$

$$\xi_{j,1}(t)<x_{j,1},\ldots,\xi_{j,n_j+n_j'}(t)<x_{j,n_j+n_j'},\xi_{j,n_j+n_j'+1}(t)<h,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,hI_{n_i>1}\le\xi_{i,n_i+n_i'-1}(t)<x_{i,n_i+n_i'-1}+hI_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'}+\theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+\qquad(3.34)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\{z(t)=z+e_i,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\le\xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},k\in J,\,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\xi_{i,n_i+n_i'+1}(t)<h\}p_{i,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\{z(t)=z+e_i-e_i',\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\le$$

$$\le\xi_{k,n_k+n_k'}(t)<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},\,k\in J,\,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,h\le\xi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n_i'}+h\}(\nu_ih+o(h))I_{n_i'>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z-e_i+e_i', \xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\leq$$

$$\leq \xi_{k,n_k+n_k'}(t)<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,hI_{n_i>1}\leq \xi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n_i'}+hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z-e_i'', \xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\leq \xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,hI_{n_i>0}\leq \xi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}+hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)hI_{l_i>0}+o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z+e_i'', \xi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,hI_{n_k>0}\leq \xi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,hI_{n_i>0}\leq \xi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}+hI_{n_i>0}\}\times$$

$$\times(\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)hI_{l_i<r_i}+o(h))I_{l_i<r_i}+o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в (3.34), выразим через функции вида

$$F_t(z,x)=P\{z(t)=z,\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\xi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'},\ i\in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z,x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n_i'}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t)=z,\xi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,h\leq \xi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}+h,\ i\in J\}=$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J) -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J, i \neq k; x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k+n'_k-1}, h) +$$

$$+ \ldots + F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i-1}, h,\ i \in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z, x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \leq \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h, i \in J\} =$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} h -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{l,1}, \ldots, x_{l,n_l+n'_l},\ l \in J, l \neq i; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n'_i-1}, 0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \times$$

$$\times h + o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z, x)$ по переменной t стремится к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$F(z, x) = F(z, x) + h \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} - \left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \right)_{x_{i,n_i+n'_i} = 0} \right) I_{n_i > 0} -$$

$$- \Bigg(\sum_{i=1}^{N} \big(\lambda p_{0,i} + \nu_i I_{n_i > 0} + \varphi_i I_{n'_i > 0} + \sigma_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i < r_i} +$$

$$+ \rho_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i > 0} \big) h + o(h) \Bigg) F(z, x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(\lambda p_{0,i}h+o(h))B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})F(z-e_i,x)I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times \tag{3.35}$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{i=1}^{N}p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)(\nu_i h+o(h))I_{n_i'>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i'',x)(\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)hI_{l_i>0}+o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i'',x)(\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)hI_{l_i<r_i}+o(h))I_{l_i<r_i}+o(h).$$

Вычтем из обеих частей (3.35) $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\big(\lambda p_{0,i}+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\bigg(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\bigg)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \lambda p_{0,i} B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'}) F(z-e_i,x) I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N} p_{j,i} B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0} I_{n_i>0}+ \qquad (3.36)$$

$$+\sum_{i=1}^{N} p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i'',x)\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1) I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i'',x)\rho_i(n_i+n_i',l_i+1) I_{l_i<r_i}.$$

Разобьем систему уравнений (3.36) на уравнения локального баланса:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda p_{0,i} F(z,x)=\sum_{i=1}^{N} p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}; \qquad (3.37)$$

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)=F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+$$

$$+F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}; \qquad (3.38)$$

$$\bigg(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\bigg) I_{n_i>0}=$$

$$= \sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{j,i} B_i(n_i + n_i', x_{i,n_i+n_i'}) \times$$

$$\times \Big(\frac{\partial F(z + e_j - e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0} I_{n_i>0} + \tag{3.39}$$

$$+\lambda p_{0,i} B_i(n_i + n_i', x_{i,n_i+n_i'}) F(z - e_i, x) I_{n_i>0};$$

$$F(z,x)\big(\sigma_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i>0}\big) =$$

$$= F(z - e_i'', x)\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1) I_{l_i>0} + \tag{3.40}$$

$$+F(z + e_i'', x)\rho_i(n_i + n_i', l_i + 1) I_{n_i<r_i},\ i \in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (3.32), (3.33), являются решением уравнений (3.37) – (3.40), а следовательно, и уравнений (3.36).

Подставляя (3.32), (3.33) в уравнение (3.37), деля обе части полученного соотношения на $\lambda F(z,x)$, получим следствие уравнения трафика:

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,0}.$$

Подставляя (3.32), (3.33) в уравнение (3.38), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$, получим тождество. Подставляя (3.32), (3.33) в уравнение (3.39), деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i + n_i', x_{i,n_i+n_i'})F(z - e_i, x)$, получим систему уравнений трафика (3.19). Подставляя (3.32), (3.33) в уравнение (3.40), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$ и используя условие (3.31), получим тождество. *Теорема доказана.* □

Пусть $\{p(z),\ z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 3.4 с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 3.2. *Если выполняется условие* (3.30), *то процесс* $z(t)$ *эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний сети* $\{p(z), z \in Z\}$ *не зависит от функционального вида распределений* $B_i(s,x), i \in J$, *и имеет мультипликативную форму*

$$p(z) = p_1(n_1, n_1', l_1)p_2(n_2, n_2', l_2)...p_N(n_N, n_N', l_N),\ z \in Z,$$

где вероятности $p_i(n_i, n_i', l_i)$ *определяются по формулам* (3.33). *Здесь* $p_i(n_i, n_i', l_i)$ *– стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла,* $i \in J$.

