МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Мартыненко М.Д., Босяков С.М.

Results of investigation of three-dimensional wave movements in the elastic bodies, obtained are submitted on the basis of a method of characteristics of the theory of the differential equations with partial derivatives. The analysis of propagation piezoactive elastic, thermoelastic and electromagnetic waves in anisotropic medium is carried out. For the considered types of waves expressions for the coordinates of points of media, determining position of the appropriate three-dimensional wave fronts at any moment are obtained.

Введение

Метод характеристик (метод слабых разрывов) теории дифференциальных уравнений с частными производными является одним из фундаментальных методов исследования закономерностей распространения волновых движений в сплошных средах [1-3]. Обзор литературных источников позволяет выделить несколько направлений использования этого метода. Одно из них связано с применением теории характеристик в одномерных по пространственной координате задачах газовой динамики, теории многокомпонентных сред, теории пластичности, а также задачах, связанных с изучением взаимодействия волн с препятствиями [4-7]. Аналогичные вопросы, связанные с исследованием двумерных и трехмерных волновых движений в пластичных, сыпучих и неупругих средах на базе метода характеристик отражены в [8-10]. Другое направление, основы которого заложены в [11], связано с изучением закономерностей существования поверхностей сильного и слабого разрывов в упруговязкопластических средах, неоднородных средах с начальными напряжениями [12, 13]. Большое количество работ посвящено реализации метода характеристик применительно к одномерным и двумерным граничным задачам механики деформируемого твердого тела, в частности решению задач теории удара, распространения волн в стержнях [14]. Развитие этого направления для упругих, термоупругих и пластичных сред отражено в [15-22]. Другой аспект применения теории характеристик в механике сплошной среды касается исследования особенностей распространения поверхностей слабого и сильного разрывов, возбуждаемых нестационарными источниками в однородных неограниченных средах со сложными свойствами, описываемых линейной теорией упругости [23]. Несмотря на целесообразность использования метода характеристик в этом направлении [24], дальнейшего развития он не получил, что можно объяснить сложностью соответствующих уравнений движения, громоздкостью аналитических выкладок и трудностями решения характеристических уравнений. Однако возможности и средства современной вычислительной техники делают доступным решение динамических задач высокой степени сложности и позволяют математически моделировать волновые процессы в сплошных средах на основе метода характеристик. Ниже представлены результаты исследования трехмерных волновых движений в упругих телах, полученные на базе метода характеристик.

Реализация метода характеристик

Изложим основные положения метода характеристик на примере системы уравнений движения кубически анизотропных тел с учетом пьезоэлектрического эффекта. Соответствующие уравнения имеют следующий вид [25]:

$$\left(A_4\Delta+\left(A_1-A_2-2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i+\left(A_2+A_4\right)\partial_i\sum_{k=1}^{3}\partial_k u_k+e\sum_{j\neq k=1}^{3}\partial_j\partial_k\Phi=\rho\ddot{u}_i,$$
$$e\sum_{j\neq k=1}^{3}\partial_j\partial_k u_l-\varepsilon^S\Delta\Phi=0,\ i=\overline{1,3}, \tag{1}$$

где e - пьезоэлектрический модуль, ε^s - диэлектрическая проницаемость, A_1, A_2, A_4 - постоянные упругости, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ - вектор перемещений, ρ - плотность, Φ – электрический потенциал, $\partial_i=\partial/\partial x_i$, $i=\overline{1,3}$, точка обозначает дифференцирование по времени.

