ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ФОРМЫ ДВИЖЕНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Михасев Г.И.

A short survey on the localized forms of motion of thin shells having variable geometrical and physical parameters is presented. Three kinds of the two-dimensional problems dealing with free vibrations, parametric vibrations and wave propagation are considered. The asymptotic methods for studying stationary and non-stationary localized vibrations of thin elastic, viscoelastic, and composite laminated shells are discussed.

По-видимому, трудно найти такую отрасль современной техники, в которой не использовались бы тонкостенные конструкции. Важнейшими задачами на стадии проектирования таких конструкций являются задачи, связанные с их динамическим расчетом. К настоящему моменту имеется огромное множество работ, посвященных различным аспектам динамики тонких оболочек (свободные и параметрические колебания, вынужденные колебания, волновые процессы и др.). В настоящей работе не ставится задача обзора всех исследований (по-видимому, трудно осуществимая в рамках данной статьи), выполненных по данному направлению. Цель данной обзорной статьи – познакомить читателей лишь с отдельным классом задач в теории тонких оболочек, характеризующихся сильной локализацией форм колебаний, делая акцент на наиболее сложных, нестационарных задачах, а также предложить методы их решения.

Проблема локализации собственных форм возникает в различных задачах колебаний упругих тел с переменными геометрическими или физическими параметрами. Наиболее эффективными методами решения подобных задач являются асимптотические методы. Локализованные формы колебаний мембраны типа «шепчущая галерея» и «прыгающий мячик» впервые были найдены В.М. Бабичем и В.С. Булдыревым [1]. Собственные формы колебаний, локализованные вблизи свободных краев прямоугольной пластины с шарнирно опертыми противоположными сторонами, были построены А.Ю. Ишлинским [2]. В трехмерной постановке, Ю.Д. Каплунов [3] изучил колебания оболочки вращения, локализованные вблизи края, а П.Е.Товстик [4] рассмотрел задачу о локализованных колебаниях толстой пластинки переменной толщины. Сосредоточенные колебания стержня переменной толщины были также изучены в работе [5].

1. Локализованные формы собственных колебаний тонких оболочек. Природа локализации свободных колебаний упругих оболочек достаточно хорошо изучена (см. обзорную статью [6], а так же монографию [7]). Непостоянство радиуса кривизны, переменность толщины, неоднородность физических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, наличие косых краев или слабое крепление последних, а также неоднородность напряженно-деформированного состояния оболочки, вызванного характером статической нагрузки, могут быть причиной появления на поверхности оболочки так называемых «слабых областей». Наличие таковых может приводить к сильной локализации собственных форм колебаний с амплитудами, имеющими ярко выраженный максимум на некоторых линиях (например, на меридианах для выпуклых оболочек вращения, на асимптотических линиях для оболочек нулевой кривизны), и быстро убывающими вдали от них.

Поскольку значительное место ниже будет уделено нестационарному локализованному движению оболочек нулевой кривизны, рассмотрим подробнее задачу о свободных колебаниях некруговой цилиндрической оболочки с косыми краями. Низкочастотные колебания такой оболочки могут быть описаны полубезмоментными уравнениями [8, 9]

$$\varepsilon^4\Delta^2 W + k(\varphi)\partial^2\Phi/\partial s^2 + \varepsilon^2\Delta_T W + \varepsilon^2\,\partial^2 W/\partial t^2 = 0,$$

$$\varepsilon^4\Delta^2\Phi - k(\varphi)\partial^2 W/\partial s^2 = 0, \qquad (1)$$