4 ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОРЕЖИМНЫХ СЕТЕЙ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЛИЧЕСТВА РАБОТЫ ПО ОБСЛУЖИВАНИЮ ЗАЯВКИ

4.1 Инвариантность стационарного распределения замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания из пункта 3.1 на случай произвольного распределения количества работы по обслуживанию заявки.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$, и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной $\eta_i(n_i + n_i' + 1)$ с функцией распределения $B_i(n_i + n_i' + 1, s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n_i' + 1)$. Предполагается, что $B_i(n_i + n_i' + 1, 0) = 0$, $i \in J$. Если в момент времени t состояние i-го узла есть $(n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i(n_i + n_i', l_i)$, то есть зависит от состояния узла. Обслуживание имеет не «временную», а, так называемую, «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить. Переключение с режима l_i в $l_i + 1$ можно интерпертировать как частичное снижение работоспособности, поэтому скорость обслуживания заявки $\alpha_i(n_i + n_i', l_i)$ уменьшается и становится равной $\alpha_i(n_i + n_i', l_i + 1)$. Аналогично переход с режима l_i в $l_i - 1$ означает частичное повышение работоспособности с увеличением скорости обслуживания.

В пункте 3.1 рассмотрен случай, когда $B_i(n_i + n_i', s)$ является функцией распределения экспоненциального времени обслуживания. Тогда $z(t)$ – марковский процесс, для которого в пункте

3.1 найдено стационарное распределение вероятностей состояний в виде (3.5).

Рассмотрим случай, когда количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i(n_i + n_i')$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n_i', s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n_i')$.

Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\psi_i(t) = (\psi_{i,1}(t), \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t))$, $i \in J$.

В силу сказанного выше, если состояние i-го узла есть вектор (n_i, n_i', l_i), $i \in J$, то

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n_i'}(t)}{dt} = -\alpha_i(n_i + n_i', l_i).$$

В общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \psi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$

$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\,\forall\, k,\ l.$$

Функции $F(z, x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z, x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 4.1. *Марковский процесс $\zeta(t)$ эргодичен. При выполнении условий*

$$\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1)\alpha_i(n_i + n_i', l_i)\rho_i(n_i + n_i' - 1, l_i) =$$

$$= \sigma_i(n_i + n'_i - 1, l_i - 1)\alpha_i(n_i + n'_i, l_i - 1)\rho_i(n_i + n'_i, l_i), \qquad (4.1)$$

$$1 \le n_i + n'_i \le M, \quad l_i = \overline{1, r_i}, \quad i \in J,$$

стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z, x)$ *определяются по формулам*

$$F(z, x) = G^{-1}(M, N)p_1(n_1, n'_1, l_1)p_2(n_2, n'_2, l_2)\dots p_N(n_N, n'_N, l_N)\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{N} \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \frac{1}{\tau_i(s)} \int\limits_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s, u))du, \ z \in Z, \qquad (4.2)$$

где

$$p_i(n_i, n'_i, l_i) = {\varepsilon_i}^{n_i}\Big(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n'_i} \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s, l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)}, \qquad (4.3)$$

ε_i *– решение системы уравнений трафика* (3.1), $G(M, N)$ *– нормирующая константа, находящаяся из условия:*

$$\sum_{((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) \in Z} p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) = 1. \quad (4.4)$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. По эргодической теореме Маркова [29] $z(t)$ в марковском случае эргодичен, следовательно, и в общем случае $\zeta(t)$ эргодичен, поскольку получается из $z(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Пусть $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n'_i, l_i) = (1, 0, 0)$; $e'_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n'_i, l_i) = (0, 1, 0)$, $e''_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n'_i, l_i) = (0, 0, 1)$, $i \in J$.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i}, \, i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло, и обслуживание ни в одном узле не закончилось. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i + n'_i, l_i)hI_{n_i>0} \leq \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} +$$

$$+\alpha_i(n_i + n'_i, l_i)hI_{n_i>0}, \, i \in J\}\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0} +$$

$$+\sigma_i(n_i + n'_i, l_i)I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n'_i, l_i)I_{l_i>0})h + o(h)\Big).$$

2) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k, l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} +$$

$$+\alpha_k(n_k + n'_k, l_k)hI_{n_k>0}, \, k \in J, \, k \neq i, \, k \neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) <$$

$$< \alpha_j(n_j + n'_j + 1, l_j)(h - \theta),$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i - 1, l_i)(h - \theta)I_{n_i>1} \leq$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n_i'-1}(t) < x_{i,n_i+n_i'-1} + \alpha_i(n_i+n_i'-1, l_i)(h-\theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i', l_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h).$$

Здесь $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0 < \theta < h$.

3) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество временно неактивных заявок, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z+e_i-e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k+n_k', l_k)hI_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'} + \alpha_k(n_k+n_k', l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i', l_i)h \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i', l_i)h\}(\nu_i h + o(h))I_{n_i'>0}.$$

4) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество временно неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z-e_i+e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k+n_k', l_k)hI_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'} + \alpha_k(n_k+n_k', l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i', l_i)hI_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i) h I_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h)) I_{n_i>0}.$$

5) За время h режим работы i-го узла увеличился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e''_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k + n'_k, l_k) h I_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k, l_k) h I_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i, l_i - 1)(h - \theta) I_{l_i>0} +$$

$$+ \alpha_i(n_i + n'_i, l_i)\theta \leq \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i - 1)(h - \theta) I_{l_i>0} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i)\theta\} \times$$

$$\times (\sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1) h I_{l_i>0} + o(h)) I_{l_i>0},$$

где $h - \theta$ – время, которое прошло с момента времени t до момента переключения режима, $0 < \theta < h$.

6) За время h режим работы i-го узла уменьшился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z + e''_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k + n'_k, l_k) h I_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k, l_k) h I_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i, l_i + 1)(h - \theta) I_{l_i<r_i} +$$

$$+ \alpha_i(n_i + n'_i, l_i)\theta \leq \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i + 1)(h - \theta) I_{l_i<r_i} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i)\theta\} \times$$

$$\times(\rho_i(n_i+n'_i,l_i+1)hI_{l_i<r_i}+o(h))I_{l_i<r_i},$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до момента переключения режима, $0<\theta<h$.

7) За время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

Естественно, что в каждом из перечисленных пунктов и для каждого узла параметр θ свой. Но чтобы не загромождать выкладки, индексация для θ не вводится.

В силу сказанного выше имеем:

$$P\{z(t+h)=z,\psi_{i,1}(t+h)<x_{i,1},\dots,$$

$$\psi_{i,n_i+n'_i}(t+h)<x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J\}=P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,$$

$$\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)hI_{n_i>0}\le\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)hI_{n_i>0},\ i\in J\}\Big(1-\sum_{i=1}^{N}(\nu_iI_{n_i>0}+\varphi_iI_{n'_i>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i>0})h+o(h)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}P\{z(t)=z-e_i+e_j,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0}\le\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\ne i,\ k\ne j,$$

$$\psi_{j,1}(t)<x_{j,1},\dots,\psi_{j,n_j+n'_j}(t)<x_{j,n_j+n'_j},\psi_{j,n_j+n'_j+1}(t)<$$

$$<\alpha_j(n_j+n'_j+1,l_j)(h-\theta),$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\alpha_i(n_i+n'_i-1,l_i)(h-\theta)I_{n_i>1}\le \qquad (4.5)$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n_i'-1}(t) < x_{i,n_i+n_i'-1} + \alpha_i(n_i+n_i'-1,l_i)(h-\theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e_i - e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i',l_i)h \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i',l_i)h\}(\nu_i h + o(h))I_{n_i'>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i',l_i)hI_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i',l_i)hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i'', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i',l_i-1)(h-\theta)I_{l_i>0} + \alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta \leq$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i',l_i-1)(h-\theta)I_{l_i>0}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta\}(\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}h+o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\{z(t)=z+e_i'',\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0}\le\psi_{k,n_k+n_k'}(t)<x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\ne i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\alpha_i(n_i+n_i',l_i+1)(h-\theta)I_{l_i<r_i}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta\le$$

$$\le\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i+1)(h-\theta)I_{l_i<r_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta\}(\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{l_i<r_i}h+o(h))I_{l_i<r_i}+o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в (4.5), выразим через функции вида

$$F_t(z,x)=P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'},\ i\in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z,x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n_i'}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\alpha_i(n_i+n_i',l_i)h\le$$

$$\le\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)h,\ i\in J\}=$$

$$=F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)h,\ i\in J)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}F_t(z,x_{i,1},\dots,x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)h,\ i\in J,i\ne k;x_{k,1},\dots,$$

$$x_{k,n_k+n_k'-1},\alpha_k(n_k+n_k',l_k)h)+\ldots+$$

$$+F_t(z, x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i+n'_i-1}, \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)h,\ i \in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t)=z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots, \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)h \le$$

$$\le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)h, i \in J\} =$$

$$= F_t(z, x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)h -$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{l,1}, \dots, x_{l,n_l+n'_l},\ l \in J, l \ne i; x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i+n'_i-1}, 0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \times$$

$$\times \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)h + o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)\theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$F(z,x) = F(z,x) + h\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} -$$

$$-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\Big) I_{n_i>0} - \Bigg(\sum_{i=1}^{N} \big(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0} +$$

$$+\sigma_i(n_i+n'_i, l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i+n'_i, l_i) I_{l_i>0}\big)h + o(h)\Bigg) F(z,x) +$$

$$+h\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1, i\ne j}^{N} \alpha_j(n_j+n'_j+1, l_j) p_{j,i} B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i}) \times \qquad (4.6)$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i-e'_i,x)(\nu_i h+o(h))I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i+e'_i,x)(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e''_i,x)(\sigma_i(n_i+n'_i,l_i-1)hI_{l_i>0}+o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e''_i,x)(\rho_i(n_i+n'_i,l_i+1)hI_{l_i<r_i}+o(h))I_{l_i<r_i}+o(h).$$