Будем считать электрический потенциал Φ непрерывно дифференцируемой функцией и начальные данные к системе (2) зададим на плоскости $t=0$

$$u_i\big|_{t=0}=f_i(x_1,x_2,x_3),\ \dot{u}_i\big|_{t=0}=\varphi_i(x_1,x_2,x_3). \qquad (2)$$

Если система (1) совместно с данными (2) не позволяет определить все частные производные второго порядка по t, то плоскость $t=0$ является характеристической. В общем случае начальные данные (2) зададим на поверхности $Z(t,x_1,x_2,x_3)=const$ и перейдем к новым переменным по следующей схеме:

$$Z_k=Z_k(x_0,x_1,x_2,x_3),\ k=\overline{0,3},\ Z_0\equiv Z,\ x_0\equiv t.$$

Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_l}=\sum_{m,n=0}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z_n\partial Z_m}\frac{\partial Z_n}{\partial x_k}\frac{\partial Z_m}{\partial x_l}+\sum_{m=0}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial Z_m}\frac{\partial^2 Z_m}{\partial x_k\partial x_l}, \qquad (3)$$

$$Z_0\equiv Z,\ x_0\equiv t,\ k,l=\overline{0,3}.$$

Подставим (3) в (1) и выпишем те члены, которые содержат производные второго порядка по Z. После несложных преобразований получим

$$\left(\tau_1+(a-b-2)p_i^2-p_0^2/c_2^2\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}+\sum_{k=1}^{3}\left((b+1)p_ip_k+K\gamma_i\gamma_k\right)\frac{\partial^2 u_k}{\partial Z^2}+\ldots=0, \qquad (4)$$

Здесь $p_k=\dfrac{\partial Z}{\partial x_k}, p_0=\dfrac{\partial Z}{\partial t}, \tau_1=p_1^2+p_2^2+p_3^2, \quad c_2^2=\dfrac{A_4}{\rho}, \quad K=\dfrac{4e^2}{\varepsilon^s A_4}, \quad \gamma_i=\dfrac{p_jp_l}{g}$,

$i\neq j\neq l=\overline{1,3}.$

Уравнение характеристической поверхности системы получим из условия невозможности определения производных $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}$, $i=\overline{1,3}$ из (4), что эквивалентно равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при этих производных:

$$\det\left\|\omega_{ik}\right\|_{3\times3}=0, \qquad (5)$$

где $\omega_{ik}=\left(\tau_1+(a-b-2)p_i^2-\dfrac{p_0^2}{c_2^2}\right)\delta_{ik}+(b+1)p_ip_k+K\dfrac{p_ip_kp_l^2}{\tau_1}$, δ_{ik} - символ Кронекера.

Раскрывая определитель (5), будем иметь

$$q_0\,p_0^6/c_2^6+q_1\,p_0^4/c_2^4+q_2\,p_0^2/c_2^2+q_3=0, \qquad (6)$$

где $q_0=-1, q_1=(2+a)\tau_1+\dfrac{K\tau_2}{\tau_1},\ q_2=\left((a+b)(b-a+2)-2K\right)\tau_2-$

$$-\left(1+2a\right)\tau_1^2-\frac{K}{\tau_1}\left(a-1\right)\left(\tau_1\tau_2-3\tau_3\right)+\frac{6\left(b+1\right)K\tau_3}{\tau_1},\ q_3=a\tau_1^3+\left(a-1\right)K\times$$

$$\times\left(\tau_1\tau_2-3\tau_3\right)+\frac{K}{\tau_1}\left(a+b\right)\left(a-b-2\right)\left(\tau_2^2-2\tau_1\tau_2\right)+\left(\left(a+b\right)\left(a-b-2\right)+K\right)\times$$

$$\times\tau_1\tau_2+\left(\left(a-b-2\right)^2\left(a+2b+1\right)-2\left(1+b\right)\left(a+1-b\right)K\right)\tau_3.$$

Разделим обе части (6) на τ_1. В результате будем иметь

$$\tilde{q}_0 v^6+\tilde{q}_1 v^4+\tilde{q}_2 v^2+\tilde{q}_3=0. \tag{7}$$

Формулы для $\tilde{q}_i$ вытекают из выражений для q_i при замене в них τ_i на $\tilde{\tau}_i$, $i=\overline{0,3}$, причем $\tilde{\tau}_1=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$; $\tilde{\tau}_2=n_1^2n_2^2+n_2^2n_3^2+n_1^2n_3^2$; $\tilde{\tau}_3=n_1^2n_2^2n_3^2$; $\tau_2=p_1^2p_2^2+p_2^2p_3^2+p_1^2p_3^2$; $\tau_3=p_1^2p_2^2p_3^2$; $n_k=\cos\alpha_k$ - направляющий косинус нормали к характеристической поверхности (α_k - угол между нормалью и координатной осью x_k).