записанными в безразмерном виде. Здесь s, φ –продольная и окружная координаты точек на срединной поверхности оболочки, t – время, $k(\varphi)$ – переменная кривизна, W, Φ – нормальный прогиб и функция напряжений, Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат s, φ, Δ_T – оператор, учитывающий наличие мембранных усилий $T_1(s,\varphi), T_2(s,\varphi), T_3(s,\varphi)$, вызванных действием внешних статических сил, ε –малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки. На краях (которые, в общем случае, есть неплоские кривые) $s = s_1(\varphi), s = s_2(\varphi)$ рассмотрим один из вариантов граничных условий– шарнирное опирание, жесткая заделка, слабая заделка, свободный край или их сочетание. Например, в случае шарнирного опирания для построения основного напряженного состояния с точностью до $O(\varepsilon^2)$, достаточно удовлетворить условиям [9]

$$W = \Phi = 0 \ \text{ при } \ s = s_1(\varphi), s = s_2(\varphi). \qquad (2)$$

Если все геометрические параметры оболочки и мембранные усилия T_i не зависят от координат s, φ, то уравнения (1) допускают точное решение. В этом случае свободные колебания покрывают всю поверхность оболочки. Пусть теперь хотя бы одна из величин k, s_i, T_i зависит от φ. Тогда задача (1), (2) становится существенно двумерной, не допускающей точного решения. В статье [8] предложено асимптотическое представление решения:

$$W = W_\Sigma(s,\xi,\varepsilon)\exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1}\omega t + \varepsilon^{-1/2} p\xi + \tfrac{1}{2} b\xi^2\right)\right\}, \qquad (3)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots, \qquad (4)$$

$$W_\Sigma(s,\xi,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(s,\xi),\ \xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0),\ \mathrm{Im}\, b > 0, \qquad (5)$$

где $w_j(s, \xi)$ – полиномы по ξ, p, b – неизвестные числа, ω – искомая частота колебаний, $\varphi = \varphi_0$ – наиболее слабая образующая, в окрестности которой локализуются колебания. Функция F ищется в том же виде с заменой W_Σ и w_j на F_Σ и f_j соответственно. Последнее неравенство в (5) гарантирует затухание амплитуды волн вдали от линии $\varphi = \varphi_0$. Подстановка разложений (3)-(5) в уравнения (1) и граничные условия (2) приводит к последовательности одномерных краевых задач на образующей $\varphi = \varphi_0$, из которых последовательно находятся параметры p, b, частота ω и полиномы $w_j(s, \xi)$. Процедура отыскания последних подробно изложена в [8,9].

Впоследствии данный метод (метод Товстика) был использован для решения ряда новых задач. Собственные локализованные колебания упругой оболочки, близкой по форме к оболочке нулевой кривизны с неосесимметричной погибаю, были исследованы в [10]. В работе [11] построены формальные асимптотические решения для системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки с косым краем. Вязкоупругие свойства материала учитывались через функцию скорости релаксации K(t) посредством замены в уравнениях (1) нормального прогиба w его образом. В статье [12], при некоторых частных предположениях относительно переменной плотности материала, исследовано влияние разностенности круговой цилиндрической оболочки на нижний спектр свободных колебаний вблизи наиболее слабой образующей. Свободные колебания некруговых тонкостенных цилиндров с учетом воздействия однородных и неоднородных температурных полей были изучены в [13, 14]. В этих работах рассмотрен случай, когда начальные напряжения, вызванные температурным расширением оболочки, отсутствуют (при свободных краях), а влияние температурных факторов на нижний спектр колебаний осуществляется через ядро скорости релаксации K(t) вязкоупругого материала. В частности, в [13] исследовано влияние неравномерного в окружном направлении поля температур на степень локализации собственных форм колебаний. Также изучены свободные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с учетом воздействия осевых сил [15, 16]; показано, что неоднородность осевых сил может быть причиной локализации собственных форм вблизи образующей, на которой сжимающая сила имеет максимум. Филипповым С.П. построены высшие приближения в разложениях (3)–(5), с учетом влияния краевых эффектов [17], а также исследованы свободные локализованные колебания сопряженных под углом оболочек нулевой кривизны [18].

