2498

Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономика и организация энергетики»

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Экономико-математические методы

и модели в энергетике»

Минск 2003

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономика и организация энергетики»

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине «Экономико-математические методы и модели в энергетике» для студентов специальности 1 – 27 01 01 «Экономика и организация производства» специализации 1 – 27 01 01 – 10 «Экономика и организация производства (энергетика)»

Минск 2003

УДК 620.9: 658.012.122 (076.5)
~~ББК 31 я7~~ Л12
~~К 36~~

В издании содержатся две лабораторные работы по курсу «Экономико – математические методы и модели в энергетике».

Целью проведения данных лабораторных работ является закрепление у студентов теоретических знаний по изучаемой дисциплине, освоение и практическое использование методов экономико-математического моделирования для проведения энергоэкономических расчётов, что может быть полезным при выполнении курсовых работ и дипломных проектов.

Составители:
В.П. Керного, В.Н. Нагорнов

Рецензент А.Д.Молокович

Лабораторная работа № 1

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель лабораторной работы – изучение экономической постановки и математического решения транспортной задачи с закрытой и открытой моделью по критерию стоимости и критерию времени.

При планировании перевозок однородных грузов от поставщиков к потребителям, что широко используется в энергетике, возникают вопросы наиболее рациональной их организации. В одних случаях требуется найти такой план перевозок, при котором стоимость последних была бы минимальной. В других – более важным является выигрыш времени, т.е. доставка продукции в самое короткое время.

Первая задача получила название транспортной задачи по критерию стоимости, а вторая – транспортной задачи по критерию времени.

Постановка и решение транспортной задачи по критерию стоимости

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_m$ количество единиц однородного груза (ресурсы), которые располагаются в m пунктах отправления ($A_1, A_2, \ldots, A_m$). Их необходимо доставить n потребителям ($B_1, B_2, \ldots, B_n$) в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц. Известны транспортные издержки c_{ij} перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Требуется составить план перевозок, т.е. найти x_{ij} – количество единиц груза, которое планируется отправить из i-го в j-й пункт назначения, чтобы полностью удовлетворить потребности и чтобы суммарные издержки на перевозки были минимальными. Условие транспортной задачи представлено в распределительной таблице (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Распределительная таблица.

Поставщики	Потребители			Запасы груза
	B_1	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности грузов	b_1	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Матрица тарифов $C = [c_{ij}]_{m \cdot n}$.

Матрица перевозок $X = [x_{ij}]_{m \cdot n}$.

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок:

$$F_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{1.1}$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам, по потребителям и условиям неотрицательности.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = 1,...,m\right), a_i \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(j = 1,...,n\right), b_j \geq 0; \tag{1.2}$$

$$x_{ij} >= 0 \left(i = 1,...,m; j = 1,...,n\right).$$

Математически транспортная задача формулируется следующим образом: требуется среди множества решений системы (1.2) найти такое, которое минимизирует целевую функцию F_{min}.

Система ограничений задачи (1.2) содержит m + n уравнений с m · n переменными. Каждый опорный (базисный) план должен содержать m + n – 1 занятых клеток, а остальные незанятые, где свободные переменные равны нулю. Кроме того, опорные планы должны удовлетворять правилу замкнутых циклов, которое гласит, что в опорном плане для каждой свободной клетки можно построить только один цикл, содержащий данную клетку и некоторую часть занятых клеток.

Различают два типа задач: с закрытой и открытой моделью.

Для закрытых – суммарный объём груза поставщиков равен сумме спроса потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{1.3}$$

Для открытых могут иметь место два случая:

$$\text{а)} \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ;$$

$$\text{б)} \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{1.4}$$

Решать можно только задачи с закрытой моделью. Однако открытую модель всегда можно преобразовать в закрытую. Так, для неравенства а) (1.4) вводится фиктивный B (n + 1) пункт назначения. Для этого в распределительную таблицу добавляется дополнительный столбец, для которого потрёбность равна:

$$b\,(n+1) = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{1.5}$$

Все тарифы на доставку груза в этот пункт нужно считать равными нулю.

Таким образом, открытая модель задачи преобразуется в закрытую. Аналогичным образом необходимо действовать в случае б) (1.4).

