

## АЛГОРИТМЫ АНИМАЦИИ КОЛЕБАНИЙ В ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ ПО ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МАШИН

Астахов Э.И., Кудин В.В., Черняк М.М.

*The mathematical algorithm is adduced for calculating fluctuation in vibration exciter and for the object of vibration protection during line vibrainsulation for further computer animation of fluctuations on the computer display.*

Ранее в работах [1,2] показана общая методика подготовки и реализации лабораторной работы по виброизоляции машины при силовом вибровозмущении источника (машины) и гармоническом вибровозмущении. В данной работе приведены особенности алгоритмов расчета колебаний как источника вибровозмущения (фундамента), так и защищаемого объекта (машины) при кинематическом вибровозмущении фундамента, а также для более общего случая периодического (полигармонического) вибровозмущения. Приведенные алгоритмы заложены в компьютерную технологию лабораторной работы по виброизоляции машин с анимацией колебаний источника и защищаемого объекта.

Виброзащита машин – это совокупность методов и средств уменьшения вибраций машин от внешних или внутренних источников вибровозмущения. Одним из распространённых методов виброзащиты является виброизоляция, которая заключается в том, что между защищаемым объектом 1 и источником вибровозмущения 2 устанавливается упругий элемент – виброизолятор 3 (рис. 1).

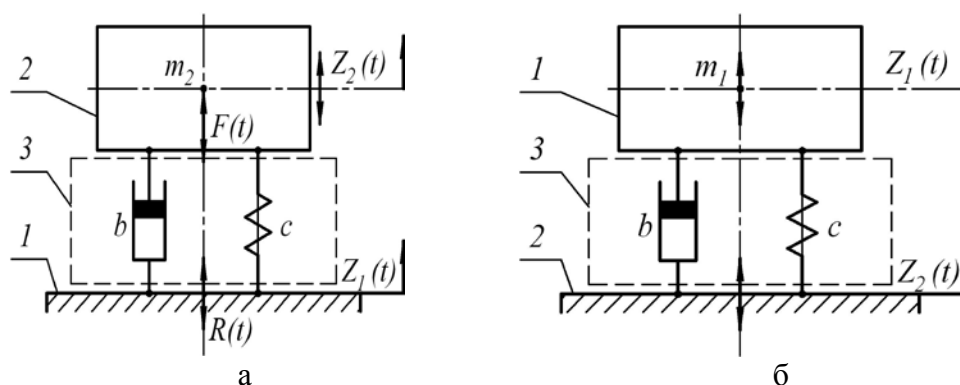


Рис.1.

Различают две схемы виброизоляции: а) с динамическим или силовым вибровозмущением (рис.1,а), когда источник вибровозмущения 2 создаёт переменную силу  $F(t)$ , передаваемую через виброизолятор 3 на защищаемый объект 1; б) с кинематическим вибровозмущением (рис.1, б), когда вибросмещение  $Z_2(t)$  источника 2 через виброизолятор 3 передаётся на защищаемый объект 1.

Параметры виброизолятора, как любого упругого звена, определяются по его динамической характеристике  $R_z(z, \dot{z})$ , представляющей зависимость силы реакции  $R_z$  виброизолятора от его деформации  $z$  и скорости  $\dot{z}$  деформирования. В общем случае динамические характеристики  $R_z(z, \dot{z})$ , виброизоляторов являются нелинейными функциями. Однако при анализе малых колебаний виброизолируемого объекта вблизи положения равновесия можно произвести линеаризацию динамической характеристики виброизолятора и ограничиться линейной зависимостью реакции  $R_z$  виброизолятора от перемещения  $z$  и скорости  $\dot{z}$ :

$$R_z = c_z z + b_z \dot{z}. \quad (1)$$

Виброизолятор с линейной характеристикой (1) называется линейным, параметры которого (коэффициент жёсткости  $c_z$  и коэффициент сопротивления  $b_z$ ) являются постоянными.

