УДК 530.182:624:69

# ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ О РАЗУПРОЧНЯЮЩЕМСЯ СТЕРЖНЕ

**Земляков Г.В.**, канд. техн. наук, доцент**, Леонович С.Н.**, д-р техн. наук, профессор, **Князев М.А.**, д-р. физ.-мат. наук**.**, доцент**,**
**Трофименко Е.Е.**, канд. физ.-мат. наук, доцент (БНТУ)

**Аннотация.** Рассмотрены солитонные состояния нелинейной упругопластической модели, в которой учитывается зависимость текучести материала не только от приложенного напряжения и деформации, но также и от градиента деформации второго порядка. Изучено влияние на эти состояния, описывающие нелинейные возмущения полной деформации, диссипации энергии и нелинейных членов в разложении для диаграммы материала. Полученные результаты применимы для описания конструкционных материалов типа бетона.

**Солитонные** состояния рассмотрены на примере задачи о динамике упругопластических деформаций в одномерном стержне на стадии разупрочнения, т.е. в случае, когда при уменьшении напряжения происходит рост деформации. Поведение системы при этом описывается нисходящей ветвью диаграммы материала. В работе использована нелокальная модель упругопластической среды [1-3]. Среда называется упругопластической, если условие пластичности не зависит от изменяющихся во времени переменных. Это означает, что изменение масштаба времени не приводит к изменению свойств среды. Особенностью данной модели является то, что в ней локальная деформация описывается некоторой деформацией, усредненной по объему структурной ячейки, причем размеры такой ячейки малы по сравнению с характерным размером задачи. Данная модель была предложена для рассмотрения материалов, обладающих неоднородной структурой, причем на стадии, которая предшествует разрушению, то есть на стадии разупрочнения. На этой стадии в материале возникают микродефекты, поры, что приводит к неоднородностям локального характера. Можно представить, что деформирование материала протекает в два этапа. На первом происходит пластическая деформация, обусловленная движением дислокаций в кристаллических зернах материала. При этом частично дислокации накапливаются на межзеренных границах. В результате появляются остаточные микронапряжения, а на макроскопическом уровне – упруговязкопластическое течение внутри материала с одновременным его упрочнением. Когда интенсивность потока дислокаций на границе препятствий достигает некоторого критического значения, начинается второй этап деформирования. Теперь происходит разрушение дислокаций, что сопровождается дисклинациями зерен и образованием между ними пор, почти сферической формы. В результате материал становится локально неоднородным. На макроскопическом уровне происходит релаксация внутренних напряжений и последующее разупрочнение материала.

Уравнение движения в такой модели имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \delta^2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon$ – полная деформация, а $\delta$ – малый параметр, определяемый характерным макроскопическим размером задачи. Попытка найти его солитонные решения при представлении диаграммы материала в виде квадратичной функции вида

$$\sigma(\varepsilon) = -\kappa\varepsilon + \frac{1}{2} f \varepsilon^2, \tag{2}$$

где $\kappa = -d\sigma(\varepsilon_0)/\varepsilon$, а $f$ – коэффициент аппроксимации диаграммы материала, учитывающий отклонение хода кривой от линейной зависимости, показала, что для уравнения (1) решение, соответствующее односолитонному состоянию не имеет места [3, 4]. Фактически, удается построить решение, которое описывает некоторую распространяющуюся волну, изменяющуюся во времени по гармоническому закону. Однако для некоторых частных случаев при наложении некоторого дополнительного условия математического характера (а именно, требования комплексной сопряженности для параметров, описывающих компоненты двухсолитонного решения и соответствующих в линейном приближении частотам колебаний) удается построить локализованное двухсолитонное решение.

С математической точки зрения это означает, что нелинейное уравнение в частных производных, которое используется для описания процесса разупрочнения, является неинтегрируемым. Одной из основных причин неинтегрируемости уравнений является отсутствие баланса между влиянием нелинейности и дисперсии в модели процесса или явления, для описания которого используется то или иное уравнение. Эффективным приемом, используя который можно восстановить вышеуказанный баланс, является учет в модели, а, следовательно, и в уравнении процессов диссипации энергии (трение, затухание и тому подобные процессы). С физической точки это вполне правомерно, т.к. такие процессы присутствуют практически во всех явлениях.