Транспортная задача, как и другие задачи линейного программирования, решается в два этапа. На первом этапе необходимо найти исходный опорный план, а затем (второй этап) производится последовательно его улучшение до получения оптимального плана.

На первом этапе для распределения ресурсов можно использовать правило «северо – западного угла» (здесь не учитываются тарифы и план далёк от оптимального) или правило «минимального элемента», при котором необходимо осуществлять максимальные поставки ресурсов в клетки с минимальными тарифами.

На втором этапе можно применить распределительный метод или метод потенциалов, у которых критерием оптимальности являются оценки S_{ij}:

$$S_{ij} \geq 0. \tag{1.6}$$

Ниже приведён численный пример решения транспортной задачи с открытой моделью.

Таблица 1.2

Исходные данные численного примера

	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	2	3	188
A_2	1	7	5	150
A_3	3	10	8	50
	75	102	123	388/300

Дальше производится приведение к задаче с закрытой моделью путём введения $B_ф$ – фиктивного потребителя с нулевыми тарифами.

На первом этапе применено правило «минимального элемента».

Таблица 1.3

Преобразованная таблица

	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	
A_1	6	2 102	3 86	0	188
A_2	1 75	7	5 37	0 38	150
A_3	3	10	8	0 50	50
	75	102	123	88	388

Число занятых клеток $k = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Получены следующие оценки с помощью распределительного метода:

$S_{11} = 6 - 3 + 5 - 1 = 7$; $S_{14} = 0 - 0 + 5 - 3 = 2$;

$S_{22} = 7 - 2 + 3 - 5 = 3$; $S_{31} = 3-1 + 0 - 0 = 2$;

$S_{32} = 10 - 2 + 3 - 5 + 0 - 0 = 6$. В табл. 1.3 содержится оптимальное решение, т.к. все $S_{ij} > 0$.

Результаты решения задачи можно изобразить графически.

$U_{12} = 102 \cdot 2 = 204$ у.е.

$U_{13} = 86 \cdot 3 = 258$ у.е.

$U_{21} = 75$ у.е.

$U_{23} = 37 \cdot 5 = 185$ у.е.

$F_1 = 722$ у.е.

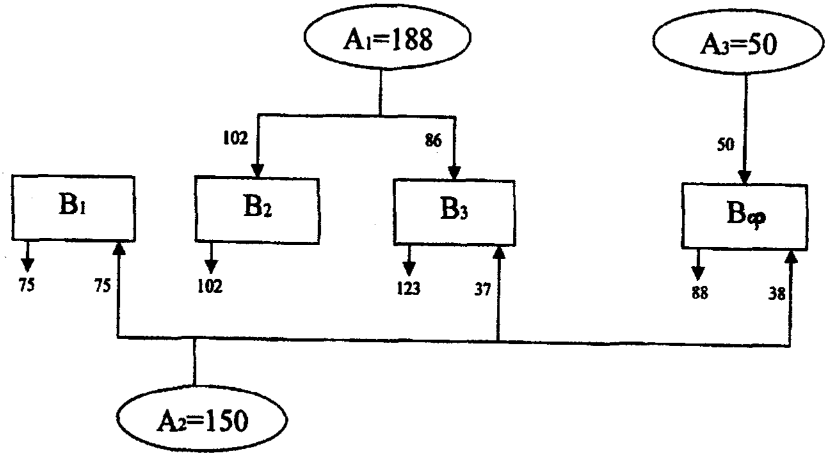

Рис. 1.1. Графическое распределение грузопотоков

Вывод: остались невостребованными 38 ед. груза у A_2 и 50 ед. груза у A_3 – всего 88 ед.

В табл. 1.4, 1.5, 1.6 содержатся повариантные данные для выполнения лабораторной работы № 1.

Таблица 1.4

Значения величин годового потребления топлива котельными, тыс. т у.т.

Порядковый номер котельной	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 (B_1)	192	294	196	198	202	204	206	208	212	214
2 (B_2)	164	162	258	156	154	252	264	266	268	260
3 (B_3)	222	224	226	228	230	228	226	224	232	236
4 (B_4)	160	158	156	254	252	248	246	244	242	162

Таблица 1.5

Мощность топливных баз, тыс. т у.т.

