Щецинская Сельскохозяйственная Академия, Польша

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТА ШТАМПА И СРЕДЫ СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Чигарев Ю.В.

Теория и методы контактных задач находят всё большее применение в решении прикладных задач. Это касается и проблем сельскохозяйственного производства в решении задач по оценке прочности, износа и равновесного состояния агромеханических систем. Сельскохозяйственные среды относятся к случайно неоднородным и для их исследования необходимо применять методы статистической механики и теории вероятности [3]

Рассмотрим задачу о внедрении штампа в неоднородную упруговязкопластическую почву параметры которой описываются случайными функциями координат. Предполагается, что почва имеет предварительно напряженное состояние определяемое технологиями возделывания сельскохозяйственных культур. Предварительно напряжённое состояние оказывает влияние на физические параметры почвы (плотность, влажность, пористость и т.д.) При получении среднего состояния стохастически неоднородной упруговязкопластической почвы считается, что масштаб неоднородности меньше характерных размеров рассматриваемого объёма. Тогда можно использовать теорию эргодичности. Упругие деформации существуют в точках, где

$$S_{ij}S_{ij} < k^2 , \quad (S_{ij}=\sigma_{ij} - 1/3\sigma_{\kappa\kappa}\delta_{ij}) \qquad (1)$$

Здесь σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, к - коэффициент пластичности, S_{ij} - девиатор напря-жений, δ_{ij} - символ Кронекера.

В точках, где

$$S_{ij}S_{ij} \geq k^2 \qquad (2)$$

имеют место пластические деформации, причём полные деформации ε_{ij} представляются в виде суммы упругой ε^e_{ij} и пластической ε^p_{ij} деформаций. Упругие деформации связаны с напряжениями обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon^e_{ij} + \nu\varepsilon^e_{ij}\delta_{ij} /(1+\nu)) \qquad (3)$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

В случае трансляционного упрочнения функция нагружения примет вид[1.2]

$$(S_{ij} - c\varepsilon^p_{ij} - \eta\acute{\varepsilon}^p_{ij})(S_{ij} - c\varepsilon^p_{ij} - \eta\acute{\varepsilon}^p_{ij}) = \kappa^2 \qquad (4)$$

здесь с – коэффициент упрочнения, η – коэффициент вязкости (точка над буквой определяет производную по времени).

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом течения

$$\acute{\varepsilon}^p_{ij} = \Psi(S_{ij} - c\varepsilon^p_{ij} - \eta\acute{\varepsilon}^p_{ij}) \qquad (5)$$

где

$$\Psi = 2\sqrt{\acute{\varepsilon}^p_{ij}\acute{\varepsilon}^p_{ij}} \;/k \qquad (6)$$

есть положительный параметр.

Соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (7)$$

Уравнения равновесия

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = 0 \qquad (8)$$

Граничные условия

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]n_j = P_i \qquad (9)$$

Система уравнений (1) – (9) замкнута и имеет единственное решение[2]

Считаем, что все параметры основания являются случайными функциями координат. Следовательно, полевые величины напряжений и деформаций тоже будут зависеть случайным образом от пространственных координат. Представим все функции в виде суммы математического ожидания и случайной флуктуации, а зависимость параметров среды от пространственных координат через одну и ту же статистически однородную изотропную функцию $g(x_i)$ в виде (i=1,2,3) [2,3]

$$\eta = \langle \eta \rangle g; \quad c = \langle c \rangle g; \quad k = \langle k \rangle g; \quad G = \langle G \rangle g; \tag{10}$$

символом $\langle\ \rangle$ обозначено математическое ожидание.

Делая преобразования аналогично [2] и проводя статистическую линеаризацию уравнений с последующим применением метода функций Грина [3] получим систему уравнений, которая будет описывать среднее напряжённое и деформированное состояние стохастичесски неоднородной упруговязкопластической среды

$$8\langle G\rangle^3\langle k\rangle^2\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle - 4\langle R_{ij}\rangle\langle k\rangle^2\langle G\rangle^2 - [\langle R_{ij}\rangle - 2\langle c\rangle\langle G\rangle\langle \varepsilon_{ij}\rangle - \langle \eta\rangle(2\langle G\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle - \langle H_{ij}\rangle)][\langle R_{kq}\rangle -$$
$$- 2\langle c\rangle\langle G\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle - \langle \eta\rangle(2\langle G\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle - \langle H_{kq}\rangle)](2\langle G\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle - \langle H_{kq}\rangle) =$$
$$= -D^2(24\langle G\rangle^3\langle k\rangle^2\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle + 8\langle c\rangle\langle G\rangle^3\langle R_{ij}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle - 24\langle c\rangle\langle G\rangle^3\langle \eta\rangle\langle \varepsilon_{ij}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle +$$
$$+4\langle G\rangle^2\langle \eta\rangle(\langle R_{ij}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle^2 + \langle R_{kq}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle) - 24\langle G\rangle^3(\langle c\rangle\langle \eta\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle -$$
$$\langle \eta\rangle^2\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle) +$$
$$+8\langle G\rangle^2\langle \eta\rangle^2\langle H_{ij}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle + 4\langle c\rangle^2\langle G\rangle^2(\langle H_{kq}\rangle\langle \varepsilon_{ij}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle + \langle H_{ij}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle) +$$
$$+ 4\langle G\rangle^2\langle c\rangle\langle \eta\rangle\langle H_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{ij}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle - 24\langle G\rangle^3\langle c\rangle^2\langle \varepsilon_{ij}\rangle\langle \varepsilon_{kq}\rangle\langle \acute{\varepsilon}_{kq}\rangle : \tag{11}$$