Вычтем из обеих частей $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть (4.6) разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n'_i,l_i)I_{l_i>0}\big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\Big)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\Big)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1,l_j)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0}+ \tag{4.7}$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i'', x)\sigma_i(n_i+n_i', l_i-1)I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i'', x)\rho_i(n_i+n_i', l_i+1)I_{l_i<r_i}.$$

Разобьем систему уравнений (4.7) на уравнения локального баланса:

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\big)=F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+$$

$$+F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}; \tag{4.8}$$

$$\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\bigg(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\bigg)I_{n_i>0}=$$

$$=\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\alpha_j(n_j+n_j'+1,l_j)p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times \tag{4.9}$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0};$$

$$F(z,x)\big(\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\big)=$$

$$=F(z-e_i'',x)\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}+ \tag{4.10}$$

$$+F(z+e_i'',x)\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{n_i<r_i},\ i\in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (4.2), (4.3), являются решением уравнений (4.8) – (4.10), а следовательно, и уравнений (4.7).

Подставляя (4.2), (4.3) в уравнение (4.8), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$, получим тождество. Подставляя

(4.2), (4.3) в уравнение (4.9), деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i})F(z - e_i, x)$, получим систему уравнений трафика (3.1). Подставляя (4.2), (4.3) в уравнение (4.10), деля обе части полученного соотношения на $F(z, x)$ и используя условие (4.1), получим тождество. *Теорема доказана.* $\square$

Пусть $\{p(z),\ z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 4.1 с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 4.1. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен. При выполнении условий (4.1) стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z),\ z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s, x)$ и имеет мультипликативный вид*

$$p(z) = G^{-1}(M, N)p_1(n_1, n'_1, l_1) \dots p_N(n_N, n'_N, l_N),\ z \in Z.$$

Здесь $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ могут быть найдены по формулам (4.3), $G(M, N)$ – нормирующая константа, находящаяся из (4.4).

4.2 Инвариантность стационарного распределения открытой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания из пункта 3.3 на случай произвольного распределения количества работы по обслуживанию заявки.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$, и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной $\eta_i(n_i + n_i' + 1)$ с функцией распределения $B_i(n_i + n_i' + 1, s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n_i' + 1)$. Предполагается, что $B_i(n_i + n_i' + 1, 0) = 0$, $i \in J$. Если в момент времени t состояние i-го узла есть $(n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i(n_i + n_i', l_i)$, то есть зависит от состояния узла, $i \in J$. Обслуживание имеет не «временную», а, так называемую, «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить. Переключение с режима l_i в $l_i + 1$ можно интерпретировать как частичное снижение работоспособности, поэтому скорость обслуживания заявки $\alpha_i(n_i + n_i', l_i)$ уменьшается и становится равной $\alpha_i(n_i + n_i', l_i + 1)$. Аналогично переход с режима l_i в $l_i - 1$ означает частичное повышение работоспособности с увеличением скорости обслуживания.

В пункте 3.3 рассмотрен случай, когда $B_i(n_i + n_i', s)$ является функцией распределения экспоненциального времени обслуживания. Тогда $z(t)$ – марковский процесс, для которого в пункте 3.3 найдено стационарное распределение вероятностей состояний в виде (3.24).

Рассмотрим случай, когда количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i(n_i + n_i')$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n_i', s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n_i')$.

Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\psi_i(t) = (\psi_{i,1}(t), \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t))$, $i \in J$.

В силу сказанного выше, если состояние i-го узла есть вектор (n_i, n_i', l_i), то

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n_i'}(t)}{dt} = -\alpha_i(n_i + n_i', l_i),\ i \in J.$$

В общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \psi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z,x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$
$$z \in Z,\ x_{k,l} \in \mathbb{R}\,\forall\, k,\ l.$$

Функции $F(z,x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z,x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 4.2. *При выполнении условий*

$$\sum_{z\in Z} q(z) \prod_{i=1}^{N} \Big(\lambda\varepsilon_i\Big)^{n_i} \Big(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s,l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)} < \infty, \tag{4.11}$$

где

$$q(z) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\lambda p_{0,i} + \frac{\alpha_i(n_i+n_i', l_i)}{\tau_i(n_i+n_i')} I_{n_i>0} + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0} +$$

$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\Big),$$

$$\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\rho_i(n_i+n_i'-1,l_i)=$$

$$=\sigma_i(n_i+n_i'-1,l_i-1)\alpha_i(n_i+n_i',l_i-1)\rho_i(n_i+n_i',l_i), \qquad (4.12)$$

$$l_i=\overline{1,r_i}, i\in J,$$

процесс $\zeta(t)$ *эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний* $F(z,x)$ *определяются по формулам*

$$F(z,x)=p_1(n_1,n_1',l_1)p_2(n_2,n_2',l_2)\dots p_N(n_N,n_N',l_N)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{1}{\tau_i(s)}\int\limits_0^{x_{i,s}}(1-B_i(s,u))du,\ z\in Z, \qquad (4.13)$$

где

$$p_i(n_i,n_i',l_i)=$$

$$=(\lambda\varepsilon_i)^{n_i}\Big(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}p_i(0,0,0), \qquad (4.14)$$

$$p_i(0,0,0)=$$

$$=\sum_{n_i=0}^{\infty}\sum_{n_i'=0}^{\infty}\sum_{l_i=0}^{r_i}\Big((\lambda\varepsilon_i)^{n_i}\Big(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\Big)^{n_i'}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}\Big)^{-1}, \qquad (4.15)$$

ε_i – *решение системы уравнений трафика* (3.19).