Решение (7) представим в следующем виде

$$v_m=\sqrt{2\sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}}\cos\left(\frac{\tilde{\Lambda}+2\pi\left(4-m\right)}{3}\right)-\frac{\tilde{q}_1}{3q_0}},\ m=\overline{1,3}, \tag{8}$$

где $\tilde{\Lambda}=arc\cos\left(-\frac{\tilde{q}}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{\tilde{p}}\right)^3}\right)$, $\tilde{p}=-\frac{\tilde{q}_1^2}{3q_0^2}+\frac{\tilde{q}_2}{q_0}$, $\tilde{q}=\frac{2\tilde{q}_1^3}{27q_0^3}-\frac{\tilde{q}_1\tilde{q}_2}{3q_0^2}+\frac{\tilde{q}_3}{q_0}$.

Формулы (8) позволяют построить поверхности обратных скоростей, а также их сечения плоскостями, проходящими через начало координат. Их сравнительный анализ показывает, что $v_1>v_2\geq v_3$, поэтому будем считать, что со скоростью v_1 распространяется квазипродольная волна, со скоростью v_2 и v_3 - квазипоперечные волны.

Найдем координаты точек волнового фронта, до которых к моменту времени t дошла энергия волнового возмущения. Для этого выразим p_0 из уравнения (6)

$$p_0^{(m)}=c_2\sqrt{2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\Lambda+2\pi m}{3}\right)-\frac{q_1}{3q_0}}. \tag{9}$$

Выражения для Λ, p, q и $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$.аналогичны.

Дифференцируя $p_0^{(m)}$ по p_i и интегрируя полученные выражения по времени t, получим искомые выражения для безразмерных координат $x_i^{(m)}/c_2t$:

$$\frac{x_i^{(m)}}{c_2 t}=\frac{1}{v_i^{(m)}}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3\tilde{p}}}\left(\frac{2\tilde{q}_1 q_{1i}}{3q_0^2}-\frac{q_{2i}}{q_0}\right)\cos\left(\frac{\tilde{\Lambda}+2\pi m}{3}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}}\times\right.$$

$$\times\sin\left(\frac{\tilde{\Lambda}+2\pi m}{3}\right)\sqrt{\frac{\tilde{p}^3}{4\tilde{p}^3+27\tilde{q}^2}}\left(\left(\frac{2\tilde{q}_1^2 q_{1i}}{9q_0^3}-\frac{\tilde{q}_2 q_{1i}+\tilde{q}_1 q_{2i}}{3q_0^2}+\frac{q_{3i}}{q_0}\right)\times\right. \qquad (10)$$

$$\left.\left.\times\sqrt{\left(-\frac{3}{\tilde{p}}\right)^3}-\frac{9\tilde{q}\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{\tilde{p}}\right)^5}\left(\frac{2\tilde{q}_1 q_{1i}}{3q_0^2}-\frac{q_{2i}}{q_0}\right)\right)-\frac{q_{1i}}{6q_0}\right).$$

Верхний индекс m в формулах (8) – (10) указывает на тип волны: 1 соответствует квазипродольной волне, 2 и 3 – квазипоперечным волнам.