2. Локализованные формы параметрических колебаний тонких оболочек. Задачи о параметрически возбуждаемых колебаниях тонких оболочек рассматривались многими исследователями (см., например, [19-23]). С использованием одного из вариационных методов такие задачи могут быть сведены к известным уравнениям Матье или Матье–Хилла. В настоящее время имеется ряд работ (их перечень здесь не приводится), выполненных при различных усложняющих факторах – в нелинейной постановке, с учетом рассеяния энергии, в случае нестационарного температурного или электрического полей. В подавляющем большинстве исследований рассматривались круговые цилиндрические или конические оболочки, а возбуждающие силы предполагались не зависящими от координат. Такие задачи, относящиеся к одномерным, достаточно хорошо изучены. Известна одна работа [24], где делается попытка исследовать параметрическую устойчивость некруговых оболочек нулевой кривизны. Однако недостатком данной статьи является то, что в ней в качестве аппроксимирующих рассматриваются функции, изменяющиеся в окружном направлении по синусоидальному закону. При таком выборе координатных функций трудно учесть особенности задачи, связанные с наличием областей наиболее интенсивных колебаний. Вместе с тем, представляется очевидным, что наличие так называемых «слабых» линий на поверхности оболочки может в значительной степени влиять на характер возбуждаемых колебаний.

Вернемся к уравнениям (1), в которых мембранные усилия, содержащиеся в слагаемом $\Delta_T w$, примем в виде

$$T_i = T_{i0}(s,\varphi) + \varepsilon\left[T_{i1}(s,\varphi)\cos\Omega t + T_{i2}(s,\varphi)\sin\Omega t\right], \quad i = 1,2,3, \tag{6}$$

где Ω – частота возбуждения. В этом случае уравнения (1) описывают движение оболочки в окрестности динамического безмоментного напряженно-деформированного состояния (НДС), характеризуемого усилиями (6). Последние могут быть вызваны нестационарной внешней нагрузкой (пульсирующими давлением, осевыми силами, температурой и т.п.). Теоретически параметрическая неустойчивость наблюдается в том случае, когда отношение частоты нагружения Ω к частоте собственных колебаний оболочки ω оказывается равным или близким к одному из следующих значений [21]

$$\Omega/\omega = 2/1, 2/2, 2/3, 2/4, \ldots$$

Однако практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда это отношение равно 2, 1, реже $2/3$. В цитируемых ниже работах рассмотрен представляющий наибольший интерес случай, когда $\Omega \approx 2\omega$. В статье [25] были исследованы параметрические колебания некруговой цилиндрической оболочки под действием осевой силы T_1, имеющей как статическую, так и периодическую составляющие, зависящие от круговой координаты φ. В предположении о локализации возбуждаемых колебаний решение уравнений (1) строилось в виде:

$$W(s,\varphi,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(s,\xi,t_0,t_1,t_2,\ldots)\exp\{\mathrm{i}[\varepsilon^{-1/2} p\xi + \tfrac{1}{2} b\xi^2]\}, \tag{7}$$

где $\operatorname{Im} b > 0$, $t_i = \varepsilon^i t (i = 1,2,\ldots)$ – «медленное» время. Анзатц (7) отличается от разложения типа (3),(5) предполагаемой зависимостью амплитуд от “медленного” времени. Функция (7) аппроксимирует возбуждаемые колебания, сосредоточенные вблизи «слабой» образующей