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условия (4.11) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита [29], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в свободное состоянии (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок, узел работает в основном режиме) и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Пусть $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n_i', l_i) = (1, 0, 0)$; $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n_i', l_i) = (0, 1, 0)$, $e_i'' \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю за исключением $(n_i, n_i', l_i) = (0, 0, 1)$, $i \in J$.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления заявок и за счет поступления сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния во временно неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t+h) < x_{i,n_i+n_i'}, \; i \in J\}.$$

Указанное событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1) С момента t за время h ни одного спонтанного изменения не произошло, и обслуживание ни в одном узле не закончилось. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i + n_i', l_i) h I_{n_i>0} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} +$$

$$+\alpha_i(n_i+n_i', l_i) h I_{n_i>0}, \; i \in J\} \Big(1 - \sum_{i=1}^{N} (\lambda p_{0,i} + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0} +$$

$$+\sigma_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i + n_i', l_i) I_{l_i>0}) h + o(h)\Big).$$

2) За время h заявка поступила в i-й узел и сразу начала обслуживаться, обслуживание ни в одном узле не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k, l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} +$$

$$+\alpha_k(n_k + n'_k, l_k)hI_{n_k>0},\ k \in J, k \neq i, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i + n'_i - 1, l_i)(h - \theta)I_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} +$$

$$+\alpha_i(n_i + n'_i - 1, l_i)(h - \theta)I_{n_i>1}\} \times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i)\theta)(\lambda p_{0,i}h + o(h))I_{n_i>0}.$$

Здесь $h - \theta$ – время, которое прошло с момента времени t до момента поступления заявки, $0 < \theta < h$.

3) За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n'_k, l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} +$$

$$+\alpha_k(n_k + n'_k, l_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,\ k \neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) <$$

$$< \alpha_j(n_j + n'_j + 1, l_j)(h - \theta), \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i + n'_i - 1, l_i)(h - \theta)I_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i-1} + \alpha_i(n_i + n'_i - 1, l_i)(h - \theta)I_{n_i>1}\} \times$$

$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i, l_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0} + o(h),$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0<\theta<h$.

4) За время h в i-м узле заявка была обслужена, после чего она покинула сеть, спонтанных изменений не произошло. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t)=z+e_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0}\le\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J, k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i},$$

$$\psi_{i,n_i+n'_i+1}(t)<\alpha_i(n_i+n'_i+1,l_i)(h-\theta)\}p_{i,0}+o(h),$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0<\theta<h$.

5) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивший на единицу количество временно неактивных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t)=z+e_i-e'_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0}\le$$

$$\le\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h\le\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h\}(\nu_ih+o(h))I_{n'_i>0}.$$

6) За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший на единицу количество временно неактивных заявок и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось. Режим работы узла не изменился.

$$P\{z(t) = z - e_i + e_i', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n_k', l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k + n_k', l_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n_i', l_i)hI_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i + n_i', l_i)hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

7) За время h режим работы i-го узла увеличился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t) = z - e_i'', \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k + n_k', l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) <$$

$$< x_{k,n_k+n_k'} + \alpha_k(n_k + n_k', l_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n_i', l_i - 1)(h - \theta)I_{l_i>0}+$$

$$+\alpha_i(n_i + n_i', l_i)\theta \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i + n_i', l_i - 1)(h - \theta)I_{l_i>0} + \alpha_i(n_i + n_i', l_i)\theta\}\times$$

$$\times(\sigma_i(n_i + n_i', l_i - 1)hI_{l_i>0} + o(h))I_{l_i>0},$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания пребывания прибора в режиме l_i-1, $0<\theta<h$, $i\in J$.

8) За время h режим работы i-го узла уменьшился на единицу, обслуживание ни в одном узле не закончилось, спонтанных изменений не произошло.

$$P\{z(t)=z+e_i'',\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\dots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0}\le\psi_{k,n_k+n_k'}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n_k'}+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\ne i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\dots,\alpha_i(n_i+n_i',l_i+1)(h-\theta)I_{l_i<r_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta\le\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i+1)(h-\theta)I_{l_i<r_i}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta\}\times$$

$$\times(\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)hI_{l_i<r_i}+o(h))I_{l_i<r_i},$$

где $h-\theta$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания пребывания прибора в режиме l_i+1, $0<\theta<h$, $i\in J$.