Коэффициенты q_{ki} с учетом $p_k = n_k\sqrt{\tau_1}$ представим в виде

$$q_{1i}=(2+a)\tilde{\tau}_{1i}+\frac{K\left(\tau_{2i}\tilde{\tau}_1-\tau_{1i}\tilde{\tau}_2\right)}{\tilde{\tau}_1^2},$$

$$q_{2i}=\left((a+b)(b-a+2)-2K\right)\tau_{2i}-2(1+2a)\tilde{\tau}_1\tau_{1i}-\frac{K(a-1)}{\tilde{\tau}_1^2}\times$$

$$\times\left(\left(\tau_{1i}\tilde{\tau}_2+\tilde{\tau}_1\tau_{2i}-3\tau_{3i}\right)\tilde{\tau}_1-\left(\tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2-3\tilde{\tau}_3\right)\tau_{1i}\right)-\frac{6K(b+1)\left(\tilde{\tau}_3\tau_{1i}-\tau_{3i}\tilde{\tau}_1\right)}{\tilde{\tau}_1^2},$$

$$q_{3i}=3a\tilde{\tau}_1^2\tau_{1i}+\left((a-b-2)(a+b)+K\right)\left(\tau_{1i}\tilde{\tau}_2+\tilde{\tau}_1\tau_{2i}\right)+(a-1)K\times$$

$$\times\left(\tau_{1i}\tilde{\tau}_2+\tilde{\tau}_1\tau_{2i}-3\tau_{3i}\right)+\left((a-b-2)^2(a+2b+1)-2(1+b)(a+1-b)K\right)\tau_{3i}+$$

$$+\frac{K}{\tau_1^2}(a+b)(a-b-2)\left(2\tau_1\left(\tau_2\tau_{2i}-\left(\tau_{1i}\tau_3+\tau_1\tau_{3i}\right)\right)-\tau_{1i}\left(\tau_2^2-2\tau_1\tau_3\right)\right),$$

где $\tau_{1i}=2n_i$, $\tau_{2i}=2n_i\left(\tau_1-n_i^2\right)$, $\tau_{3i}=2n_i\left(\tau_2-n_i^2\left(\tau_1-n_i^2\right)\right)$.

Формулы (11) позволяют построить безразмерные трехмерные волновые фронты пьезоактивных волн, распространяющихся в кубически анизотропной среде, а также их сечения плоскостями, проходящими через начало координат [26].

Термоупругие волны

Рассмотрим распространение термоупругих волн в кубически анизотропной среде в условиях плоской деформации. В этом случае систему уравнений движения представим в следующем виде ($e_{33}=0$) [27]:

$$
\begin{gathered}
A_1\left(A_4\Delta\sigma_{11}-\rho\ddot{\sigma}_{11}\right)+\left(A_1+A_2\right)\left(A_1-A_2-A_4\right)\partial_1^2\sigma_{11}- \\
-A_2\left(A_4\Delta\sigma_{22}-\rho\ddot{\sigma}_{22}\right)+A_4\left(A_1+A_2\right)\partial_1^2\sigma_{22}+\beta\left(A_1-A_2\right)\left(A_4\Delta T-\rho\ddot{T}\right)=0, \\
A_4\Delta\sigma_{12}-\rho\ddot{\sigma}_{12}+A_4\partial_1\partial_2\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)=0, \\
A_1\left(A_4\Delta\sigma_{22}-\rho\ddot{\sigma}_{22}\right)+\left(A_1+A_2\right)\left(A_1-A_2-A_4\right)\partial_2^2\sigma_{22}- \\
-A_2\left(A_4\Delta\sigma_{11}-\rho\ddot{\sigma}_{11}\right)+A_4\left(A_1+A_2\right)\partial_2^2\sigma_{11}+\beta\left(A_1-A_2\right)\left(A_4\Delta T-\rho\ddot{T}\right)=0, \\
\lambda\Delta T-\left(\dot{T}+\tau\ddot{T}\right)\left(c_v+\frac{2\beta^2T_0}{A_1+A_2}\right)=\frac{\beta T_0}{A_1+A_2}\left(\dot{\sigma}_{11}+\dot{\sigma}_{22}+\tau\left(\ddot{\sigma}_{11}+\ddot{\sigma}_{22}\right)\right),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где β - константа, связывающая тепловые и механические напряжения, $\beta=\alpha_T\left(A_1+2A_2\right)$, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, T - абсолютная температура, λ - коэффициент теплопроводности, c_v - удельная теплоемкость при постоянной деформации, τ - время релаксации теплового потока, T_0 - начальная температура.