Номер топливной базы	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 (A_1)	202	204	206	208	212	214	216	218	220	222
2 (A_2)	176	178	180	182	184	186	188	190	192	194
3 (A_3)	152	154	156	158	160	162	164	166	168	170
4 (A_4)	140	142	144	146	148	150	152	154	156	158
5 (A_5)	224	226	228	230	232	234	236	238	242	244

Задание

1. Необходимо составить распределительную таблицу с информацией по своему варианту и решить транспортную задачу с применением правила «северо – западного угла» и распределительного метода.

2. Решить ту же задачу, применив правило «минимального элемента» и метод потенциалов. Сопоставить полученные результаты.

3. Выполнить графическое распределение грузопотоков.

4. Преподаватель имеет право изменять и корректировать исходные данные задания.

ПРИМЕЧАНИЕ: При двузначном числе номера варианта необходимо найти среднеарифметические значения величин из столбцов, соответствующих номерам данного варианта, и применять их в качестве исходных данных (по всем выполняемым работам).

Таблица 1.6

Элементы матрицы С, у.е./т у.т.

Обозначение тарифов c_{ij}	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_{11}	10	90	30	80	40	70	50	22	60	52
C_{12}	11	91	31	81	41	71	51	23	61	53
C_{13}	12	92	32	82	42	72	52	24	62	54
C_{14}	13	93	33	83	43	73	53	25	63	55
C_{21}	14	94	34	84	44	74	54	26	64	56
C_{22}	15	95	35	85	45	75	55	27	65	57
C_{23}	16	96	36	86	46	76	56	28	66	58
C_{24}	17	97	37	87	47	77	57	29	67	59
C_{31}	18	98	38	88	48	78	58	30	68	60
C_{32}	19	99	39	89	49	79	59	31	69	61
C_{33}	20	100	40	90	50	80	60	32	70	82
C_{34}	21	101	41	91	51	81	61	33	71	83
C_{41}	22	102	42	92	52	82	62	34	72	84
C_{42}	23	103	43	93	53	83	63	35	73	85
C_{43}	24	104	44	94	54	84	64	36	74	86
C_{44}	25	105	45	95	55	85	65	37	75	87
C_{51}	26	106	46	96	56	86	66	38	76	88
C_{52}	27	107	47	97	57	87	67	39	77	89
C_{53}	28	108	48	98	58	88	68	40	78	90
C_{54}	29	109	49	99	59	89	69	41	79	91

Решение транспортной задачи по критерию времени

При составлении плана перевозок ресурсов в ряде случаев крайне необходима экономия времени. Например, при транспортировке скоропортящихся продуктов необходима доставка их в пункты назначения в минимально возможное время, а также в других аналогичных случаях. При этом может оказаться, что суммарные издержки будут несколько больше, чем у оптимального плана, полученного при оптимизации по критерию стоимости, однако это нужно считать вполне допустимым и окупаемым.

Пусть t_{ij} – время (сутки, часы), необходимое на перевозку груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, а x_{ij} – количество единиц груза, которое планируется перевезти. Требуется определить такое неотрицательное решение $x_{опт}$, для которого t_{ij}^{max} будет наименьшим среди всех t_{ij}^{*}.

Здесь постановка задачи и её решение не отличается от ранее рассмотренной в п. 1.1, но вместо матрицы тарифов задаётся матрица времён Т = $[t_{ij}]$ m · n. Её элементы после решения задачи $t_{ij}^{*} = t_{ij}$, если $x_{ij} > 0$, и $t_{ij}^{*} = 0$, если $x_{ij} = 0$.

Правила нахождения оптимального варианта по времени сводятся к следующему:

1. Записывается условие задачи в распределительной таблице.

2. Находится оптимальное решение по алгоритмам п. 1.1. которое в дальнейшем будет служить отправной позицией поиска минимального времени. (Здесь условно предполагается, что все $t_{ij} = c_{ij}$. При необходимости вводятся фиктивные поставщики или потребители с нулевыми тарифами).

3. Распределительная таблица после решения балансируется путём устранения фиктивного поставщика или потребителя. Осуществляется возврат к матрице Т и учёту полученных значений элементов матрицы X.

4. После такой предварительной подготовки необходимо приступить к решению поставленной задачи.

5. Просматриваются все занятые клетки таблицы для определения максимального времени $t_{ij(1)}^{max}$, которое является наибольшим среди них. При этом вычёркиваются все клетки с $t_{ij} > t_{ij(1)}^{max}$, а также незанятые клетки с $t_{ij} = t_{ij(1)}^{max}$, которые в дальнейшем участие в решении задачи не принимают. Клетка $t_{ij(1)}^{max}$ всегда является занятой клеткой. Таким образом, формируется новая таблица.