9) За время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

Естественно, что в каждом из перечисленных пунктов и для каждого узла параметр θ свой. Но чтобы не загромождать выкладки, индексация для θ не вводится.

В силу сказанного выше имеем:

$$P\{z(t+h)=z,\psi_{i,1}(t+h)<x_{i,1},\dots,$$

$$\psi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J\} = P\{z(t)=z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i+n'_i, l_i)hI_{n_i>0} \le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)hI_{n_i>0},\ i\in J\}\times$$

$$\times\Big(1 - \sum_{i=1}^{N}(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0} + \sigma_i(n_i+n'_i, l_i)I_{l_i<r_i} +$$

$$+\rho_i(n_i+n'_i, l_i)I_{l_i>0} + \lambda p_{0,i})h + o(h)\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k, l_k)hI_{n_k>0} \le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} +$$

$$+\alpha_k(n_k+n'_k, l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J, k\ne i, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots,$$

$$\alpha_i(n_i+n'_i-1, l_i)(h-\theta)I_{n_i>1} \le \psi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} +$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i-1, l_i)(h-\theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i+n'_i, l_i)\theta)(\lambda p_{0,i}h + o(h))I_{n_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\ne i}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_j, \psi_{k,1}(t) <$$

$$< x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k+n'_k, l_k)hI_{n_k>0} \le$$

$$\le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k+n'_k, l_k)hI_{n_k>0},$$

$$k\in J,\ k\ne i,\ k\ne j, \psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j},$$

$$\psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < \alpha_j(n_j+n'_j+1, l_j)(h-\theta),$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n'_i-1, l_i)(h-\theta)I_{n_i>1} \le$$

$$\leq \psi_{i,n_i+n_i'-1}(t) < x_{i,n_i+n_i'-1}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n_i'-1,l_i)(h-\theta)I_{n_i>1}\}\times$$

$$\times B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\theta)p_{j,i}I_{n_i>0}+o(h)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z+e_i-e_i', \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n_i',l_i)h \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n_i'}+\alpha_i(n_i+n_i',l_i)h\}(\nu_i h+o(h))I_{n_i'>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z+e_i, \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots, \tag{4.16}$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0} \leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J, k\neq i, \psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,$$

$$\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'}, \psi_{i,n_i+n_i'+1}(t)<\alpha_i(n_i+n_i'+1)(h-\theta)\}p_{i,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z-e_i+e_i', \psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0} \leq$$

$$\leq \psi_{k,n_k+n_k'}(t) < x_{k,n_k+n_k'}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n_k',l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n_i',l_i)hI_{n_i>1} \leq \psi_{i,n_i+n_i'}(t) <$$

$$< x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i+n'_i,l_i)hI_{n_i>1}\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e''_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0} \le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\ne i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i,l_i-1)(h-\theta)I_{l_i>0}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)\theta \le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i-1)(h-\theta)I_{l_i>0} + \alpha_i(n_i+n'_i,l_i)\theta\}\times$$

$$\times(\sigma_i(n_i+n'_i,l_i-1)hI_{l_i>0} + o(h))I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e''_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1},\ldots,$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0} \le \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k}+$$

$$+\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\ne i,$$

$$\psi_{i,1}(t) < x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i,l_i+1)(h-\theta)I_{l_i<r_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)\theta \le \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i+1)(h-\theta)I_{l_i<r_i} + \alpha_i(n_i+n'_i,l_i)\theta\}\times$$

$$\times(\rho_i(n_i+n'_i,l_i+1)hI_{l_i<r_i} + o(h))I_{l_i<r_i} + o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в уравнения (4.16), выразим через функции вида

$$F_t(z,x) = P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1},\ldots,\psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J\}.$$

Рассматривая $F_t(z,x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n'_i}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая тот факт, что

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,$$

$$\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h\le\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h,\ i\in J\}=$$

$$=F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h,\ i\in J)-\sum_{k=1}^{N}F_t(z,x_{i,1},\ldots,$$

$$x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h,\ i\in J,i\ne k;x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k+n'_k-1},$$

$$\alpha_k(n_k+n'_k,l_k)h)+\ldots+$$

$$+F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i-1},\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h,\ i\in J).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h\le\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<x_{i,n_i+n'_i}+$$

$$+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h,i\in J\}=F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i},\ i\in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,x_{l,1},\ldots,x_{l,n_l+n'_l},\ l\in J,l\ne i;x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i+n'_i-1},0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\times$$

$$\times\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)h+o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i,l_i)\theta)$ также разложим в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$F(z,x) = F(z,x) + h\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(n_i+n_i',l_i)\bigg(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} -$$

$$-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\bigg) I_{n_i>0} - \bigg(\sum_{i=1}^{N}\big(\lambda p_{0,i} + \nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0} +$$

$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\big)h + o(h)\bigg)F(z,x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(\lambda p_{0,i}h + o(h))B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})F(z-e_i,x)I_{n_i>0} +$$

$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n_j'+1,l_j)p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times \qquad (4.17)$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0} I_{n_i>0} +$$

$$+h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i'+1,l_i)p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)(\nu_i h + o(h))I_{n_i'>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i'',x)(\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}h + o(h))I_{l_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i'',x)(\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{l_i<r_i}h + o(h))I_{l_i<r_i} + o(h).$$