Начальные данные для (12) зададим на гиперплоскости $Z\left(t,x_1,x_2\right)=0$. После стандартной процедуры, описанной выше, будем иметь уравнение вида (6), коэффициенты которого выражаются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
q_0=-n_*,\ q_1=g^2\left(a+n_*\left(a+1+\varepsilon\left(a+b\right)\right)\right), \\
q_2=-g^4\left(a\left(a+1\right)+n_*\left(a+1+\varepsilon\left(a+b\right)\right)\right)- \\
-n_*\left(1+2\varepsilon\right)\left(a\left(a-2\right)-b\left(b+2\right)\right)p_1^2p_2^2, \\
q_3=ag^2\left(ag^4+\left(a\left(a-2\right)-b\left(b+2\right)\right)p_1^2p_2^2\right),
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где $n_*=\dfrac{\tau c_v A_1}{\lambda\rho}$, $g^2=p_1^2+p_2^2$, $\varepsilon=\dfrac{2\beta^2T_0}{\left(A_1+A_2\right)c_v}$ - коэффициент связанности полей температур и деформаций в двумерной динамической задаче для кубически анизотропного тела, сформулированной в компонентах напряжений [28].

Представим решение характеристического уравнения системы (11) в виде (9) и найдем выражения для безразмерных координат $x_l^{(m)}\big/c_2t$ точек двумерных волновых фронтов. В этом случае для коэффициентов $q_{kl},\ k=\overline{1,3},\ l=1,2$, входящих в (10), будем иметь

$$q_{1l}=2n_l\left(a+n_*\left(a+1+\varepsilon\left(a+b\right)\right)\right),$$

$$q_{2l}=-4n_l\left(a\left(a+1\right)+n_*\left(a+1+\varepsilon\left(a+b\right)\right)\right)-$$

$$-2n_*\left(1+2\varepsilon\right)\left(a\left(a-2\right)-b\left(b+2\right)\right)n_l\left(g^2-n_l^2\right),$$

$$q_{3l}=2an_l\left(a+\left(a\left(a-2\right)-b\left(b+2\right)\right)n_1^2n_2^2\right)+$$

$$+2a\left(2an_l+\left(a\left(a-2\right)-b\left(b+2\right)\right)n_l\left(g^2-n_l^2\right)\right).$$

Безразмерные скорости распространения термоупругих волн определяются формулами вида (8), в которых выражения для $\tilde{q}_0$ и $\tilde{q}_k$ вытекают из (12) при замене p_1, p_2 на n_1, n_2 соответственно.

Анализ эффектов связанности теплового и механического полей позволяет сделать вывод, что индекс $m=1$ соответствует модифицированной квазипоперечной волне, $m=2$ - модифицированной квазипродольной волне, $m=3$ - модифицированной тепловой волне. Добавим, что полученные выражения для скоростей распространения термоупругих волн и координаты точек волновых фронтов, до которых дошла энергия волнового возмущения, позволяют не только построить кривые обратных скоростей и волновые фронты, но и исследовать влияние времени релаксации теплового потока на волновые движения в термоупругих кубически анизотропных средах.

