Белорусский государственный университет, Минск

РЕАЛИЗАЦИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA* ДЛЯ ОПИСАНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД И ФОРМУЛИРОВКИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Босяков С.М., Журавков М.А., Гаркун А.С.

The functions of the user intended for formation of matrixes of constants of elasticity, generating of elastic potentials, dependences between components of tensor of stresses and components tensor of deformations, and also systems of the differential equations for anisotropic environments of various classes of symmetry are described.

Современные системы компьютерной математики, в частности система *Mathematica*, предназначены, в основном, для решения теоретических и прикладных задач без их программирования [1]. В то же время они позволяют программировать в случаях, когда имеющихся стандартных функций и пакетов расширения системы оказывается недостаточно. При этом эффективным оказывается реализация функционального метода программирования, который заключается в использовании в ходе решения задачи только функций. Преимуществом такого подхода является возможность применения широкого спектра встроенных функций и функций стандартных пакетов расширения при создании специализированных функций пользователя. В настоящей работе описаны функции, разработанные для получения сведений о константах, характеризующих упругие свойства анизотропных сред, упругих потенциалах, зависимостях компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций (законе Гука) и уравнениях движения упругих сред различных классов симметрии. Целесообразность создания таких функций обусловлена достаточно большим объемом подобного теоретического материала, который традиционно приводится в большинстве монографий и учебных пособий по теории упругости, в частности [2 - 4].

Изменение свободной энергии при изотермическом сжатии анизотропного тела определяется квадратичной функцией тензора деформаций, которую можно представить в следующем виде [3]:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \lambda_{iklm} e_{ik} e_{lm}, \tag{1}$$

где λ_{iklm} - константы упругости, e_{ik} - компоненты тензора деформаций.

Поскольку тензор деформаций симметричен, произведение $e_{ik}e_{lm}$ не меняется при перестановке индексов i с k, l с m или пары индексов i, k с парой l, m. Константы упругости обладают теми же свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов [3, 4]:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \tag{2}$$

Число различных констант упругости в этом случае составляет двадцать один. Наличие той или иной симметрии анизотропной среды приводит к появлению зависимостей между ними, так что число независимых констант оказывается меньшим, чем двадцать один. Так, упругие свойства анизотропных сред моноклинной системы характеризуются тринадцатью независимыми константами, ромбической системы (ортотропные среды) – девятью, тетрагональной и тригональной системы – шестью, гексагональной системы - пятью, кубической системы – тремя и изотропной среды двумя независимыми константами [2 - 4].

Для формирования матриц констант упругости разработана функция `ElasticConstants[λ,opts]`, которая формирует двумерный список (квадратную таблицу из шести строк и шести столбцов) элементов `λ[α,β]`, соответствующих константам λ_{ijkl} для различных классов симметрии. Переход от обозначений констант с четырьмя индексами к обозначениям с двумя индексами осуществляется следующим образом:

$$\begin{gathered}(11) \to 1, (22) \to 2, (33) \to 3, \\ (23) = (32) \to 4, (13) = (31) \to 5, (12) = (21) \to 6.\end{gathered} \qquad (3)$$

В качестве входных параметров `opts` могут использоваться опции `Symmetry`, `Notation` и `Rank`. Первая из них предназначена для указания класса симметрии анизотропной среды и по умолчанию имеет значение `Symmetry→General`, что соответствует матрице с двадцатью одной независимой константой упругости, характеризующей среды триклинной системы симметрии. Другими значениями опции `Symmetry` являются `Monoclin`, `Ortotropic`, `Trigonal`, `Tetragonal`, `Gexagonal`, `Cubic` и `Isotropic`. Приведем пример использования функции `ElasticConstants` для формирования списка независимых констант упругости ортотропной среды (рис. 1).