6. Производится исследование замкнутых циклов для свободных клеток, содержащих в цикле клетку $t_{ij(1)}^{max}$ на чётном месте. Задача заключается в том, чтобы после перемещения ресурсов по циклу клетка $t_{ij(1)}^{max}$ стала свободной и этот элемент можно было вычеркнуть.

7. Затем нужно переходить к определению $t_{ij(2)}^{\max}$ из оставшихся занятых клеток с той же процедурой вычёркивания.

8. Если $t_{ij(1)}^{\max}$ содержится в нескольких циклах распределительной таблицы, то сначала игнорируются циклы, где $t_{ij(1)}^{\max}$ стоят на нечётных позициях (имеют знак плюс). Затем из оставшихся циклов выбирается цикл, у которого x_{ij} в клетке $t_{ij(1)}^{\max}$ является наименьшей величиной среди x_{ij}, стоящих в чётных вершинах этого цикла. Если таких циклов несколько, то выбирается тот, у которого меньшее число отрицательных элементов в цикле (можно действовать по своему усмотрению). По этому циклу производится перемещение ресурсов и осуществляется переход к новой итерации.

9. Если не представляется возможным полностью разгрузить клетку, соответствующую $t_{ij(1)}^{\max}$ (обратить x_{ij} в ноль), или в циклах на чётных позициях не оказалось $t_{ij(1)}^{\max}$, или исчезли все свободные клетки и невозможно образовать замкнутые циклы, то решение с $t_{ij(1)}^{\max}$ является оптимальным.

10. Для получения оптимального решения необходимо совершить конечное число шагов.

Числовой пример

Таблица 1.7

Исходные данные для решения транспортной задачи по критерию времени

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2 / 15	3 / 1	7	16
A_2	4	5 / 11	9 / 14	25
A_3	6	8	1 / 36	36
	15	12	50	77

Первоначально получен оптимальный план по критерию стоимости в предположении, что наибольшие тарифы не должны быть задействованы. Получены следующие значения оценок:

$$S_{13} = 7 - 9 + 5 - 3 = 0;\ S_{21} = 4 - 2 + 3 - 5 = 0;$$

$$S_{31} = 6 - 2 + 3 - 5 + 9 - 1 = 10;\ S_{32} = 8 - 5 + 9 - 1 = 11;$$

$$F_{max(1)} = 250.$$

Дальше, рассматривая эту таблицу с параметрами времени, находим, что элемент $t_{23} = 9$ час является наибольшим среди остальных.

Составим циклы, содержащие этот элемент на чётных позициях. Единственным циклом является здесь цикл с оценкой S_{13}, где снизу обозначены перевозимые ресурсы.

$$S_{13} = 7 - 9 + 5 - 3;$$

$$0 - 14 - 11 - 1.$$

После перемещения их по рассмотренному циклу будет получена новая табл. 1.8.

Таблица 1.8

Новое ресурсораспределение

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2 15	3	7 1	16
A_2	4	5 12	9 13	25
A_3	6	8	1 36	36
	15	12	50	77

Пока высвободить клетку t_{23} не удалось.

$F_{max(2)} = 250.$

На новой итерации:

$S_{21} = 4 - 2 + 7 - 9 = 0$ является единственным циклом, где после перемещения

$0 - 15 - 1 - 13$ ресурсов удаётся высвободить t_{23} (табл. 1.9).

Таблица 1.9

Очередной шаг ресурсораспределения $F_{max(3)}$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2 / 2	3 /	7 / 14	16
A_2	4 / 13	5 / 12	9 /	25
A_3	6 /	8 /	1 / 36	36
	15	12	50	77

Кроме того, вычёркивается также клетка $t_{32} = 8$ час, потому что занятой клеткой с минимальным временем является $t_{13} = 7$ час. Оказывается, для клетки t_{31} можно образовать замкнутый цикл с клеткой t_{13}: $S_{31} = 6 - 2 + 7 - 1 = 10$, но освободить её не представляется возможным, т.к. $t_{13} = 7$ стоит в нечётной позиции (+7). Поэтому $t = 7$ час является оптимальным. Время перевозки удалось сократить на два часа.