Электромагнитные волны

Рассмотрим следующую систему динамических уравнений Максвелла для анизотропной среды:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1\dot{E}_1+\partial_3H_2-\partial_2H_3+\ldots=0, \quad \mu\dot{H}_1+\partial_2E_3-\partial_3E_2+\ldots=0,\\
&\varepsilon_2\dot{E}_2+\partial_1H_3-\partial_3H_1+\ldots=0, \quad \mu\dot{H}_2+\partial_3E_1-\partial_1E_3+\ldots=0,\\
&\varepsilon_3\dot{E}_3+\partial_2H_1-\partial_1H_2+\ldots=0, \quad \mu\dot{H}_3+\partial_1E_2-\partial_2E_1+\ldots=0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\vec{E}=\left(E_1,E_2,E_3\right)$ и $\vec{H}=\left(H_1,H_2,H_3\right)$ - напряжения электрического и магнитного полей, μ - магнитная проницаемость среды, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ - диэлектрические константы среды.

Уравнение поверхности характеристик $Z\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=0$ для системы (13) представим следующем виде [29]:

$$\begin{aligned}
&p_0^2\left(p_0^4\mu^2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+p_0^2\mu\left(p_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3+p_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3+p_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2-\right.\right.\\
&\left.-\tau_1\left(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_3\right)\right)+\tau_1^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)-\\
&\left.-\tau_1\left(p_3^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+p_1^2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+p_2^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)\right)\right)=0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) вытекает существование стационарной поверхности разрыва $V=p_0\big/\sqrt{\tau_1}=0$, а также существование двух электромагнитных волн, скорости распространения которых удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
&V^4\mu^2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+V^2\mu\left(\varepsilon_2\varepsilon_3n_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_3n_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_2n_3^2-\right.\\
&\left.-\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_3\right)+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\\
&-n_3^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)-n_1^2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)-n_2^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)=0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) получим:

$$V_{1,2}=\frac{\sqrt{A\pm\sqrt{A^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1 n_1^2+\varepsilon_2 n_2^2+\varepsilon_3 n_3^2\right)}}}{\sqrt{2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}},\qquad(16)$$

$$A=\varepsilon_1\varepsilon_2\left(1-n_3^2\right)+\varepsilon_2\varepsilon_3\left(1-n_1^2\right)+\varepsilon_1\varepsilon_3\left(1-n_2^2\right).$$

Поверхности обратных скоростей $1/V_1$ и $1/V_2$, построенные на основе формул (16), для двухосных кристаллов ниобата бария ромбической системы ($\varepsilon_1=196\cdot10^{-11}$ Ф/м, $\varepsilon_2=201\cdot10^{-11}$ Ф/м, $\varepsilon_3=28\cdot10^{-11}$ Ф/м [25]), являются эллипсоидом и сферой соответственно. Это можно объяснить тем, что $\varepsilon_2/\varepsilon_1\approx1.026$, то есть по своим электрическим свойствам ниобат бария близок к полупроводниковым кристаллам более высоких систем симметрии (одноосным кристаллам). Если значения констант $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и ε_3 заметно отличаются друг от друга, то поверхности обратных скоростей для электромагнитных волн имеют достаточно сложный вид. Так, поверхности обратных скоростей $1/V_2$, построенные для материалов, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют определенным соотношениям, в основном является выпуклыми, но существует четыре участка, где поверхности изменяют свою кривизну и выпуклость сменяется вогнутостью. Появление таких участков на поверхности обратных скоростей указывает на возникновение четырех лакун на волновой поверхности электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью V_2. Поверхности обратных скоростей $1/V_1$ вышеуказанными особенностями не обладают, то есть распространение электромагнитных волн со скоростью V_1 не сопровождается образованием лакун.

