Белорусский национальный технический университет, Минск

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИЙ РАЗЛОЖЕННЫХ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ.

Акимов В.А.

In this article the research of the convergence function arranged in nonorthogonal and orthogonal rows by means of the operator method was under consideration.

Пусть мы имеем произвольную функцию, допускающую представление в виде степенного ряда $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\beta_m x^m$, сходящегося на некотором отрезке $[-R,R]$ или на всей $R=\infty$ числовой оси. Исследуем границу интервала сходимости в случае разложения этой функции в неортогональный ряд $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_k F(a_k x)$ по корням a_k некоторой трансцендентной целой функции $\varphi(z)=0$.

Здесь $F(z)$ – произвольная целая трансцендентная функция.

Воспользовавшись разложением отдельных степеней x^m и допуская, что порядок суммирования может быть изменен, соединяя вместе члены, содержащие четные $F_ч(a_k x)$ и нечетные $F_н(a_k x)$ найдем [1]:

$$f(x)=A_0F(0)+2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_kF_н(a_kx)+C_kF_ч(a_kx)\right]\right\} \tag{1}$$

где коэффициенты имеют следующие значения

$$A_0=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r}}{\alpha_{2r}},\quad B_k=-\frac{2}{a_k\varphi'(a_k)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}}\gamma_k^{(r)},\quad C_k=-\frac{2}{a_k^2\varphi'(a_k)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}}\gamma_k^{(r)} \tag{2}$$

Здесь мы полагаем:

$$F(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s r^s,\quad \varphi(z)=\sum_{s=0}^{\infty}U_{2s+1}z^{2s+1},$$

$$\varphi(z)=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right),\quad \gamma_k^{(r)}=\frac{1}{(2r+1)!}\left(\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}}\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}\right)_{\mu=0} \tag{3}$$

Величины a_k считаем все различными и расположенными в порядке возрастания модулей. Относительно $F(z)$ сделаем допущение, что пока ни одна из величин α_s не равна нулю.

Чтобы имело место разложение (1), ряды (2) должны быть сходящимися (необходимое условие).

Докажем прежде всего, что при всяком r имеет место неравенство:

$$\left|\gamma_k^{(r)}\right|<\left|\gamma_{k+1}^{(r)}\right|<\left|U_{2r+1}\right|. \tag{4}$$

Если корни a_k трансцендентного уравнения являются комплексными $a_k=\alpha_k+i\beta_k$, то с учетом наличия для каждого номера k еще трех корней $-a_k,\overline{a}_k,-\overline{a}_k$ (см., например, уравнение $sh\lambda=\lambda$), можем записать

$$\varphi(\mu)=\mu\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+2S_k^2\mu^2+t_k^4\mu^4\right)$$

где $S_k^2 = -\frac{1}{2}\frac{a_k^2+\bar{a}_k^2}{\left(a_k\bar{a}_k\right)^2}$, $t_k^4 = \frac{1}{\left(a_k\bar{a}_k\right)^2}$ - вещественные числа.

Представим

$$\psi(\mu) = \frac{\varphi(\mu)}{\left(1-\mu^2/a_k^2\right)\left(1-\mu^2/a_{k+1}^2\right)} = \frac{\left(1-\mu^2/\bar{a}_k^2\right)\left(1-\mu^2/\bar{a}_{k+1}^2\right)\varphi(\mu)}{\left(1+2S_k^2\mu^2+t_k^4\mu^4\right)\left(1+2S_{k+1}^2\mu^2+t_{k+1}^4\mu^4\right)} =$$

$$= \left(1-\mu^2/\bar{a}_k^2\right)\left(1-\mu^2/\bar{a}_{k+1}^2\right)\sum_{t=0}^{\infty} V_{2r+1}\mu^{2r+1}$$

где все $V_{2r+1} > 0$.