Задание

Необходимо последнюю распределительную таблицу первой части лабораторной работы считать как исходную для второй части работы, приняв матрицу С равной матрице Т с теми же элементами.

Выполнить все действия, указанные выше, по процедуре решения транспортной задачи по критерию времени и найти оптимальное время $t_{опт}$.

Сделать выводы и дать предложения по определению экономического эффекта.

Лабораторная работа № 2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ В ЭНЕРГЕТИКЕ

Цель лабораторной работы – определение оптимальной стратегии и сроков замены старого оборудования новым по критерию максимальной прибыли за некоторый период времени.

Одной из важных экономических проблем, с которыми приходится сталкиваться на практике, является определение оптимальной стратегии по замене старого энергетического оборудования новым.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание. В этих условиях более выгодно старое оборудование продать или заменить новым того же вида, либо более совершенным.

Решения о замене оборудования принимаются в начале каждого промежутка времени (года, месяца и т.д.), на которые разбит плановый период. Основной характеристикой оборудования является его возраст. От него зависят эксплуатационные расходы, затраты на производство продукции, производительность и остаточная стоимость.

Построение математической модели для задачи о замене оборудования

При составлении модели динамического программирования (ДП) процесс замены рассматривается как многошаговый, где весь плановый период N разбивается на n промежутков. Так как в начале каждого из этих промежутков принимается решение либо о сохранении оборудования, либо о его замене, то на каждом шаге рассматриваются две альтернативные переменные:

S – сохранение старого оборудования;

Z – замена старого оборудования новым по стоимости K.

Исходные предпосылки: пусть в начале планового периода из N лет используется некоторое оборудование возраста t лет. Ежегодно на этом оборудовании производится продукция по общей цене A(t) с издержками U(t) при остаточной стоимости b(t).

Требуется разработать оптимальную политику замены оборудования исходя из условия максимизации ожидаемой прибыли П за период времени длительностью N.

В соответствии с общей концепцией динамического программирования процесс оптимизации необходимо рассматривать с конца планового периода, т.е. начиная с последнего года. Годы нумеруются от конца периода к его началу (n = 1, 2,…,N).

Примем n = 1, считая, что к началу последнего года имеется оборудование возраста t.

Если это оборудование сохранить, то за последний год прибыль составит

$$П_S = A(t) - U(t) \quad \rightarrow \quad S, \qquad (2.1)$$

а если его продать по остаточной стоимости и купить новое, то прибыль к концу последнего года выразится суммой

$$П_Z = b(t) - K + A(0) - U(0) \quad \rightarrow \quad Z, \qquad (2.2)$$

где A(0) – стоимость продукции, произведённой новым оборудованием (нулевого возраста) за год;

U(0) – расходы, связанные с эксплуатацией нового оборудования в течение года.

Максимально возможную прибыль за последние n лет планового периода можно обозначить через $F_n(t)$, а максимальную прибыль за последний год как $F_1(t)$. Тогда

$$F_1(t) = \max \begin{cases} A(t) - U(t) & \text{——— } S; \\ b(t) - K + A(0) - U(0) & \text{———} Z. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Приняв n = 2, т.е. когда период состоит из двух последних лет и к началу этого периода имеется оборудование возраста t и принято решение его сохранить, за год оборудование постареет и к началу последнего года будет иметь возраст (t + 1) лет. При этом будет получена дополнительная прибыль F_1 (t + 1), а общая прибыль за два года составит

$$П_S = A(t) - U(t) + F_1(t + 1). \tag{2.4}$$

Если же в начале второго года будет принято решение оборудование заменить, то к концу года новое оборудование постареет, будет иметь возраст 1 год и принесёт прибыль $F_1(1)$. Общая прибыль за два года составит

$$П_Z = b(t) - K + A(0) - U(0) + F_1(1) \tag{2.5}$$

$$F_2(t) = \max \begin{cases} A(t) - U(t) + F_1(t + 1) & \text{—— S;} \\ b(t) - K + A(0) - U(0) + F_1(1) & \text{—— Z.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Рассуждая аналогично, можно записать в общем виде функциональные уравнения Беллмана

$$F_n(t) = \max \begin{cases} A(t) - U(t) + F_{n-1}(t+1) & \text{—— S;} \\ b(t) - K+A(0) - U(0)+F_{n-1}(1) & \text{—— Z,} \end{cases} \tag{2.7}$$

где t = 0, 1, 2,...