Выразим p_0 из уравнения (14) и найдем координаты точек, образующих волновой фронт электромагнитной волны в момент времени t:

$$x_1^{(1,2)}=\frac{n_1\varepsilon_1}{2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V_{1,2}}\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3\pm\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\varepsilon_1\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)n_1^2+\varepsilon_2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)n_2^2+\varepsilon_3\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)n_3^2\right)}{\sqrt{A^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1 n_1^2+\varepsilon_2 n_2^2+\varepsilon_3 n_3^2\right)}}\right)t,$$

$$x_2^{(1,2)}=\frac{n_2\varepsilon_2}{2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V_{1,2}}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3\pm\left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\varepsilon_1\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)n_1^2+\varepsilon_2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)n_2^2+\varepsilon_3\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)n_3^2\right)}{\sqrt{A^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1 n_1^2+\varepsilon_2 n_2^2+\varepsilon_3 n_3^2\right)}}\right)t,\qquad(17)$$

$$x_3^{(1,2)} = \frac{n_3\varepsilon_3}{2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V_{1,2}}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\varepsilon_1\left(\varepsilon_3-\varepsilon_2\right)n_1^2 + \varepsilon_2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)n_2^2 + \varepsilon_3\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)n_3^2\right)}{\sqrt{A^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2\right)}}\right)t.$$

Волновые поверхности, построенные для ниобата бария в момент времени $t = 1$ с помощью формул (21) не имеют лакун и представляют собой эллипсоид и сферу, что также можно объяснить малым отличием диэлектрических проницаемостей ε_1 и ε_2 друг от друга. Другой вид имеют трехмерные фронты электромагнитных волн, распространяющихся в материалах, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют соотношениям $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = 2, \varepsilon_3/\varepsilon_2 = 1/4$. Так, поверхность электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью V_2, содержит четыре лакуны, которые имеют вид конусов, причем основание лакуны не является окружностью, и расположены симметрично относительно координатных плоскостей. Поверхность волны, распространяющейся со скоростью V_1, не имеет лакун, и представляет собой эллипсоид, сжатый в направлении биссектрис координатных четвертей плоскости $x_1 = 0$. Аналогичный вид имеют волновые поверхности для материалов, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют соотношениям: $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = 1/2, \varepsilon_3/\varepsilon_2 = 4$; $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = \varepsilon_3/\varepsilon_2 = 2$; $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = 4$, $\varepsilon_3/\varepsilon_2 = 1/2$; $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = 1/4, \varepsilon_3/\varepsilon_2 = 2$ и $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = \varepsilon_3/\varepsilon_2 = 1/2$.

Анализ кривых обратных скоростей электромагнитных волн $1/V_2$ в трех координатных плоскостях позволяет сформулировать две группы условий возникновения лакун в трех различных координатных плоскостях в виде пар неравенств, которым должны удовлетворять диэлектрические проницаемости среды (см. табл.).

Условия, сформулированные в таблице, носят приближенный характер, и погрешность числового значения в правой части неравенств может достигать ± 0.05. В случае нарушения хотя бы одного из неравенств условий 1 или 2 лакуны на волновом фронте электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью V_2, не возникают. Так, для ниобата бария $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = 7$, $\varepsilon_3/\varepsilon_2 = 0.14$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1.03$, то есть не выполняется первое условие возникновения лакун в плоскости $x_2 = 0$ (или второе условие для плоскости $x_1 = 0$).

Таблица. Условия возникновения лакун

Плоскость		$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$
Условия	1	$\varepsilon_1/\varepsilon_3 \le 0.85$ $\varepsilon_3/\varepsilon_2 \ge 1.15$ $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \le 0.85$	$\varepsilon_1/\varepsilon_3 \ge 1.15$ $\varepsilon_3/\varepsilon_2 \le 0.85$ $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \le 0.85$	$\varepsilon_1/\varepsilon_3 \ge 1.15$ $\varepsilon_3/\varepsilon_2 \ge 1.15$ $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \le 0.85$
	2	$\varepsilon_1/\varepsilon_3 \ge 1.15$ $\varepsilon_3/\varepsilon_2 \le 0.85$ $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \ge 1.15$	$\varepsilon_1/\varepsilon_3 \le 0.85$ $\varepsilon_3/\varepsilon_2 \ge 1.15$ $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \ge 1.15$	$\varepsilon_1/\varepsilon_3 \le 0.85$ $\varepsilon_3/\varepsilon_2 \le 0.85$ $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \ge 1.15$