$\varphi = \varphi_0$ с медленно растущими, в случае параметрической неустойчивости, амплитудами. Найдены [25] соотношения для параметров p и b, аналогичные формулам полученным в [8]. Выведено амплитудное уравнение относительно функции $w_0(s,\xi,t_0,t_1,t_2,...)$; решение последнего найдено в виде полинома Эрмита степени m относительно ξ с коэффициентами, зависящими от продольной координаты s, времени t и «медленного» времени t_1. Получена однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{A}_m(t_1)\mathbf{Y}_m = \mathbf{0}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{A}_m$ – матрица размерности 2×2, элементы которой суть периодические функции от t_1, зависящие от статической и периодической составляющих осевой силы (6), $\mathbf{Y}_m$ – вектор, определяющий функциональную зависимость коэффициентов полинома Эрмита от «медленного» времени. Поведение решений системы (8) при $t_1 \to \infty$ зависит от соотношения входящих в задачу параметров. В работе [26] найдена область неограниченного возрастания вектор-функция $\mathbf{Y}_m$ при $t_1 \to \infty$, соответствующая локальной параметрической неустойчивости оболочки. Там же, с использованием полубезмоментных уравнений типа (1), учитывающих линейную зависимость модуля Юнга от температуры, изучен термопараметрический резонанс некруговой цилиндрической оболочки, находящейся в пульсирующем температурном поле, а также показана инвариантность уравнений (8) относительно способа нагружения оболочки. Позже, исследования по локализованным параметрическим колебаниям некруговых конических оболочек с произвольными краями под действием неоднородного пульсирующего давления [27] позволили установить инвариантность уравнений (8) и относительно формы оболочки. Учет вязкоупругих свойств материала [28, 29] привел к сужению главной области локальной параметрической неустойчивости цилиндрической оболочки. И, наконец, интегрирование уравнений (1) методом сеток в случае локально возбуждаемых параметрических колебаний цилиндрической оболочки показало хорошее совпадение результатов, полученных численными и асимптотическими методами [30].

3. Нестационарные локализованные волновые процессы в тонких оболочках. Нестационарные формы движения тонких оболочек возникают как реакция на импульсные или кратковременные динамические нагрузки (см. обзор в [31,32]), а также начальные перемещения и скорости [33,34], неравномерно распределенные по поверхности оболочки. Вышеприведенный обзор исследований по локальным параметрическим колебаниям цилиндрических и конических оболочек указывает на то, что источником начальных перемещений и скоростей, сосредоточенных в окрестности некоторых асимптотических линий, может быть также параметрический резонанс оболочки, имеющей «слабую» образующую. Задачи о нестационарном движении оболочках не допускают точных решений и относятся к наиболее сложным и менее изученным. Методы их решения зависят от принятой постановки задачи. Чаще решения ищутся в виде рядов Фурье с последующим применением преобразования Лапласа по времени [31, 32], иногда методом разложения искомых перемещений в ряды по собственным формам колебаний [33] или в виде рядов по гармоникам окружной координаты [35].

В данном параграфе рассмотрим решения уравнений движения тонких оболочек, аппроксимирующих нестационарные формы колебаний, сосредоточенных в окрестности некоторых подвижных линий и точек на поверхности оболочки. Наиболее эффективными методами исследования локализованных волновых процессов в упругих средах могут быть асимптотические методы [1, 36, 37]. В статьях [38] и [39] рассмотрены начально-краевые задачи для уравнений пологих оболочек типа (1), описывающих движение круговой и некруговой цилиндрической оболочек средней длины. В качестве начальных перемещений и скоростей точек срединной поверхности рассмотрены функции

$$W\big|_{t=0}=W_0(s,\varphi,\varepsilon)\exp\left[i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)\right],\quad \dot{W}\big|_{t=0}=i\varepsilon^{-1}V_0(s,\varphi,\varepsilon)\exp\left[i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)\right],\qquad (9)$$

где W_0, V_0, S_0 – комплексные, достаточное число раз дифференцируемые по φ и s функции, такие, что $\mathrm{Im}S_0(0)=0$, $\mathrm{Im}S_0(\varphi)>0$ при $\varphi\neq 0$. Вещественные и мнимые части функций (9) задают на поверхности оболочки начальный волновой пакет (ВП) изгибно-плоскостных волн с центром на образующей $\varphi = 0$. В случае прямых краев $s_1=0, s_2=l$ для решения начально-краевой задачи (1), (2), (9) был использован метод В.П. Маслова [37], согласно которому решения были построены в виде суперпозиции пакетов изгибно-плоскостных волн, бегущих в окружном направлении оболочки. Данный метод, однако, неприменим для случая, когда края оболочки не лежат в плоскостях, перпендикулярных образующей.