Вычтем из обеих частей (4.17) $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\big(\lambda p_{0,i}+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}+$$

$$+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i',l_i)\Bigg(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}-\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\Bigg)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda p_{0,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})F(z-e_i,x)I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n_j'+1,l_j)p_{j,i}B_i(n_i+n_i',x_{i,n_i+n_i'})\times \tag{4.18}$$

$$\times\Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0}I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i'+1,l_i)p_{i,0}\Big(\frac{\partial F(z+e_i,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}}\Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)\nu_i I_{n_i'>0}+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)\varphi_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i'',x)\sigma_i(n_i+n_i',l_i-1)I_{l_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i'',x)\rho_i(n_i+n_i',l_i+1)I_{l_i<r_i}.$$

Разобьем систему уравнений (4.18) на уравнения локального баланса:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda p_{0,i} F(z,x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(n_i + n_i' + 1, l_i) p_{i,0} \Big(\frac{\partial F(z+e_i, x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'+1}} \Big)_{x_{i,n_i+n_i'+1}=0}; \qquad (4.19)$$

$$F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n_i'>0}\big) =$$

$$= F(z+e_i-e_i', x)\nu_i I_{n_i'>0} + F(z-e_i+e_i', x)\varphi_i I_{n_i>0}; \qquad (4.20)$$

$$\alpha_i(n_i+n_i', l_i)\bigg(\Big(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} \Big)_{x_{i,n_i+n_i'}=0} - \frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} \bigg) I_{n_i>0} =$$

$$= \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \alpha_j(n_j + n_j' + 1, l_j) p_{j,i} B_i(n_i + n_i', x_{i,n_i+n_i'}) \times \qquad (4.21)$$

$$\times \Big(\frac{\partial F(z+e_j-e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}} \Big)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0} I_{n_i>0} +$$

$$+ \lambda p_{0,i} B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'}) F(z-e_i, x) I_{n_i>0};$$

$$F(z,x)\big(\sigma_i(n_i+n_i', l_i) I_{l_i<r_i} + \rho_i(n_i+n_i', l_i) I_{l_i>0}\big) =$$

$$= F(z-e_i'', x)\sigma_i(n_i+n_i', l_i-1) I_{l_i>0} + \qquad (4.22)$$

$$+ F(z+e_i'', x)\rho_i(n_i+n_i', l_i+1) I_{n_i<r_i},\ i \in J.$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (4.13) – (4.15), являются решением уравнений (4.19) – (4.22), а следовательно, и уравнений (4.18).

Подставляя (4.13) – (4.15) в уравнение (4.19), деля обе части полученного соотношения на $\lambda F(z,x)$, получим следствие уравнения трафика:

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,0}.$$

Подставляя (4.13) – (4.15) в уравнение (4.20), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$, получим тождество. Подставляя (4.13) – (4.15) в уравнение (4.21), деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i})F(z - e_i, x)$, получим систему уравнений трафика (3.19). Подставляя (4.13) – (4.15) в уравнение (4.22), деля обе части полученного соотношения на $F(z,x)$ и используя условие (4.12), получим тождество. *Теорема доказана.* $\square$

Пусть $\{p(z),\ z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 4.2 с учетом равенства $p(z) = F(z,+\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 4.2. *Если выполняются условия* (4.11), (4.12), *то процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z), z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s,x)$ и имеет мультипликативный вид*

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1, l_1)p_2(n_2, n'_2, l_2)...p_N(n_N, n'_N, l_N),\ z \in Z,$$

где вероятности $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ определяются по формуле (4.14). *Здесь $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ – стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла.*

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Tsitsiashvili, G. Sh. Distributions in Stochastic Network Models / G. Sh. Tsitsiashvili, M. Osipova. – N.Y.: Nova Publishers Incorporated, 2008. – 75 p.

2. Malinkovsky, Yu. An Open Queueing Network with Partly Non-active Customers /Yu. Malinkovsky, J. Bojarovich // Queues: flows, systems, networks: proc. 21-th Int. Conf. “Modern Probbabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks”, Minsk, Jan. 31 – Feb. 3 2011 / BSU; ed.: A.N. Dudin [et al.]. – Minsk, 2011. – P. 34–37.

3. Bojarovich, J. An Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers and Rounds / J. Bojarovich, L. Marchenko // Probability theory and its applications: proc. Int. Conf. In Commemoration of the Centennial of B.V.Gnedenko, Moscow, June 26–30 2012 / Lomonosov Mos. St. University; ed.: Shyryaev A.N [et al.]. – Moscow, 2012. – P. 221–222.

4. Малинковский, Ю.В. Замкнутая сеть массового обслуживания с неактивными заявками и обходами / Ю.В. Малинковский, Л.Н. Марченко, Ю.С. Боярович // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6. – С. 24–28.

5. Bojarovich, J. An Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers and Rounds / J. Bojarovich, L. Marchenko // Inform. Technologies and Mathematical Modelling Communications in Computer and Inform. Sci. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – Vol. 356, iss. 1. – P. 33–36.

