

дисперсии. Результат оценки (3) в референтной схеме 0,56 мм/нм, в схеме с двумя призмами 0,82 мм/нм, в схеме с одной призмой перед решеткой 0,55 мм/нм, после решетки – 0,83 мм/нм. Теоретическая оценка щелевого предела разрешения согласно (1) для ширины входной щели 10 мкм в референтной схеме 0,038 нм, в схеме с двумя призмами 0,025 нм, с призмой перед решеткой 0,025 нм, после решетки – 0,038 нм. Коэффициент пропускания двух призм 0,73, угловое увеличение первой призмы 0,65, поэтому, согласно (6), использование призм целесообразно.

Результаты численного моделирования при числовой апертуре 0,01 и квадратном входном отверстии размером 10 мкм (минимальный уровень aberrаций) соответствуют теоретическим с точностью <4%. Таким образом, (3) согласуется с результатами теоретического расчета и может использоваться для оценки дисперсии системы с призмным расширением пучка. Расчетный предел разрешения (5) может отличаться от результата моделирования из-за наличия aberrаций. Моделирование показало, что при числовой апертуре 0,01 aberrационным вкладом можно

пренебречь. При числовой апертуре 0,1 он более существенный: для щелей шириной 10-20 мкм предел разрешения превышает теоретически рассчитанный в 1,5-2,5 раза. При увеличении ширины щели относительный вклад aberrационной составляющей предсказуемо уменьшается, так уже при щели 50-60 мкм отличие от (5) не превышает 10%. Этот результат относится к схеме с двумя призмами, с одной призмой aberrации могут быть выше из-за большего сечения пучка при падении на объективы.

1. Купреев А. Г. Применение призмных расширителей пучка для улучшения характеристик компактных спектрометров // Физика конденсированного состояния: тезисы докладов XV Респ. науч. конф., – Гродно: ГрГУ. – 2007. – Ч. 1. – С. 78–82.
2. Тарасов К.И. Спектральные приборы. – Л.: Машиностроение, 1968. – 388 с.
Hanna D.C, Karkkainen P.A., Wyatt R.A simple beam expander for frequency narrowing of dye lasers // Opt. and Quantum Electronics. – Vol. 7. –1975. P. 115-119.

УДК 519.210

АНТИМАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Гундина М.А., Мамчиц В.В.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Долгое время в науке не было практической необходимости применения теории магических и антимагических квадратов для решения естественнонаучных и технических задач. Некоторое время эта тема не получала должного внимания. Только в XX в. интерес к магическим и антимагическим квадратам вспыхнул с новой силой. Они стали исследоваться с помощью более сложного математического аппарата.

Особое место в теории антимагических квадратов занимает разработка методов построения. В эпоху компьютеризации появилась возможность составления программ, обеспечивающих построение антимагических квадратов достаточно высокого порядка.

Основные сведения из теории антимагических квадратов. *Магическим квадратом n -го порядка* называется квадратная таблица размером $n \times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n^2 , суммы которых по всем строкам, столбцам и обеим диагоналям одинаковы [1]. Антимагическим квадратом индекса n называется такая матрица размерности $n \times n$, что суммы элементов любой строки, столбца, диагонали различны.

Рассмотрим множество квадратов, получен-

ных из одного набора чисел (рисунок 1).

Можно заметить, что суммы у всех квадратов по столбцам, диагоналям и строкам – разные.

Построение антимагических квадратов.

Пусть R_i (и C_i) – матрицы размера $n \times n$ с единицами в i -ой строке (i -ом столбце) и нулевыми остальными элементами. Заметим, что антимагический квадрат размера $n \times n$ обязательно имеет вид [2]:

$$M = \sum_{i=1}^n a_i R_i + \sum_{j=1}^n b_j C_j, \text{ где } a_i, b_j \in N.$$

1	2	3	1	2	9	1	3	5
8	9	4	4	3	7	8	2	6
7	6	5	6	8	5	4	9	7

Рисунок 1 – Антимагические квадраты третьего порядка

Пусть M – антимагический квадрат. Перестановки строк и столбцов оставляют его антимаги-

ческим, и поэтому можно считать, что m_{11} – наименьший элемент M . Положим $a_i = m_{i1} - m_{11}$, $b_j = m_{1j}$. Из определения магического квадрата $m_{ij} = m_{i1} + m_{1j} - m_{11} = a_i + b_j$.