При кинематическом вибровозмущении (рис.1,б) дифференциальное уравнение движения защищаемого объекта 1 с учётом возмущающего движения  $Z_2(t)$  источника 2 имеет вид:

$$m\ddot{z} + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c(z_1 - z_2) = 0. \quad (2)$$

В случае гармонического виброперемещения источника 2

$$Z_2(t) = A_2 \cos(pt), \quad \ddot{Z}_2(t) = -A_2 p^2 \cos(pt - \pi),$$

с известными амплитудой  $A_2$  и угловой частотой  $p$  виброперемещение  $Z_1(t)$  объекта 1 будет также гармоническим с той же угловой частотой  $p$ , но с другой амплитудой  $A_1$  и угловым сдвигом фазы  $\varphi$ :

$$Z_1(t) = A_1 \cos(pt - \varphi), \quad \ddot{Z}_1(t) = -A_1 p^2 \cos(pt - \varphi - \pi).$$

После подстановки выражений  $Z_2(t)$ ,  $Z_1(t)$  и их производных в уравнение (2), определяется амплитуда  $A_1$  колебаний объекта:

$$A_1 = A_2 \sqrt{\frac{c^2 + b^2 p^2}{(c - mp^2)^2 + b^2 p^2}}.$$

Коэффициент виброизоляции  $w$  в случае кинематического вибровозмущения равен отношению амплитуды ускорения  $\ddot{Z}_{1\max}$  объекта к амплитуде ускорения  $\ddot{Z}_{2\max}$  источника (или же отношению амплитуд  $A$  виброперемещений):

$$w = \frac{\ddot{Z}_{1\max}}{\ddot{Z}_{2\max}} = \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{1 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2}}. \quad (3)$$

где  $k$  – угловая частота свободных колебаний объекта 1 без учёта демпфирования,

$$k = \sqrt{c/m};$$

$n$  – коэффициент демпфирования (или коэффициент затухания):

$$2n = b/m, \quad n = b/2m.$$

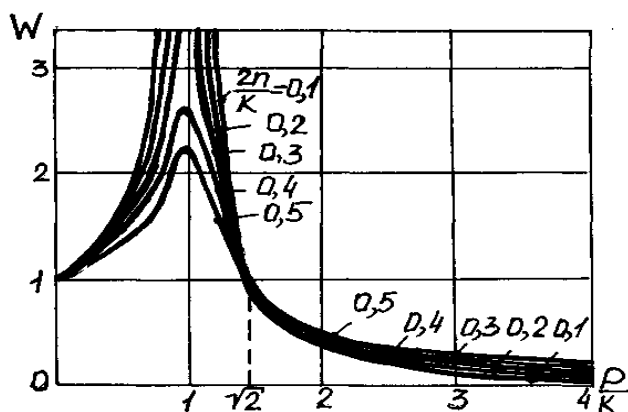


Рис. 2.

Как следует из (3) величина коэффициента виброизоляции  $w$  зависит от отношения частот  $(p/k)$  вынужденных и собственных колебаний и от демпфирования виброизолятора, оцениваемого отношением  $(2n/k)$ .

На (рис. 2) показаны кривые зависимости коэффициента  $w$ , рассчитанного по (3), от отношения частот  $(p/k)$  при различных  $(2n/k)$ . Как видно из (рис. 2) виброизоляция эффективна, когда  $(p/k) > 1,407$ , т.е. когда частота  $p$  вынужденных колебаний больше частоты  $k$  собственных колебаний более чем в

1,407 раза. При  $p/k < 1$  виброизоляция наоборот увеличивает колебания объекта, т.к.  $w > 1$ . Особое увеличение  $w \rightarrow \infty$  происходит при  $p = k$ , т.е. при резонансе, который нужно обязательно устранить на стадии расчёта виброизоляции. Демпфирование виброизолятора, оцени-

ваемое отношением  $(2n/k)$ , уменьшает коэффициент  $w$  на низких частотах вибровозбуждения ( $p/k \leq 1,407$ ) и немного увеличивает  $w$  на высоких частотах  $p$  ( $p/k > 1,407$ ). Для получения низких собственных частот  $k$  и уменьшения  $\gamma$  нужен малый коэффициент жёсткости  $c$  виброизолятора, т.е. виброизолятор должен быть сравнительно мягким, податливым.

Возникающие при работе машин вибрационные кинематические вибровозмущения  $Z_2(t)$  обычно бывают не гармоническими, а периодическими. Разложив периодическую функцию  $Z_2(t) = Z_2(t+T)$  с периодом  $T$  в ряд Фурье, дифференциальное уравнение движения объекта при полигармоническом вибровозмущении запишется так:

$$m\ddot{Z}_1 + b \left( \dot{Z}_1 - \left( \sum_{j=1}^S (a_j \sin(jpt) + b_j \cos(jpt)) \right) \right) + c \left( Z_1 - \left( \sum_{j=1}^S (a_j \cos(jpt) + b_j \sin(jpt)) \right) \right) = 0, \quad (4)$$