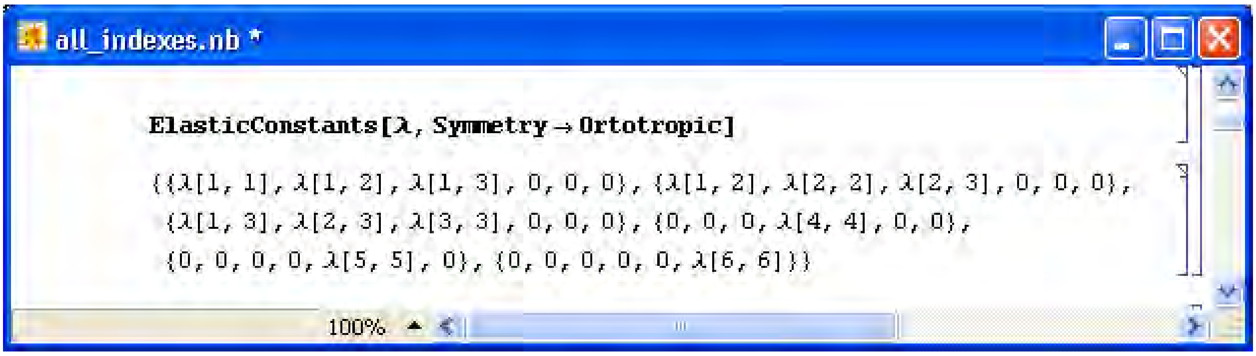

Рис. 1. Список констант упругости для ортотропной среды

Как следует из приведенного результата, по умолчанию принята функциональная форма представления элементов списка, когда индекс записывается в квадратных скобках. Перейти к индексированной форме позволяет опция `Notation→Indicial` (по умолчанию принято `Notation→Functional`). Особенность представления результата в индексированной форме иллюстрирует пример, представленный на рис. 2.

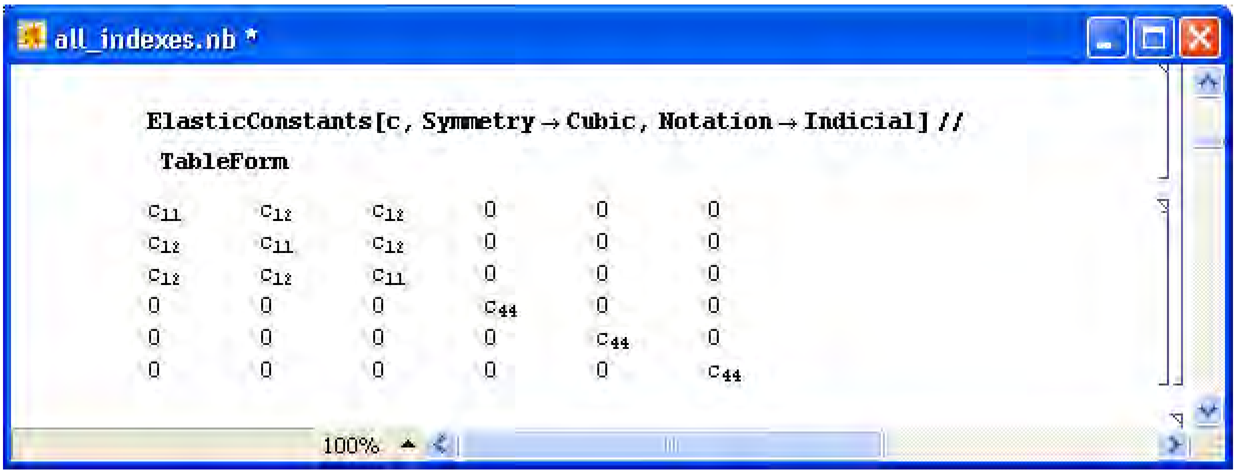

Рис. 2. Таблица констант упругости для кубически анизотропной среды в индексированной форме

Вернуться к записи постоянных упругости с использованием четырех индексов позволяет опция `Rank→4`, которая по умолчанию имеет значение `2`. Продемонстрируем применение опции `Rank` на примере формирования таблицы констант для анизотропной среды тетрагональной системы (рис. 3).

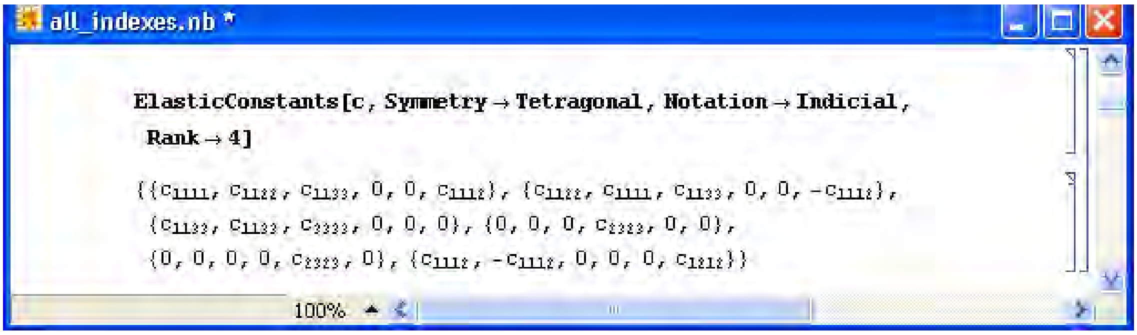

Рис. 3. Список постоянных упругости тетрагонально анизотропной среды, записанных с использованием четырех индексов