ПРИМЕЧАНИЯ:

Стоимость продукции A(t) за год и расходы U(t) задаются таблично.

Принять, что остаточная стоимость оборудования не зависит от его возраста t.

Цена нового оборудования не изменяется со временем.

Все численные значения величин имеют одни единицы стоимости (тыс. у.е.).

Повариантные значения исходных данных

№ варианта	Обозначение данных	Возраст оборудования, лет										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1, 10, 20	A(t)	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
	U(t)	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
	N=	10	N_1=	9	t=	7	t1=	6	b(t)=	0	k=	8
2, 11, 21	A(t)	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21
	U(t)	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
	N=	10	N_1=	8	t=	6	t1=	5	b(t)=	5	k=	17
3, 12, 22	A(t)	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13
	U(t)	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
	N=	10	N_1=	7	t=	9	t1=	4	b(t)=	2	k=	12
4, 13, 23	A(t)	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
	U(t)	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
	N=	10	N_1=	9	t=	6	t1=	8	b(t)=	0	k=	6
5, 14, 24	A(t)	23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18
	U(t)	11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18
	N=	10	N_1=	6	t=	9	t1=	3	b(t)=	1	k=	13
6, 15, 25	A(t)	22	22	22	21	20	20	19	18	17	16	16
	U(t)	12	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16
	N=	10	N_1=	6	t=	8	t1=	1	b(t)=	1	k=	13
7,16,26	A(t)	27	26	25	25	25	24	24	23	22	22	21
	U(t)	15	16	17	17	18	18	19	20	20	21	21
	N=	10	N_1=	8	t=	7	t1=	3	b(t)=	0	k=	8
8, 17, 27	A(t)	25	24	24	24	24	23	22	22	21	21	20
	U(t)	12	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20
	N=	10	N_1=	6	t=	6	t1=	4	b(t)=	4	k=	9
9, 18, 28	A(t)	30	29	29	28	27	26	25	23	21	20	19
	U(t)	12	13	13	14	14	15	15	16	17	18	19
	N=	10	N_1=	7	t=	9	t1=	4	b(t)=	0	k=	10
19, 29, 30	A(t)	29	28	28	27	25	25	24	23	22	21	21
	U(t)	14	14	15	16	17	17	18	19	20	21	21
	N=	10	N_1=	6	t=	6	t1=	3	b(t)=	4	k=	14

Задание

1. Пользуясь функциональными уравнениями, составить матрицу максимальных прибылей $F_n(t)$ за N лет.

2. Сформировать по матрице максимальных прибылей оптимальные стратегии замены оборудования данных возрастов t и t_1 лет в плановом периоде продолжительностью соответственно N и N_1 лет.

2.2. Численный пример

Выполнить решение задачи о замене оборудования по исходным данным, приведённым в нижеследующей табл. 2.2.

Таблица 2.2

Данные численного примера

Вариант	Обозначение данных	Возраст оборудования, лет										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	A(t)	30	30	29	29	29	28	28	27	27	26	24
0	U(t)	10	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	N=	10	N_1=8		t=5		t_1=6		b(t)=2		K=15	

Функциональные уравнения для $F_1(t)$ и $F_n(t)$ при числовых значениях примера

$$F_1(t)=\max\begin{cases} A(t)-U(t) \\ b(t)-K+A(0)-U(0) \end{cases} =\max\begin{cases} A(t)-U(t) \\ 2-15+30-10 \end{cases} =\max$$

$$\begin{matrix} A(t)-U(t)-S; \\ 7 \qquad\qquad -Z; \end{matrix}$$

$$F_n(t)=\max\begin{cases} A(t)-U(t)+F_{n-1}(t+1)-S, \\ 7+F_{n-1}(1) \qquad\qquad -Z. \end{cases}$$

По приведённым выражениям последовательно *вычисляются* значения максимальной прибыли $F_n(t)$ и записываются в результирующую таблицу (табл. 2.3). Придавая параметру t в уравнении $F_1(t)$ значения 0, 1, 2,…, можно заполнить первую строку табл. 2.3.