где  $j$  – номер гармоники ряда Фурье,  $j = 1, 2, \dots, S$ ;  
 $p$  – основная частота полигармонического возмущения;  
 $a_j, b_j$  – коэффициенты ряда Фурье функции  $Z_2(t)$ :

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T Z_2(t) \cos(jpt) dt; \quad b_j = \frac{2}{T} \int_0^T Z_2(t) \sin(jpt) dt;$$

$$a_0 = Z_0 = \frac{1}{T} \int_0^T Z_2(t) dt \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z_2(t).$$

В соответствии с принципом суперпозиции (независимости) установившаяся реакция системы (после затухания собственных колебаний) на периодическое возмущение  $F(t)$  или  $Z_2(t)$  есть сумма реакций на периодическое возмущение. Поэтому решение уравнения (4) запишется так:

$$Z_1(t) = Z_1^*(t) + Z_1^{**}(t) \approx Z_1^{**}(t) = Z_0 + \sum_{j=1}^S A_{b_j} \sin(jpt - \varphi_j),$$

где  $A_{b_j}$  – амплитуда вынужденных колебаний  $j$ -ой гармоники на частоте  $P_j = jp$ ,

$$A_{b_j} = A_{2j} \sqrt{\frac{c^2 + b_j^2 (jp)^2}{(c^2 - m(jp)^2)^2 + b_j^2 (jp)^2}};$$

$\varphi_j$  – фазовый угол сдвига  $j$ -ой гармоники колебаний  $Z_1$  к  $j$ -ой гармонике источника вибровозбуждения  $Z_2$ ,  $\varphi_j = \arctg \left( \frac{2np_j}{k^2 - p_j^2} \right)$ .

Оценка эффективности виброизоляции при полигармоническом возмущении производится расчётом ряда значений коэффициентов виброизоляции  $w_j$  на каждой частоте  $p_j$  отдельной  $j$ -ой гармоники:

$$w_j = \sqrt{1 + 4 \frac{n^2 p_j^2}{k^4}} / \sqrt{\left(1 - \frac{p_j^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p_j^2}{k^4}}. \quad (5)$$

Как видно из (5) и (рис.2) большее значение  $w_j$  будет на 1-ой низшей гармонике  $p_1 = p$ , т.к. при  $p_j > p$  соответственно  $w_j < w_1$ .

В качестве параметров демпфирования виброизоляторов иногда приводится логарифмический коэффициент затухания, используя который рассчитывает другие параметры демпфирования  $\delta = \ln(A_{j+1}/A_j)$ :

- коэффициент рассеивания  $\psi = 1 - c^{-2\delta}$ ; - коэффициент сопротивления  $b_j = c\psi/2\pi p_j$ , - относительный коэффициент демпфирования  $n_j = b_j/2m$ .

В реальных системах виброизоляции отдельные виброизоляторы со своими параметрами  $c_j, b_j$  соединяют последовательно и параллельно. Тогда в расчётах используют приведённый коэффициент жёсткости  $c_{\Pi}$  и приведённый коэффициент сопротивления  $b_{\Pi}$ , которые

определяются так: при параллельном соединении  $c_{\Pi} = \sum_{i=1}^N c_i, b_{\Pi} = \sum_{i=1}^N b_i$ ; где  $N$ -число вибро-

изоляторов ;

- при последовательном соединении  $\frac{1}{c_{\Pi}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}, b_{\Pi} = c_{\Pi}^2 \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{c_i^2}$ .

Если все виброизоляторы одинаковы, т.е.  $c_j = c, b_j = b$ , то

- при параллельном соединении

$$c_{\Pi} = Nc, b_{\Pi} = Nb; \quad (6)$$

- при последовательном соединении  $c_{\Pi} = c/N, b_{\Pi} = b/N$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов Э.И. Новая лабораторная работа по расчету виброизоляции машин. Материалы междунар. научно-техн.конфер. «Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономичных и экологически чистых технологий и прогрессивных методов обучения», посвященной 80-летию БГПА. В 10-ти частях. Ч.5.-Мн., БГПА, 2000.- С. 8.
2. Кудин В.В., Астахов Э.И. Стратегия информационного обеспечения лабораторных работ по механическим дисциплинам в техническом вузе. Материалы докладов междунар. научно-практич. конфер.» Стратегия развития высшего технического образования в республике Беларусь». 26 июня 2003 г.-Мн., УП»Технопринт», 2003.-С. 83-84.