здесь введены обозначения

$$\langle R_{ij}\rangle = \langle \sigma_{ij}\rangle(2\langle G\rangle+\langle c\rangle) - \delta_{ij}\langle \sigma\rangle(2\langle G\rangle + 3\langle c\rangle\nu / (1+\nu); \qquad \langle H_{ij}\rangle = \langle \sigma'\rangle - 3\nu\delta_{ij}\langle \sigma'\rangle / (1+\nu);$$

Уравнения равновесия и граничные условия среднего состояния почвы будут соответственно

$$[\langle \sigma_{ij}\rangle(\delta_{ik}+\langle u_{i,k}\rangle)+D^2W_{ij}(\langle \sigma_{s,p}\rangle\langle u_{s,p}\rangle)]\,,_j = 0 \tag{12}$$

$$[\langle \sigma_{ij}\rangle(\delta_{ik}+\langle u_{i,k}\rangle)+D^2W_{ij}(\langle \sigma_{s,p}\rangle\langle u_{s,p}\rangle)]n_j = P_i \quad (13)$$

В формулах (11) – (13) величина D^2 есть дисперсия неоднородности основания, W_{ij} – нелинейный оператор.

Уравнения (11) – (13) описывают среднее напряжённое и деформированное состояние основания (почвы) в которое под действием силы P вдавливается штамп. При этом будем считать, что основное состояние предварительно нагружено, а решением системы (11) – (13) будет

$$\langle \sigma_{ij}(x_k,t)\rangle=\sigma^0_{ij}(x_k,t); \quad \langle \varepsilon_{ij}(x_k,t)\rangle=\varepsilon^0_{ij}(x_k,t); \quad \langle u_i(x_k,t)\rangle=u^0_i(x_k,t); \tag{14}$$

Будем считать, что с течением времени данные решения не зависят от времени. При вдавливаниии

штампа основное предварительно напряжённое состояние получает малые возмущения, которые будем обозначать штрихом. Тогда решение для возмущённого состояния можно представить в виде

$$\sigma_{ij}=\sigma^0_{ij}+\sigma'_{ij}; \quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon^0_{ij}+\varepsilon'_{ij}; \quad u_i=u^0_i+u'_i \tag{15}$$

В результате процедур, аналогичных работе [2], получим систему уравнений, которая будет описывать среднее однородное напряжённое и деформированное состояние стохастически неоднородной предварительно напряжённой упруговязкопластической среды

$$\sigma^i_j = \delta^i_j a^k_i \varepsilon_{kk} + (1 - \delta^i_j)b_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{16}$$

Для случая среднего однородного состояния уравнения равновесия преобразуются к виду

$$(\sigma_{ij} + \sigma^0_{jk}u_{i,k}),_j = 0 \tag{17}$$

а граничные условия

$$(\sigma_{ij} + \sigma^0_{jk}u_{i,k})n_j = P_i' \tag{18}$$

В уравнениях (16), (17), (18) в амплитудных величинах возмущений опущен штриховой знак. Коэффициенты a^k_j и b_{ij} являются комплексными величинами и зависят от средних параметров свойств среды и дисперсии неоднородности, а также от компонентов напряжений и деформаций основного состояния (в силу громоздкости их явный вид не приводим). Дальнейшее решение задачи будем проводить в цилиндрической системе координат. В этом случае коэффициенты $a^k{}_j$ и b_{ij} можно записать в виде симметричной матрицы

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Связь между напряжениями и деформациями будет

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} + a_{13}\varepsilon_{33};\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = a_{21}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + a_{23}\varepsilon_{33};\\
&\sigma_{33} = a_{31}\varepsilon_{rr} + a_{32}\varepsilon_{\varphi\varphi} + a_{33}\varepsilon_{33}\ ;\\
&\sigma_{r\varphi} = \langle G\rangle\varepsilon_{r\varphi};\\
&\sigma_{\varphi 3} = \langle G\rangle\varepsilon_{\varphi 3};\\
&\sigma_{r3} = (a_{11} - a_{13})\varepsilon_{r3}/2;
\end{aligned} \tag{19}$$