6. Gordon, W.J. Closed Queueing Nnetworks with Exponential Servers / W.J. Gordon, G.F. Newell // Oper. Res. – 1967. – No 15. – P. 252–267.

7. Jackson, J.R. Network of Waiting Lines / J.R. Jackson // Oper. Res. – 1957. – Vol. 5, iss. 4. – P. 518–521.

8. Севастьянов, Б.А. Предельная теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами / Б.А. Севастьянов // Теор. вероятностей и ее применения. – 1957. – Т. 2, № 1. – С. 106–116.

9. Старовойтов, А.Н. Инвариантность стационарного распределения состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Н. Старовойтов // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5. – С. 169–171.

10. Старовойтов, А.Н. Об инвариантности стационарных распределений вероятностей состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Н. Старовойтов // Изв. Гомельского гос. ун-та. – 2006. – № 4. – С. 159–161.

11. Старовойтов, А.Н. Сети с многорежимным обслуживанием, отрицательными заявками и произвольным временем пребывания в режимах / А.Н. Старовойтов // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2007. – № 6. – С. 193–198.

12. Старовойтов, А.Н. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Н. Старовойтов // Пробл. передачи информации. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 121–128.

13. Boyarovich, Yu. S. The Stationary Distribution Invariance of States in a Closed Queueing Network with Temporarily Non-active Customers / Yu. S. Boyarovich // Autom. Remote Control. – 2012. – Vol. 73, iss. 10. – P. 1616–1623.

14. Bojarovich, J. Stationary Distribution Invariance of an Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers / J. Bojarovich, Yu. V. Malinkovsky // Inform. Technologies and Mathematical Modelling Communications in Computer and Inform. Sci. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – Vol. 356, iss. 1. – P. 26–32.

15. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.

16. Bojarovich, J. Stationary Distribution Insensitivity of a Closed Queueing Network with Non-active Customers / J. Bojarovich, Y. Dudovskaya // Inform. Technologies and Mathematical Modelling Communications in Computer and Inform. Sci. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2014. – Vol. 487, iss.1. – P. 50–58.

17. Kruk, J. Insensitivity of the Stationary Distribution of State Probabilities in an Open Network with Non-active

Customers /J. Kruk, Y. Dudovskaya // Autom. Remote Control. – 2015. – Vol. 76, iss. 12. – P. 2168–2178.

18. Ковалев, Е.А. Сети с ненадежными каналами и резервом / Е.А. Ковалев // Математические методы исследования сетей связи и сетей ЭВМ: тезисы докладов VI Белорусской школы-семинара по ТМО. – Минск, 1990. – С. 70–71.

19. Ковалев, Е.А. Стационарное распределение двухузловой замкнутой ненадежной сети с делящимся резервом / Е.А. Ковалев, Н.А. Чикунова // Современные математические методы исследования телекоммуникационных сетей: материалы междунар. конф. – Минск, 1999. – С.85–89.

20. Малинковский, Ю.В. Замкнутые информационные сети с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // "Информационные системы и технологии" : материалы I междунар. конф., Минск, 5–8 нояб. 2002 г. / БГУ – Минск, 2002. – Ч. 1. – С. 324–328.

21. Малинковский, Ю.В. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Изв. нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2001. – № 3. – С. 129–134.

22. Малинковский, Ю.В. Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2002. – Т. 15, № 6. – С. 183–188.

23. Нуеман, А.Ю. Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками / А.Ю. Нуеман // Вест. Томского гос. ун-та. – 2002. – Т. 1, № 1. – С. 90–93.

24. Нуеман, А.Ю. Сети массового обслуживания с ненадежными приборами и отрицательными заявками / А.Ю. Нуеман // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы V Респ. науч. конф. студ. и аспир., Гомель, 18-20 марта 2002 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2002. – С. 179–180.

25. Боярович, Ю.С. Замкнутые сети массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.С. Боярович, Ю.Е. Дудовская // Молодежь в науке - 2014 : материалы междунар. науч.-практ. конф., Минск, 18–21 нояб. 2014 г. / Национальная академия наук Беларуси; Минск, 2014. – С. 211.

26. Боярович, Ю.С. Стационарное распределение вероятностей состояний открытых сетей массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.С. Боярович, Ю.Е. Дудовская // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию профессора, д-ра физ.-мат. наук Г. А. Медведева., Минск, 23 – 26 февр. 2015 г. / БГУ; Минск, 2015. – С. 33–36.

27. Крук, Ю.С. Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.С. Крук, Ю.Е. Дудовская // Изв. нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 1. – С. 43–46.

28. Kruk, J. Stationary Distribution Insensitivity of a Closed Multi-regime Queueing Network with Non-active Customers /J. Kruk, Y. Dudovskaya // Inform. Technologies and Mathematical Modelling Communications in Computer and Inform. Sci. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2015. – Vol. 564, iss.1. – P. 373–383.

29. Гнеденко, Б.В. Введение в теор. массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.

Научное издание

КРУК Юлия Сигизмундовна
ДУДОВСКАЯ Юлия Евгеньевна

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Подписано в печать 30.11.2016. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,61. Уч.-изд. л. 5,95. Тираж 100. Заказ 989.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.