УДК 539.375

Применение *J*-интеграла для вычисления собственных значений дифференциальных операторов

Гундина М.А.
Белорусский национальный технический университет

На основе закономерностей разрушения металлов разработаны методы математического моделирования процесса разрушения стали. В работе предложено для оценки работоспособности полученного материала использовать энергетический критерий, на основе интеграла Черепанова-Райса, характеризующий прочность материала, в котором присутствует трещина.

Рассмотрим упругопластическую задачу о статической прямолинейной трещине. Заметим, что при распространении *J*-интеграла на этот случай необходимо учитывать характерные особенности, связанные с сингулярностью градиентов перемещений и напряжений, а также с потенциалом деформаций для сред с неголономными уравнениями состояния.

Энергия, приходящая на единицу объема тела, называемая объемной плотностью упругой энергии, равна $\delta U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$, где σ_{ij}, ε_{ij} -- компоненты напряжений и деформаций.

Вследствие инвариантности вектора потока следующая величина не зависит от того, где проведен контур, отхватывающий контур трещины:

$$J = \int_{\Gamma}((U_0 + \frac{1}{2}\rho \cdot u_{i,x_1}u_{i,x_1})n_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,x_1})d\Gamma, \text{ здесь } u_{i,x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}.$$

Рассмотрим замкнутый контур, окружающий вершину трещины, в виде кривой, начинающийся на нижней плоской части поверхности трещины и кончающийся на верхней ее части.

Представим компоненты вектора приращений в виде:

$$u_r(r,\varphi) = U_0(\varphi)r^{\lambda_0};\ u_\varphi(r,\varphi) = V_0(\varphi)r^{\lambda_0}.$$

Из уравнения равенства интеграла нулю по замкнутому контуру получим соотношение для нахождения λ_0.

При вычислении *J*-интеграла нулевые члены компонентов перемещений и среднего напряжения были приближены частичными суммами рядов Фурье.

Для случая плоской деформации $\lambda_0 = 1.5$, что согласуется с найденными значениями для трещины нормального отрыва для случая статической трещины.