Связь между деформациями и перемещениями будет:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = (\partial u_\varphi/\partial\varphi) / r - u_r/r;\\
&\varepsilon_{33} = \partial u_3/\partial x_3; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \partial u_\varphi/\partial r + (\partial u_2/\partial\varphi - u_\varphi)/r;\\
&\varepsilon_{r3} = \partial u_3/\partial r + \partial u_r/\partial x_3; \quad \varepsilon_{\varphi 3} = \partial u_3/3\partial\varphi + \partial u_\varphi/\partial x_3;
\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma_{rr}/\partial r + \partial\sigma_{r\varphi}/r\partial\varphi + \partial\sigma_{r3}/\partial x_3 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/3r = 0\\
&\partial\sigma_{r\varphi}/\partial r + \partial\sigma_{\varphi\varphi}/r\partial\varphi + \partial\sigma_{\varphi 3}/\partial x + 2\sigma_{r\varphi}/r = 0\\
&\partial\sigma_{r3}/\partial r + \partial\sigma_{\varphi 3}/r\partial\varphi + \partial\sigma_{33}/\partial x_3 + \sigma_{r3}/r = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (21) с учётом (19) и (20) можно записать относительно перемещений u_2, u_3

$$\begin{aligned}
&[a_{11}R - a_{22}/r^2 + (a_{11} - a_{13} - 2P)\partial^2/2\partial x^2{}_3]u_2 + [(a_{11} + a_{13})\partial^2/2\partial r\partial x_3 + (a_{13} - a_{12})\partial/r\partial x_3]\, u_3 = 0\\
&[(a_{11}+a_{13})\partial^2/2\partial r\partial x_3 + (a_{11}-a_{13}+2a_{12})\partial^2/2r\partial x_3]u_3 + [(a_{11}-a_{13})R/2 + a_{11}\partial^2/\partial x^2{}_3]u_3 = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Решение системы (22) построим с помощью интегралов Ханкеля [4,5]

$$u_r = \int_0^\infty u^t{}_r\, (x_3,h)I_0(r,h)hdh$$

$$u_3 - \int_0^\infty u^t{}_3(x_3,h)I_0(r,h)hdh$$

здесь $u^t{}_r$, $u^t{}_3$ – трансформанты Ханкеля, I_0 – функция Бесселя, h - параметр.

Используя методику работ[4] можно составить дифференциальные уравнения относительно трансформант

$$\square$$
$$0{,}5a_{11}u^{\,t}{}_3 + 0{,}5(2a_{11} - a_{33})hu^t{}_3 + a_{11}h^2u^{\,t}{}_r = 0;$$
$$\square$$
$$u^t{}_r \ + \ hu^t{}_r = 0\ ,$$

решение которых запишем в виде

$$u^t_3 = -fCe^{-fhx_3} + [1/a_{11} – 0{,}5(1/a_{33} - 1/a_{11})]a_{33}e^{-fhx_3} ;$$

$$u^t_3 = Ce^{- fhx_3} + Le^{- fhx_3} ; \quad L = -[1/fa_{11} - 0{,}5(1/fa_{33} - 1/fa_{11})]a_{33};$$

Условия равновесия индентора можно записать в виде

$$P = 2\pi\int_0^a \sigma(\rho)\rho d\rho$$

где $\sigma(\rho)$ - контактное давление, ρ - радиус области контакта. Следуя работе [4] можно записать выражение для определения контактных напряжений

$$\int_0^a \sigma(\rho)K[r\sqrt{r\rho}\ /(r+\rho)]\rho d\rho/(r+\rho) = \pi(\Delta-Q(r))\{[4a_{11}a_{33} - A^1][a_{11}a_{33} - A^1]\}^{1/2}/2a_{33}; \quad (23)$$

здесь Q(r) - функция описывающая поверхность штампа, Δ - смещение штампа, К – есть полный эллиптический интеграл первого рода, $A^1=a^2_{11} - a_{11}a_{33}$;

Выражение в фигурных скобках влияет на несущую способность почвы, так как определяет её прочностные характеристики, которые зависят от параметров упругости, пластичности, вязкости и предварительного напряжённого состояния.

Если положить, что $Q(r)=r^2/R$ (R – радиус сферического штампа) , то из (23) с учётом (22) известными методами [4] можно получить радиус области контакта

$$a = (3RP'a_{33})^{1/3}/\{[4a_{11}a_{33} - A^1][a_{11}a_{33} - A^1]\}^{1/6} \quad (24)$$

Таким образом, область контакта будет зависеть от вида неоднородности (функции g), дисперсии D^2, средних параметров свойств почвы $\langle G\rangle,\langle k\rangle,\langle c\rangle,\langle\eta\rangle$ и предварительного напряжённого состояния, а также от геометрических размеров штампа и давления .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 276 с.
2. Спорыхин А.Н., Чигарев Ю.В. Прикладная механика. – 1977. – Т.13, N3. – с. 24-32.
3. Чигарев А.В. Стохастическая нерегулярная динамика неоднородных сред. – Мн., 2000. – 425 с.
4. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 174 с.
5. Чигарев Ю.В. О контактном взаимодействии с предварительно напряженной упруговязкопластической средой. // Весци АН Беларуси сер. физ.-техн. н. – 1993. – №3. – С. 30-35.