Теперь вместо уравнения (1) следует рассмотреть уравнение вида [5]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\kappa\varepsilon' - \frac{1}{2} f \varepsilon'^2 + \delta^2 \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial x^2}\right) = 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon'$– возмущение деформации относительно однородного состояния $\varepsilon_0$, $\alpha$ – некоторый коэффициент, описывающий процессы диссипации (для краткости будем называть его коэффициентом диссипации), причем для стадии разупрочнения считаем, что $\alpha$ - положительная константа; кроме того, $\kappa > 0$ и $f < 0$.

Для диаграммы материала, описываемой квадратичной функцией (2) при помощи метода Хироты решения нелинейных уравнений были построены односолитонное [5]

$$\varepsilon'(x,t) = \beta \frac{k_1^2 exp\left(k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^0\right)}{\left(1 + exp\left(k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^0\right)\right)^2} = \frac{3\delta^2\kappa^2}{f} sech^2\left(\frac{k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^0}{2}\right)$$

и двухсолитонное [6]

$$\varepsilon'(x,t) = \beta \frac{d^2(lnF)}{dx^2} = \beta \frac{d^2}{dx^2}[ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + Ae^{\eta_1+\eta_2})] =$$

$$\beta[k_1^2 e^{\eta_1} + k_2^2 e^{\eta_2} + (k_1 - k_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} + Ak_1^2 e^{\eta_1+2\eta_2} +$$

$$Ak_2^2 e^{2\eta_1+\eta_2}](1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + Ae^{\eta_1+\eta_2})^{-2}$$

решения уравнения (3). Здесь использованы следующие обозначения: $\beta$ – параметр преобразования Коула-Хопфа; $k_1$ и $k_2$ – произвольные параметры метода Хироты; $\omega_1$ и $\omega_2$ – параметры метода Хироты, связанные с параметрами $k_1$ и $k_2$ дисперсионными соотношениями; $\eta_1^0$ и $\eta_2^0$ – параметры, описывающие начальное положение односолитонных составляющих двухсолитонного решения (для односолитонного решения параметр $\eta_1^0$ описывает начальное положение солитона); $\eta_i = k_i x - \omega_i t + \eta_i^0$, $i = 1,2$;

$$A = [2\omega_1\omega_2 - \alpha(k_1\omega_2 + k_2\omega_1) + 2\kappa k_1 k_2 - 6\delta^2 k_1^2 k_2^2 +$$

$$4\delta^2(k_1^3 k_2 + k_1 k_2^3)][2\omega_1\omega_2 - \alpha(k_1\omega_2 + k_2\omega_1) + 2\kappa k_1 k_2 +$$

$$6\delta^2 k_1^2 k_2^2 + 4\delta^2(k_1^3 k_2 + k_1 k_2^3)]^{-1}.$$

Поведение полученных решений в зависимости от всех параметров численной исследовано в работе [7].

Зависимость односолитонного решения от параметра $f$ носит обратно пропорциональный характер. Если затухание мало, то величина параметра $\kappa$ очень значительно влияет на вид решения. Величина $\varepsilon'$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для ряда значений параметра $\kappa$ в различные моменты времени и разных точках материала она меняет свой знак. Чем большее значение принимает $\kappa$, тем круче проходит нисходящая ветвь диаграммы материала, то есть при меньших деформациях скорость изменения напряжений растет. При малом затухании это приводит к более быстрому увеличению числа микротрещин, приводящих к разрушению материала, поскольку потери энергии малы, и она практически полностью расходуется на деформирование. Когда же затухание достаточно велико, потери энергии тоже велики и её не хватает для возбуждения дополнительных мод колебаний, поэтому решение сохраняет типичный для солитона профиль, который распространяется со временем вдоль стержня. Можно также сделать вывод, что в этом случае скорость, с которой растут напряжения в материале на этапе разупрочнения, незначительно сказывается на величине флуктуаций. В случае, когда $\kappa$ и $\delta$ малы, по мере роста величины затухания происходит формирование возмущений неоднородных деформаций солитонного типа. Когда $\alpha$ мало, возмущение имеет сложный профиль, в котором присутствуют составляющие как типа солитона, так и типа темного солитона, причем их число может быть неодинаковым. Однако при увеличении $\alpha$ профиль возмущения приобретает характерный для солитона вид. Для случая, когда параметр $\kappa$ достаточно велик, а параметр $\delta$ по-прежнему мал, наблюдается значительное отличие в поведении функции $\varepsilon'(x,t)$ по сравнению со случаем, когда параметр $\kappa$ мал.