Аналогично организована работа функции `ElasticPotential[e,λ,opts]`, которая предназначена для формирования упругих потенциалов сред различных систем симметрии. В ее аргументе параметр `e` указывает на обозначение для компонент тензора деформаций, параметр λ - обозначение для констант упругости (опции `opts` и их назначение то же, что и для функции `ElasticConstants`). Формирование упругих потенциалов для кубически анизотропной, ортотропной и гексагонально анизотропной сред показано на рис. 4.

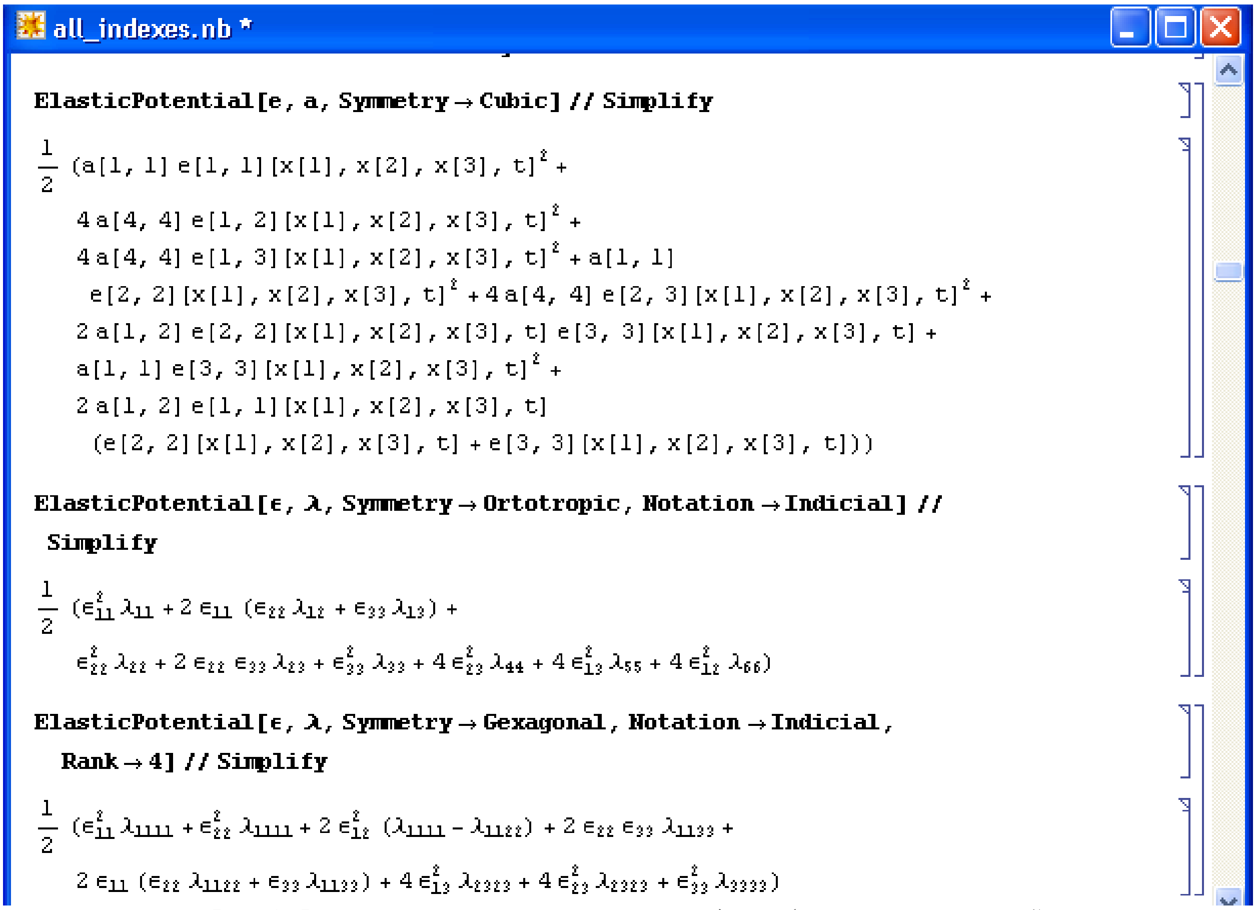

Рис. 4. Формирование упругих потенциалов для кубически анизотропной, ортотропной и гексагонально анизотропной сред

Из рис. 4 видно, что каждая из компонент тензора деформаций является функцией декартовых координат `x[1]`, `x[2]`, `x[3]` и времени `t`. Это позволяет использовать результаты функции `ElasticPotential` в различных преобразованиях, связанных с дифференцированием, интегрированием и т. д.