При t=0

$$F1(0)=\max\begin{cases} A(0)-U(0)-S \\ 7 \qquad\qquad -Z \end{cases} =\max\begin{cases} 30-10 \quad -S \\ 7 \qquad\quad -Z \end{cases} =20-S.$$

$$F_1(1)=\max\begin{cases} A(1)-U(1) \\ 7 \end{cases} =\max\begin{cases} 30-10 \\ 7 \end{cases} =20-S,$$

$$F_1(2)=\max\begin{cases}A(2)-U(2)\\ 7\end{cases}=\max\begin{cases}29-12\\ 7\end{cases}=17-S.$$

Аналогичным образом расчёт ведётся до t=9:

$$F_1(9)=\max\begin{cases}A(9)-U(9)-S\\ 7 \qquad\qquad -Z\end{cases}=\max\begin{cases}26-19-S\\ 7 \qquad\quad -Z\end{cases}=7-S.$$

Если прибыль Π_Z от нового оборудования равна прибыли старого Π_S, то старое лучше сохранить ещё на год.

При t=10

$$F_1(10)=\max\begin{cases}A(10)-U(10)-S\\ 7 \qquad\qquad\quad -Z\end{cases}=\max\begin{cases}24-20\ \ -S\\ 7 \qquad\quad -Z\end{cases}=7\ \ -Z.$$

Из табл. 2.3 видно, что разность A(t) – U(t) с ростом t убывает и до t=9 включительно оптимальной является политика сохранения, а при t>9 – замена оборудования. Произведём в связи с этим в первой строке табл. 2.3 разграничение, которое будет показано и в остальных строках таблицы.

Для заполнения второй строки таблицы и всех остальных используется формула $F_n(t)$.

$$F_2(t)=\max\begin{cases}A(t)-U(t)+F_1(t+1)\\ b(t)\text{-}K+A(0)-U(0)+F_1(1)\end{cases}=\max\begin{cases}A(t)-U(t)+F_1(t+1)-S,\\ 27 \qquad\qquad\qquad\qquad -Z.\end{cases}$$

Придавая параметру t значения 0, 1, 2,…,10 и используя исходные данные и значения $F_1(t+1)$ из первой строки таблицы, можно заполнить вторую строку.

Например, при t=4

$$F_2(4)=\max\begin{cases}A(4)-U(4)+F_1(5)\\ 27\end{cases}=\max\begin{cases}29-14+13\\ 27\end{cases}=28-S$$

и так далее.

Таблица 2.3

Значения максимальной прибыли $F_n(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(t)$	s 20	s 20	s 17	s 16	s 15	s 13	s 12	s 10	s 9	s 7	z 7
$F_2(t)$	s 40	s 37	s 33	s 31	s 28	z 27	z 27	z 27	z 27	z 27	z 27
$F_3(t)$	s 57	s 53	s 48	s 44	z 44	z 44	z 44	z 44	z 44	z 44	z 44
$F_4(t)$	s 73	s 68	s 61	s 60	z 60	z 60	z 60	z 60	z 60	z 60	z 60
$F_5(t)$	s 88	s 81	s 77	s 76	s 75	z 75	z 75	z 75	z 75	z 75	z 75
$F_6(t)$	s 101	s 97	s 93	s 91	s 90	s 88	z 88	z 88	z 88	z 88	z 88
$F_7(t)$	s 117	s 113	s 108	s 106	z 104	z 104	z 104	z 104	z 104	z 104	z 104
$F_8(t)$	s 133	s 128	s 123	s 120	z 120	z 120	z 120	z 120	z 120	z 120	z 120
$F_9(t)$	s 148	s 143	s 137	s 136	s 135	z 135	z 135	z 135	z 135	z 135	z 135
$F_{10}(t)$	s 163	s 157	s 153	s 151	s 150	z 150	z 150	z 150	z 150	z 150	z 150

Пусть, например, в начале планового периода имелось энергетическое оборудование возраста t=5 лет. По информации табл. 2.3 разработаем модель о его замене на десятилетний период, доставляющий максимальную прибыль. Эта прибыль, составляющая 150 тыс. у.е., находится на пересечении столбца t=5 и строки $F_{10}(t)$. Значение её записано в области политики замены. Это значит, что для достижения в течение 10 лет максимальной прибыли, в начале первого года оборудование следует заменить. В течение первого года новое оборудование постареет на год, таким образом замененное и проработавшее один год оборудование за девять лет до конца планового периода будет иметь возраст один год. Из табл. 2.3 находим, что $F_9(1)=143$. Это значение располагается в области политики сохранения, т.е. во втором году планового периода надо сохранить оборудование возраста один год, и, проработав на нём год, за 8 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 2 года. Значение $F_8(2)=123S$ располагается в области сохранения. Через год работы возраст оборудования составит 3 года, до конца планового периода останется 7 лет.