Зависимость двухсолитонного решения от параметра $f$ близка к зависимости для односолитонного решения. Исследование зависимости от параметра $\kappa$, когда диссипация мала, показывает, что теперь решение имеет характерный для солитонов вид, что связано со специальным выбором начальных сдвигов фазы для его компонент. Такой результат следует из малости коэффициента затухания. Учет диссипативных процессов в системе позволяет установить баланс энергии, делающий возможным существование солитонных состояний, однако в данном случае затухание незначительно и не оказывает заметного влияния на профиль функции, описывающей двухсолитонное решение. При увеличении времени вычислений наряду с солитонным профилем появляется зависимость флуктуаций деформации, описываемая темным солитоном, причем некоторое время эти два различных профиля существуют вместе, образуя нелинейную суперпозицию.

Зависимость решения от параметра $\alpha$ при различных значениях $\kappa$ показывает, что при малых $\alpha$ происходит ослабление проявления волновых свойств модели. Если затухание не очень велико, а нисходящая ветвь диаграммы материала ведет себя достаточно полого, то волновые свойства проявляются в заметной степени. Однако по мере роста влияния процессов диссипации энергии, нелинейные свойства начинают преобладать над волновыми. Увеличение параметра $\alpha$ приводит к тому, что практически вся энергия системы, которая может быть израсходована без потери этой системой устойчивости, рассеивается в окружающем пространстве. На другие процессов, которые также заложены в исследуемой модели, энергии практически не остается. В результате решение принимает характерный для солитона вид. Это означает, что, возникнув, локализованная деформация будет распространяться практически без изменений.

**Выводы.** Исследована нелинейная упругопластическая модель, в которой учитывается зависимость текучести материала не только от приложенного напряжения и деформации, но также и от градиента деформации второго порядка. Построены решения уравнения движения, описывающие солитонные состояния. Изучено поведение этих состояний в зависимости как от параметров модели, так и от параметров решений. Показано, что при изготовлении композиционного материала желательно использовать достаточно однородные компоненты и не допускать возникновения областей неоднородности значительных размеров. Тем не менее, нельзя сводить размеры этих неоднородностей к предельно малым.

**Литература.** 1. В.Н. Кукуджанов. О структуре полос локализации деформации в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении. // Механика твердого тела.–1998.–№ 6.–С. 104-114. 2. В.Н. Кукуджанов. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и её применение к исследованию локализации деформаций. // Механика твердого тела.–1999.–№ 5.–С. 72-78. 3. Н.Н. Мягков. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне. // Механика композиционных материалов и конструкций.–1999.–№ 3.– С. 28-32. 4. Н.Н. Мягков. Моделирование локализации деформации в задаче о динамике разупрочняющегося стержня. // Письма в ЖТФ.–1999.–Т. 25, вып. 20.– С. 48-53. 5. Г.В. Земляков, С.Н. Леонович, М.А. Князев, Е.Е.Трофименко. Влияние диссипации на локализацию деформации в задаче о разупрочняющемся стержне. // Доклады НАН Беларуси.–2011.–Т. 55, № 6.– С. 115-118. 6. Г.В. Земляков, С.Н. Леонович, М.А. Князев, Е.Е. Трофименко. Двухсолитонное решение задачи о разупрочняющемся стержне. // Доклады НАН Беларуси.–2012.–Т. 56, № 3.– С. 116-118. 7. М.А Князев. Солитоны в нелинейной упругопластической модели. – Минск, БНТУ. – 2013. – 221 с.