С помощью выражения для упругого потенциала можно сформулировать зависимости компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций (закон Гука) следующим образом [3]:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} = \sum_{l,m=1}^{3} \lambda_{iklm} e_{lm} = \sum_{l,m=1}^{3} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_l^2}, i, k = \overline{1,3}. \quad (4)$$

Для формирования формул закона Гука предназначена функция `HookeRules[σ,λ,opts]`, которая задает список шести подстановок для шести независимых компонент тензора напряжений σ_{ii}, σ_{12}, σ_{13} и σ_{23} ($i = \overline{1,3}$). Правая часть этих подстановок может быть записана либо через компоненты тензора деформаций, либо через частные производные от компонент вектора перемещений u_1, u_2, u_3 согласно формуле $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), i, j = \overline{1,3}$.

Для указания на способ представления компонент тензора напряжений определена опция `RulesMode`, которая может принимать значение `Strain` или `Displacement` (по умолчанию имеет значение `Strain`). Значение `Strain` указывает на использование при записи компонент тензора деформаций, значение `Displacement` – частных производных от компонент вектора перемещений. Список опций этой функции дополняют `Symmetry`, `Notation` и `Rank`. Использование опции `RulesMode` продемонстрировано на рис. 5.

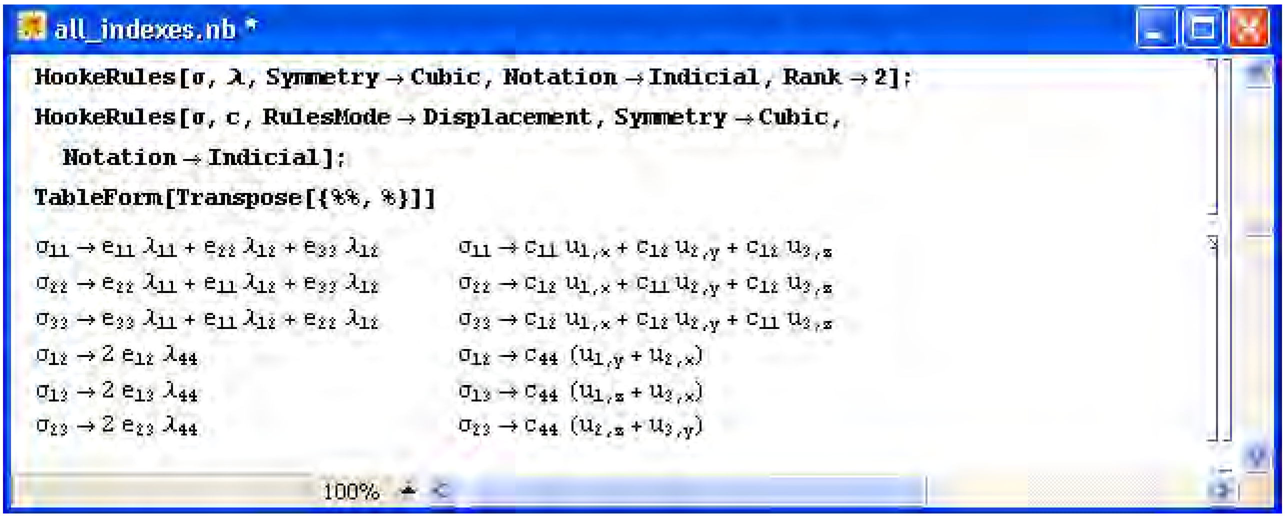

Рис. 5. Формирование списков подстановок для компонент тензора напряжений в случае кубически анизотропной среды

Заметим, что для обозначения частных производных использована запись $u_{i,k}$, что соответствует $\partial u_i / \partial x_k$, $k = \overline{1,3}$ ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$). При этом каждая из компонент тензора напряжений, деформаций и вектора перемещений является функцией координат `x[1]`, `x[2]`, `x[3]` и времени `t`. Покажем это на примере подстановки одной из компонент тензора напряжений в случае ортотропной среды (рис. 6).