Для решения задачи в более общей постановке (например, при наличии косых краев, динамических внешних сил) был предложен новый метод [40, 41], в основу которого положен переход к локальной системе координат $\varphi=q(t)+\varepsilon^{1/2}\xi$, связанной с центом $\varphi=q(t)$ бегущего ВП. В новой системе координат решение уравнений (1) построено в виде формального асимптотического разложения

$$w=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}w_j(s,\xi,t)\exp\left[i\varepsilon^{-1}S(\xi,t,\varepsilon)\right],\quad S=\int_0^t\omega(\tau)d\tau+\varepsilon^{1/2}p(t)\xi+\frac{1}{2}\varepsilon b(t)\xi^2,\qquad (10)$$

где $\mathrm{Im}b(t)>0$ для любого $0\le t\le t'<+\infty$, где ω, p, b – достаточное число раз дифференцируемые по t функции, w_j – полиномы по ξ с достаточное число раз дифференцируемыми по s и t комплексными коэффициентами. Все входящие в (10) величины имеют определенный механический смысл: функция $|\omega(t)|$ суть мгновенная частота колебаний оболочки, $p(t)$ определяет изменяемость волн в направлении φ, функция $\mathrm{Im}b(t)$ характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра $\varphi=q(t)$, а w_j – амплитудные функции. Как видно, анзатц (10) отличается от соответствующего разложения (3)-(5) функциональной зависимостью всех упомянутых величин от времени. Подстановка (10) в (1), (2) позволяет свести двумерную начально-краевую задачу к последовательности одномерных краевых задач на подвижной образующей $\varphi=q(t)$. Из рассмотрения краевой задачи в нулевом приближении находится соотношение для мгновенной частоты

$$\omega(t)=\dot{q}(t)p(t)\mp H[p(t),q(t),t],\qquad (11)$$

где $H(p,t,q)$ –функция Гамильтона задачи. Условия существования краевых задач, возникающих в первом, втором и высших приближениях, приводят к системе Гамильтона

$$\dot{q}=H_p,\dot{p}=-H_q,\qquad (12)$$

уравнению Риккати

$$\dot{b}+H_{pp}b^2+2H_{pq}b+H_{qq}=0\qquad (13)$$

и амплитудным уравнениям для определения функций w_j. Последние строятся в виде полиномов Эрмита аргумента ξ с коэффициентами, зависящими от времени t. Следует отметить, что при некоторых соотношениях параметров, входящих в начальные условия (9), разложение (10) вырождается в стационарный ВП на «слабой» образующей, совпадающий с локализованной собственной формой колебаний, найденной в [8].

Впоследствии описанный метод был использован для исследования бегущих в окружном направлении ВП в цилиндрических и конических оболочках, находящихся под действием статических и динамических внешних сил [42-46]. В частности, установлено, что растущие во времени осевые силы [45] и внешнее давление [46] могут приводить к нежелательным эффектам: локализации нестационарных волновых процессов в окрестности «наиболее слабых» линий, многократным отражениям бегущих ВП от некоторых образующихся, сопровождающимся фокусировкой и ростом амплитуд. А учет вязкоупругих свойств материала [47, 48] привел лишь к некоторому «размазыванию» данных эффектов по поверхности оболочки. Влияние сил инерции и кольцевых усилий на динамику ВП во вращающихся оболочках исследовано в [50, 51]. И, наконец, цикл работ [52-54] посвящен стационарным и нестационарным локализованным колебаниям слоистых композитных оболочек. Для описания динамики слоистых оболочек были использованы выведенные в [55] на основе обобщенных кинематических гипотез Тимошенко уравнения типа (1), учитывающие поперечные сдвиги в цилиндрических и конических оболочках. Кроме того, выполненные в [53,54] расчеты с использованием МКЭ, позволили установить диапазон применимости уравнений слоистых оболочек [55], а также погрешность используемого асимптотического метода для исследования локализованных колебаний.