Находим $F_7(3)=106S$. Это область сохранения. Дальше $F_6(4)=90S$. Работаем ещё год. Его возраст становится равным 5 лет. До конца планового периода остаётся 5 лет. $F_5(5)=75Z$. Это область замен. Оборудование заменяется на новое. Проработаем на нём в течение пятого года. Оно постареет на год. До конца планового периода остаётся 4 года. Продолжая такие рассуждения, получим, что $F_4(1)=68$, $F_3(2)=48$, $F_2(3)=31$, $F_1(4)=15$ расположены в области сохранения. Разработанную политику можно изобразить следующей цепочкой:

$$\underset{150}{F_{10}(5)} \xrightarrow[Z]{1-\text{год}} \underset{143}{F_9(1)} \xrightarrow[S]{2-\text{год}} \underset{123}{F_8(2)} \xrightarrow[S]{3-\text{год}} \underset{106}{F_7(3)} \xrightarrow[S]{4-\text{год}} \underset{90}{F_6(4)} \xrightarrow[S]{5-\text{год}}$$

$$\longrightarrow \underset{75}{F_5(5)} \xrightarrow[Z]{6-\text{год}} \underset{68}{F_4(1)} \xrightarrow[S]{7-\text{год}} \underset{48}{F_3(2)} \xrightarrow[S]{8-\text{год}}$$

$$\longrightarrow \underset{31}{F_2(3)} \xrightarrow[S]{9-\text{год}} \underset{15}{F_1(4)} \xrightarrow[S]{10-\text{год}} .$$

Из табл. 2.3 можно найти оптимальную стратегию замены оборудования с любым начальным состоянием от 0 до 10 лет и на любой плановый период, не превосходящий 10 лет. Например, найдём политику замен на плановый период в $N_1=8$ лет, если в начале имелось оборудование шестилетнего возраста ($t_1=6$):

$$\underset{120}{F_8(6)} \xrightarrow[Z]{1-\text{год}} \underset{113}{F_7(1)} \xrightarrow[S]{2-\text{год}} \underset{93}{F_6(2)} \xrightarrow[S]{3-\text{год}} \underset{76}{F_5(3)} \xrightarrow[S]{4-\text{год}} \underset{60}{F_4(4)} \xrightarrow[Z]{5-\text{год}}$$

$$\longrightarrow \underset{53}{F_3(1)} \xrightarrow[S]{6-\text{год}} \underset{33}{F_2(2)} \xrightarrow[S]{7-\text{год}} \underset{16}{F_1(3)} \xrightarrow[S]{8-\text{год}} .$$

Литература

1. Экономико – математические методы и модели /Под ред. А.В. Кузнецова. – Мн. : БГЭУ, 2000.

2. Гусева С. Т., Махнист Л. П., Рубанов В.С. Экономико – математические методы и модели (практикум). – Брест: БГТУ, 2000.

3. Падалко Л. П. Математические методы оптимального планирования развития и эксплуатации энергосистем. – Мн.: Выш. школа, 1972.

4. Калихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. школа, 1979.

5. Сакович В. С. Исследование операций (детерминированные методы и модели). – Мн.: Выш. школа, 1984.

Содержание

Учебное издание

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по дисциплине «Экономико-математические методы и модели в энергетике» для студентов специальности 1 – 27 01 01 «Экономика и организация производства» специализации 1 – 27 01 01 – 10 «Экономика и организация производства (энергетика)»

Составители: КЕРНОГО Виктор Петрович
НАГОРНОВ Виктор Николаевич

Редактор В.В. Мохнач
Компьютерная верстка А.Г. Гармаза

Подписано в печать 28.05.2003.
Формат 60 х 84 1/16. Бумага типографская № 2.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. 1,4. Уч.-изд.л. 1,1. Тираж 100. Заказ 268.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
Лицензия ЛВ № 155 от 30.01.2003.