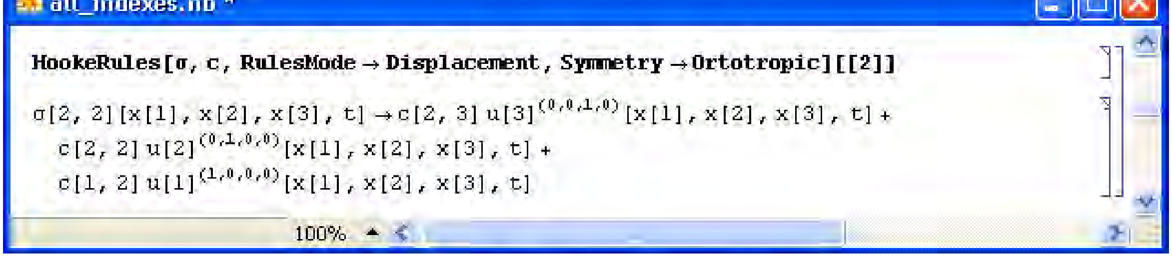

Рис. 6. Функциональное представление компоненты тензора напряжений для ортотропной среды

При использовании закона Гука в форме (4), дифференциальные уравнения движения трехмерной анизотропной среды с учетом массовых сил можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k,l,m=1}^{3} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\ i = \overline{1,3}, \qquad (5)$$

где ρ - плотность анизотропной среды.

Для генерирования системы уравнений (5) для анизотропных сред различных классов симметрии разработана функция `EquationsOfMovements[u,λ,ρ,f,opts]` (`u` - обозначение для компонент вектора перемещений, λ - обозначение для констант упругости, ρ - обозначение для плотности, `f` – обозначение для массовых сил). В качестве `opts` могут использоваться опции `Symmetry`, `Notation` и `Rank`. Применение функции `EquationsOfMovements` для формирования системы уравнений движения ортотропной упругой среды показано на рис. 7.

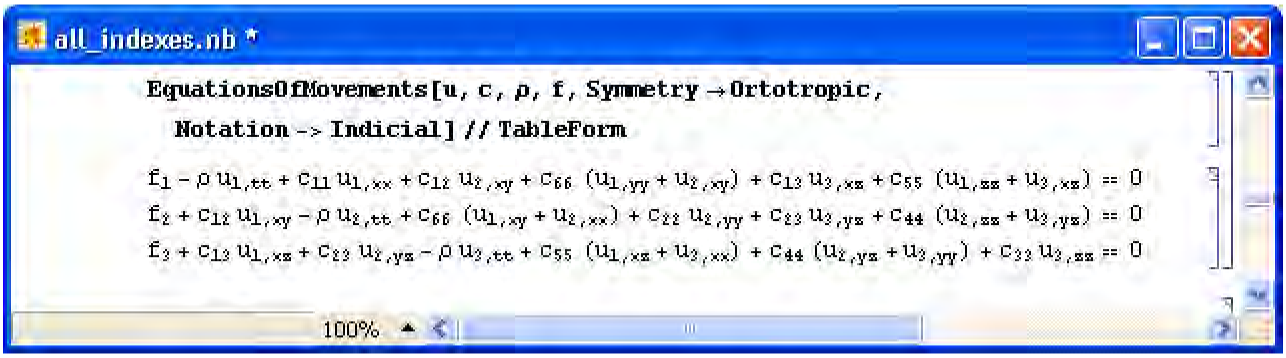

Рис. 7. Формирование системы уравнений движения ортотропной среды

Как и в случае функции `HookeRules`, каждая из компонент вектора перемещений, а также вектора массовых сил, является функцией переменных `x[1]`, `x[2]`, `x[3]` и `t`. Запись производных от компонент вектора перемещений осуществляется аналогично тому, как это показано на рис. 6. Такой подход позволяет использовать результаты функции `EquationsOfMovements` не только в качестве справочной системы по уравнениям движения анизотропных сред, но и при решении конкретных задач теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В. П. *Mathematica* 4: учебный курс. – СПб.: Питер, - 656 с.
2. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. – Москва: Мир, 1965. – 383 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. - М.: Наука. 1987. – 248 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 806 с.