Чтобы получить антимагический квадрат M индекса n , подберем числа a_i и b_j , введенные ранее, таким образом, чтобы сумма всех a_i и b_j равна была n . Это можно сделать C_{2d-1}^{2d+n-1} способами. Поскольку единственные соотношения, которым удовлетворяют матрицы R , C – это скалярные кратные тождества $\sum R_i = \sum C_i$, то получим каждую матрицу M по одному разу, если вычтем из числа C_{2d-1}^{2d+n-1} число решений уравнения

$$\sum a_i + \sum b_j = n,$$

где $a_i, b_j \in N$. Отсюда вытекает, что искомым ответ – это число $C_{2d-1}^{2d+n-1} - C_{2d-1}^{d+n-1}$.

Рассмотрим один из алгоритмов построения антимагических квадратов.

Первый шаг алгоритма: Считаем количество элементов, содержащихся в антимагическом квадрате заданной размерности:

Шаг 1: $m \leftarrow n(n+1)/2$.

Шаг 2: Repeat for $i \leftarrow 1$ to m do $S[i] \leftarrow i$. Определяем вектор S , заполняя его последовательно числами от 1 до m .

Шаг 3: Repeat for $i \leftarrow 1$ to n do Repeat for $j \leftarrow 1$ to n do $M_{i,j} \leftarrow 0$. Создаем нулевую матрицу размерности $n \times n$.

Шаг 4: $k \leftarrow 1$; Repeat for $i \leftarrow 1$ to n do Repeat for $i \leftarrow 1$ do if $M_{i,j} = 0 \& M_{j,i} = 0$ then $M_{i,j} \leftarrow S[k]$;

$M_{j,i} \leftarrow S[k]$; $k \leftarrow k+1$. Симметрично диагоналям начинаем заполнять матрицу, проходя по вектору S , перенося последовательно элементы вектора в матрицу. Переменная k выполняет роль счетчика и позволяет перемещаться от элемента к элементу в матрице.

Для построения алгоритма использовалась система *Mathematica*.

Приведем код алгоритма:

```
antmsq[n_]:=Module[{m,S,k,M,i,j},m=n(n+1)/2;S=Table[I,{I,1,m}]; M=Table[0,{i,1,m},{j,1,n}];k=1;For[i=1,i<=n,i++,For[j=1,j<=n,j++,If[k<=m&&M[[I,j]]==0&&M[[j,i]]==0,M[[I,j]]=S[[k]];M[[j,i]]=S[[k]];k=k+1]];k=1;Return[M]]
```

Построенный антимагический квадрат обладает свойством симметрии.

Основные преобразования антимагических квадратов. Тема преобразований антимагических квадратов занимает одно из центральных мест в теории квадратов наравне с темой о методах их построения.

В теории выделяются следующие основные преобразования, они применимы ко всем антимагическим квадратам (любого порядка и любого вида). Основными преобразованиями называют повороты и отражения. Имеются в виду повороты квадрата вокруг центра на 90, 180 и 270 градусов и отражения относительно осей симметрии квадрата – горизонтальной и вертикальной.

Основные преобразования антимагического квадрата сохраняют его основное свойство.

Заметим, что в случае поворота на 180 градусов направление поворота (по часовой стрелке или против часовой стрелки) не имеет значения.

Антимагические квадраты, получающиеся друг из друга одним из основных преобразований либо комбинацией нескольких основных преобразований, называются эквивалентными, а сами основные преобразования относятся к группе эквивалентных преобразований.

Введем в рассмотрение функцию, реализующую поворот против часовой стрелки на 90 градусов.

```
f90pr:=Module[{M1,M},M=S;M1=Table[0,{I,1,Dimensions[M][[1]]},{j,1,Dimensions[M][[1]]}];For[i=1,i<=Dimensions[M][[1]],i++,For[j=1,j<=Dimensions[M][[1]],j++,M1[[Dimensions[M][[1]]-j+1,i]]=M[[I,j]]];Return[M1]]
```

Программный код поворота на 180 градусов антимагического квадрата:

```
f180[S_]:=Module[{M1,M},M=S; M1=Table[0,{I,1,Dimensions[M][[1]]},{j,1,Dimensions[M][[1]]}];For[i=1,i<=Dimensions[M][[1]],i++,For[j=1,j<=Dimensions[M][[1]],j++,M1[[Dimensions[M][[1]]-i+1,Dimensions[M][[1]]-j+1]]=M[[i,j]]];Return[M1]]
```