Локализованные волны в длинных оболочках исследованы в работах [55-59]. Решения уравнений движения в перемещениях строились в виде суперпозиции бегущих в осевом направлении ВП изгибных, продольных и крутильных волн; рассмотрены случаи осесимметричного и неосесимметричного движений при малом и большом числе волн в окружном направлении. Изучено влияние переменных радиуса кривизны [56,57], толщины, модуля Юнга [58], а также неоднородного внутреннего давления [59] на групповые скорости, мгновенные частоты колебаний, амплитуду и ширину бегущих ВП. В частности установлено, что неоднородность геометрических и физических характеристик в большей степени влияет на динамические характеристики ВП изгибных волн и в меньшей степени – на динамику тангенциальных (продольных и крутильных) волн. И, наконец, в статье [60] предложен алгоритм, позволяющий строить решения уравнений движения тонких оболочек в виде бегущих двумерных пакетов изгибных волн, локализованных в окрестности некоторых подвижных точек. Показано [60, 61], что траектория двумерных ВП сильно зависит от геометрии оболочки и характера динамического нагружения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972. –456с.
2. Ишлинский А.И. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. Ан СССР. 1954.– Т. 95, №3.–С. 477-479.
3. Каплунов Ю.Д. Колебания оболочек вращения при краевом возбуждении // Механика твердого тела. 1991. –№6. –С. 151-159.
4. Товстик П.Е. Свободные высокочастотные колебания анизотропных пластин переменной толщины // Прикл. мат. и мех. – 1992. – Т. 56, № 3. – С. 473–479.
5. Kaplunov Yu. D., Rogerson A., Tovstik P.E. High-frequency localized vibrations of an elastic body of revolution // Day on diffraction’2001, St. Petersburg, Abstr. – P. 88.
6. Tovstik P.E. On the localized vibration modes of thin elastic shells // Technische Mechanic.– 2004 (принята к опубликованию).
7. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е., Свободные колебания тонких упругих оболочек.– М.: Наука, 1979.–384с.
8. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // Докл. АН СССР.– 1983.– Т.271, №1.– С. 69-71.
9. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. –М.: Наука. Физматлит, 1995.–320с.
10. Молчанов А.И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений свободных колебаний некруговых оболочек, близких к оболочкам нулевой гауссовой кривизны // Вестн. Ленингр. ун-та.– Сер. матем., механ., астрон..– 1987.– № 2.– С. 106-107.

11. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 50–55.
12. Михасев Г.И. Об одном решении системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей свободные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки // Весцi АН Беларусi. – Сер. фiз.-мат. навук. 1992. – № 2. – С. 22–26.
13. Botogova M.G., Mikhasev G.I. Free vibrations of non-uniformly heated viscoelastic cylindrical shell // Technische Mechanik. – 1996. – Band 16, Heft 3. – S. 251–256.
14. Ботогова М.Г., Михасев Г.И. Свободные низкочастотные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки с учетов воздействия температурного поля // Весцi АН Беларусi. – Сер. фiз.-тэхн. навук. – 1997. – № 2. – С. 117–123.
15. Ботогова М.Г., Михасев Г.И. Свободные колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки под действием однородной осевой нагрузки // Прикладная механика.– 1999.– № 11.– С. 68-74.
16. Ботогова М.Г., Михасев Г.И., Рафеенко Е.Д. Свободные колебания вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого нагружения // Сборник «Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике».– Мн.: УП «Технопринт», 2001 – С.57-61.
17. Filippov S.B. Low–frequency vibration of a cylindrical shells. Part I: Shell with a slated edge // Asymptotic Method in Mechanics. CRM Proc. & Lecture Notes.–1993.– V. 3.– P.193–204.
18. Filippov S.B. Low-frequency vibration of a cylindrical shells. Part II: Connected shells // Asymptotic Method in Mechanics. CRM Proc. & Lecture Notes.–1993.– V. 3.– P. 205–216.
19. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М., 1956. –600с.
20. Yao John C. Dynamic stability of cylindrical shells under static and periodic axial and radial loads // AIAA Journal. – 1963. – V. 1, N. 6. – P. 1391–1396.
21. Yao John C. Nonlinear elastic buckling and parametric excitation of a cylinder under axial loads // Trans. ASME. – 1965. – E 32, N.1. – P. 109–115.
22. Vijayaraghavan A., Evan-Iwanowski R.M. Parametric instability of circular cylindrical shells // Trans. ASME. – 1967. – E 34, N. 4. – P. 985–990.
23. Kornecki A. Dynamic stability of truncated conical shells under pulsating pressure // Israel J. Technol. – 1966. – V. 4, № 1–2. – P. 110–120.
24. Сальников Г.М. Динамическая устойчивость цилиндрических и конических оболочек кругового и некругового сечения при различных граничных условиях//В сб. “Иссл. по теории пластин и оболочек”. Вып. 5.–Казань: Изд-во Казанск. ун-та,1967.–С.469–479.
25. Mikhasev G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads // Technische Mechanik. – 1997. – Band 17, Heft 3. – S. 209–216.
26. Mikhasev G.I., Kuntsevich S.P. Thermoparametric vibrations of noncircular cylindrical shell in nonstationary temperature field // Technische Mechanik. – 1997. – Band 17, Heft 2. – S. 113–120.
27. Кунцевич С.П., Михасев Г.И. Локальные параметрические колебания некруговой конической оболочки под действием неоднородного пульсирующего давления // Известия АН. Механика Твердого Тела. – 2002, №3. – С.156-163.
28. Kuntsevich S.P., Mikhasev G.I., Parametric vibrations of viscoelastic cylindrical shell under static and periodic axial loads //Technische Mechanik.– 999. – Band 19, Heft 3.– S.187-195.
29. Кунцевич С.П., Михасев Г.И. Локальные параметрические колебания вязкоупругих конических оболочек под действием пульсирующего давления//Вторые Поляховские чтения: Избран. труды–СПб.:Изд-во НИИХ С.-Петербургского ун-та,2000.–С.278-288.
30. Кунцевич С.П. Численное решение уравнений локальных параметрических колебаний тонкой цилиндрической оболочки // Веснiк ВДУ. – 2003, № 3 (29).– С. 117-121.
31. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин.– Л.: Судостр., 1987. – 316с.