Заключение

Приведенные результаты показывают, что теория характеристик делает доступным решение динамических задач высокой степени сложности и позволяет математически моделировать волновые процессы в сплошных средах, в, частности в кубически анизотропных телах. Это тем более важно, поскольку распространение поверхностей разрыва поля перемещений, температур и других полей в математическом формализме теории упругости отвечают большинству разрывных воздействий на тела, имеющих практическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. - 830 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. М.: Наука, 1981. – 552 с.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1978. – 687 с.
5. Рахматулин Х. А. Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1983. - 200 с.
6. Клейман Я. З. О методе характеристик в теории движения многокомпонентной среды / / ПММ. 1959. Т. 23, № 2. С. 391—392.
7. Ляхов Г. М. Волны в грунтах и многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982. – 286 с.
8. Гениев Г. А., Эстрин М. И. Динамика пластической и сыпучей сред. М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 216 с.
9. Гениев Г. А. Лейтес В. С. Вопросы механики неупругих тел. М.: Стройиздат, 1981. – 161 с.
10. Новацкий В. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978 - 307 с.
11. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир. 1964. 308 с.
12. Поленов В. С., Чигарев А. В. Нестационарные упругие волны в неоднородных средах с начальными напряжениями / / Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. – мат. навук. 1995. № 1. С. 51 - 55.
13. Чигарев А. В., Чигарев Ю. В. Метод разрывных возмущений в исследовании динамической устойчивости упрговязкопластических сред // В сб. «Теоретическая и прикладная механика». Мн.: Технопринт, 2002. С. 156 - 159.
14. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3-х т / Под ред. С. Д. Пономарев // Т. 3. М.: Машгиз, 1959 - 1118 с.
15. Клифтон Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // Механика. 1968. № 1. С. 103 - 132.
16. Тарабрин Г. Т. Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 4. С. 38 - 43.
17. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. - 608 с.
18. Чайка Т. Н. Метод пространственных характеристик // Вестник МГУ. Математика и механика. 1983, № 1. С. 81 – 84.
19. Чебан В. Г. Разностно-характеристический метод решения плоской динамической задачи для двухкомпонентной среды // Математические исследования. – 1983. - № 75. – С. 111 - 124.
20. Лахе А. Я., Нигул У. К. Алгоритм метода характеристик для анализа одномерных волновых процессов деформации конических и цилиндрических оболочек / / ПММ. 1971. Т. 35, № 4. С. 690 - 700.
21. Навал И. К., Черниговский С. В. Метод пространственных характеристик решения связанной задачи термоупругости // Математ. исследования. 1982, № 70. С. 78 – 89.

22. Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Применение метода пространственных характеристик // Изв. АН СССР. МТТ. 1972, № 6. С. 180 – 185.
23. А. Н. Подгорный, Гузь И. С., Дружинин А. Г. Волновой фронт, возбуждаемый нестационарным источником в однородной изотропной среде // Прикл. механика. 1976. Т. XII, № 12. С. 28—35.
24. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. – 284 с.
25. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – Москва: Наука, 1982. – 424 с.
26. Босяков С. М. Поверхности характеристик в пьезоэлектрических кубически анизотропных средах // Вестник Брестского государственного технического университета. 2001. № 5. С. 39 - 45.
27. Босяков С. М., Мартыненко М. Д. Метод характеристик для динамической термоупругой задачи кубически анизотропного тела в напряжениях // ИФЖ. 2002. Т. 75. №3. С. 84 - 71.
28. Босяков С. М. Анализ эффектов связанности теплового и механического полей в динамической теории термоупругости кубически анизотропного тела // Вестник Брестского государственного технического университета. 2003. № 4. С. 11 – 17.
29. Босяков С. М., Мартыненко М. Д. Развитие метода характеристик для системы электродинамических уравнений Максвелла // ИФЖ. 2003. Т. 76, № 2. С. 138 - 144.