Поворот антимагического квадрата вокруг центра на 90 градусов по часовой стрелке:

```
f90po[S_]:=Module[{n,M1,M},M=S; n=Dimensions[M][[1]]; M1=Table[0,{I,1,Dimensions[M][[1]]},{j,1,Dimensions[M][[1]]}];For[i=1,i<=Dimensions[M][[1]],i++,For[j=1,j<=Dimensions[M][[1]],j++, M1[[j,n-i+1]]=M[[i,j]];Return[M1]]
```

В теории выделяется еще один тип преобразования – торическое преобразование, или преобразование параллельного переноса на торе. Преобразование параллельного переноса на торе по одной оси легко представить так: сворачивается модель антимагического квадрата в трубочку, склеиваются его края, например, левый и правый. Затем разрезается трубочка по вертикали в другом месте (не там, где склеены края) и квадрат разворачивается. В результате получается новый антимагический квадрат. Если склеить нижний и верхний края квадрата и разрезать трубочку по горизонтали, то получится параллельный перенос по другой оси. Можно выполнить параллельный перенос одновременно по обеим осям.

Также торические преобразования можно представить на плоскости. Такая плоскость получится, если расположить на плоскости бесконечное количество копий одного и того же квадрата.

Плоскость можно продолжать бесконечно во всех направлениях: вверх, вниз, влево, вправо. В антимагической плоскости, фиксируя любой квадрат порядка n , получаем антимагический квадрат.

Заметим, что для построения антимагической плоскости достаточно иметь матрицу размерности $2n-1 \times 2n-1$, если брать размерность больше, то, антимагические квадраты будут повторяться. Организовав циклы, заполняем этот квадрат, копиями антимагического квадрата.

Одной из возможностей применения антимагических квадратов может быть построение фильтров для обработки промышленных изображений.

Выводы. Были рассмотрены алгоритм построения антимагических квадратов и возможности их применения. Даны необходимые определения теории антимагических квадратов.

Описаны основной алгоритм создания антимагических матриц и их преобразования (поворот, зеркальное отображение, торические преобразования).

1. Чебраков Ю. В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ. – СПб. – 1995.
2. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир. – 1990. – 440 с.

УДК 666.655

ВЫСОКОЭФФЕКТИВНЫЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ

Дедович Н. Н., Лисименко И. Ф., Романов А. Ф.

*Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко БГУ
Минск, Республика Беларусь*

В последние два десятилетия ультразвуковые медицинские инструменты получили большое распространение при лечении различных заболеваний. Однако, несмотря на множество приложений ультразвука в медицине аппаратная часть не сильно изменилась за последних 50 лет. В настоящее время ультразвуковые медицинские системы в большинстве случаев используют громоздкие генераторы и радиочастотные усилительные системы, работающие при высоких напряжениях питания. Особенно это касается систем, позволяющих получить большую акустическую мощность (более 50 Вт) на выходе ультразвукового преобразователя (излучателя). В связи с этим, актуальной задачей является разработка высокоэффективного портативного ультразвукового излучателя, работающего от перезаряжаемого аккумулятора.

Общеизвестные доступные генераторы и выходные усилители обычно имеют выходной импеданс равный 50 Ом. Если ультразвуковой преобразователь имеет активный импеданс 10 Ом, то только 17% энергии от источника питания будет преобразовано в акустическую энер-

гию, а остальная энергия будет отражаться или теряться в виде тепла. С помощью специальных схем согласования выходного усилителя с входным импедансом ультразвукового преобразователя можно, в принципе, почти половину мощности источника питания преобразовать в выходную мощность ультразвукового сигнала при этом существенно изъять отражения от преобразователя. Однако, при этом существенно усложняется оборудование и увеличивается его размеры и вес. Поэтому разработка портативных ультразвуковых систем для медицинских приложений является актуальной задачей [1].

Эффективность ультразвуковых излучателей можно существенно увеличить путем снижения выходного импеданса усилителя (менее 0,3 Ом), что позволяет передать более 95% энергии от источника питания до преобразователя. Для этого используются сборки комплементарных MOSFET полевых транзисторов типа IRF7350 имеющих крайне низкое выходное сопротивление (n-канал 0,21 Ом, p-канал 0,48 Ом), работающих параллельно под управлением драйвера