32. Reismann H., Pawlik P.S. Plane–strain dynamic response of a cylindrical shell – a comparison study of three different shell theories // Trans. ASME. – 1968. – E 35, N. 2. – P. 297–305.
33. McIvor I.K. The elastic cylindrical shell under radial impulse // Trans. ASME. – 1966. – E33, N. 4. – P. 831–837.
34. Medige J. Dynamic response of cylindrical shells // Doct. diss. I11. Inst. Technol. – 1967. – 112pp.; Dissert. Abstrs. – 1967. – B 28, N. 1. – P. 203.
35. Sheng J. The response of a thin cylindrical shell to transient surface loading // AIAA Journal. – 1965. – V. 3, N. 4. – P. 701–709.
36. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. – 271с.
37. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.–М.: Наука,1977. – 384с.
38. Михасев Г.И. О распространении изгибных волн в цилиндрической оболочке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. – Сер. матем., механ., астрон. – 1993. – № 8. – 99–103.
39. Михасев Г.И. О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке // Изв. РАН. Механика тверд. тела. – 1994. –№ 3. – С. 164–172.
40. Михасев Г.И. О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки // Докл. АН Беларуси.– 1994.– Т. 38, № 4. – С. 24–27.
41. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, № 4. – С. 635–643.
42. Авдошка И.В., Михасев Г.И. Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил // Вестн. Витебск. ун-та. – 1997. – № 3(5). – С.50–54.
43. Avdoshka I. and Mikhasev G. Wave packets in axially compressed cylindrical shell// The 5 th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications.– Proceedings, Lodz, Poland, 1999.– P. 83-88.
44. Авдошка И.В. К исследованию изгибных волн в неоднородной тонкой конической оболочке с учетом внешней нагрузки // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та.— 1999.— № 2.— С. 59–63.
45. Авдошка И.В., Михасев Г.И. Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке, подверженной неравномерной осевой нагрузке // Прикл. мат. и мех..–2001.– Т.65, Вып. 2.– С. 308–316.
46. Mikhasev G.I. Localized families of bending waves in a thin medium-length cylindrical shell under pressure // Journal of Sound and Vibration.– 2002.– Vol.253, No.4.– P.833-857.
47. Авдошка И.В., Михасев Г.И. К исследованию нестационарных локализованных волновых процессов в вязкоупругих цилиндрических оболочках с учетом воздействия динамических внешних сил // Вторые Поляховские чтения: Избран. Труды.–Санкт-Петербург, 2000. –С. 228–236.
48. Авдошка И.В. О распространении изгибных волн в вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочке // Машиностроение: Сб. науч. тр./Под. ред. И.П. Филонова.– Минск: УП «Технопринт», 2000.– Вып.16.– С. 204–209.
49. Михасев Г.И. Стационарные и нестационарные задачи локальных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек// Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике.–, Мн.: УП «Технопринт».– 2001. - С.357-362.
50. Mikhasev G.I. Localized waves in medium length, rotating thin laminated cylindrical shell under wind load // Int. seminar “Day on Diffraction’2002”, Book of abstracts.– S. Petersburg.– 2002.– P. 50-51.
51. Mikhasev G.I. Localized stationary and non-stationary vibrations of thin laminated cylindrical shells // Book of Abstracts of the Annual Scientific Conference GAMM 2001, February 12-15.– 2001, Zürich.– P.94.

52. Mikhasev G.I. The localized running vibrations in thin composite laminated cylindrical shells under dynamic axial load // Book of Abstracts of the Annual Scientific Conference GAMM 2003, March 24-28.– 2003, Abano Terme – Padua (Italy).– P. 182.
53. Korchevskaya E., Mikhasev G., Marinkovic D., Gabbert G. Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load // Proceedings of the conference "6 Magdeburger Maschinenbau-Tage", 2003.–Berlin: Logos-Verl.– P. 183-189.
54. Mikhasev, G., Korchevskaya, E., Gabbert, U., Marinkovic, D.: Local Buckling, Stationary and Non-Stationary Vibrations of Thin Composite Laminated Shells Having the Weakest Spots// Proceedings of the Fourth International Conference on Thin-Walled Structures, edited by J. Loughlan, Loughborough.– UK, 22-24 June 2004.– P 769-776.
55. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин.–М: Машиностроение, 1988.–288с.
56. Михасев Г.И. К исследованию изгибных волн в бесконечной оболочке вращения // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 7. – С. 60–64.
57. Михасев Г.И. Локализованные волновые формы движения бесконечной оболочки вращения // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, № 5. – С. 834–842.
58. Михасев Г.И. О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами // Изв. РАН. Механика тверд. тела.–1995.– № 6.–С.129–137.
59. Mikhasev G.I. Travelling wave packets in an infinite thin cylindrical shell under internal pressure // J. Sound and Vibr. – 1998. – V. 209, N. 4. – P. 543–559.
60. Михасев Г.И. Асимптотические решения системы уравнений пологих оболочек в виде двумерных волновых пакетов // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 47–53.
61. Авдошка И.В., Михасев Г.И. Двумерные волновые пакеты в оболочках произвольной формы, подверженных действию внешних сил // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике: Сб. ст.– Минск: УП «Технопринт», 2001.– С. 7-11.