В результате получим значения $\gamma_k^{(r)}$ и $\gamma_{k+1}^{(r)}$ для комплексных корней трансцендентного уравнения

$$\gamma_k^{(r)} = \frac{1}{(2r+1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{2r+1}}{\mathrm{d}\mu^{2r+1}}\psi(\mu)\left(1-\mu^2/a_{k+1}^2\right)\right)_{\mu=0} =$$

$$= \left(1-\mu^2/\bar{a}_k^2\right)\left(V_{2r+1}+2S_{k+1}^2V_{2r-1}+t_{k+1}^4V_{2r-3}\right)$$

$$\gamma_{k+1}^{(r)} = \frac{1}{(2r+1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{2r+1}}{\mathrm{d}\mu^{2r+1}}\psi(\mu)\left(1-\mu^2/a_k^2\right)\right)_{\mu=0} =$$

$$= \left(1-\mu^2/\bar{a}_k^2\right)\left(V_{2r+1}+2S_k^2V_{2r-1}+t^4V_{2r-3}\right)$$

Так как $\left|\frac{1}{\bar{a}_k^2}\right| > \frac{1}{\left|\bar{a}_{k+1}^2\right|}$, $t_k^4 > t_{k+1}^4$, $S_k^2 > S_{k+1}^2$, а в образовании U_{2r+1} принимают участие все $1/a_k^2$ при $i := 1,2,3,...$, то мы приходим к требуемому неравенству (4).

Аналогично и проще доказывается неравенство (4) в случае вещественных корней a_k Из этого неравенства вытекает, что члены рядов

$$S_1^{(k)} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}}\gamma_k^{(r)}, S_2^{(k)} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}}\gamma_k^{(r)}, k = 1,2,3,...$$

соответственно меньше, чем члены рядов

$$T_1 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}}U_{2r+1}, T_2 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}}U_{2r+1}. \qquad (5)$$

Поэтому, если ряды (5) сходятся абсолютно, то и все ряды $S_1^{(k)}$ и $S_2^{(k)}$ тоже сходятся абсолютно, то есть все B_k и C_k, определяемые формулами (2) действительно соответствуют. Покажем, что при этом существует и A_0. В самом деле:

$$A_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}U_1 + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}}U_{2r+1}\left(\frac{U_{2r+3}}{U_{2r+1}}\right),$$

а так как при произвольном r будет $\left|\frac{U_{2r+3}}{U_{2r+1}}\right| < 1$,то A_0 существует одновременно с T_2.

Итак, показано, что при условии абсолютной сходимости рядов (5) существуют все коэффициенты, определяемые соотношением (2).

Покажем, что при условии абсолютной сходимости рядов (5) величины A_0, B_k, C_k не только существуют, но и являются истинными коэффициентами в формуле (1), дающей разложение $f(x)$.

Для этого начнем с рассмотрения сравнительного характера сходимости рядов x^{2r} и x^{2r+1} будем сравнивать ряды для нечетных степеней с рядом для x, а для четных – с рядом для x^2 (известно, что эти ряды сходятся одновременно). Начнем с нечетных. Для x находим [1]:

$$x = -\frac{4}{\alpha_1}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_H(a_k x)}{a_k\varphi'(a_k)}\right) \tag{6}$$

Если при некотором частном значении x ряд этот сходится, то соответствующие суммы

$$S_p^{(2n)} = 2\operatorname{Re}\left(\sum_{k=p+1}^{k=n}\frac{F_H(a_k x)}{a_k\varphi'(a_k)}\right),(n \ge p+1)$$

все ограничены, так что $\left|S_p^{(2n)}\right| < A_p$ при любом $n > p$.

Здесь A_p – число, не зависящее от n и $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = 0$ в силу сходимости ряда (6).

Все ряды

$$x^{2r+1} = -\frac{4}{\alpha_{2r+1}}\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(r)}\frac{F_H}{\varphi'(a_k)}\right] \tag{7}$$

сходятся одновременно с (6) при данном x, так как, согласно доказанному выше, все $\lambda_k^{(r)}$ при постоянном r удовлетворяют неравенству

$$\left|\lambda_k^{(r)}\right| < \left|\lambda_{k+1}^{(r)}\right| < \left|U_{2r+1}\right|,$$

то есть образуют монотонно возрастающую с увеличением k последовательность, то из известного неравенства Абеля вытекает, что

$$\left|\sum_{k=p+1}^{k=n}\lambda^{(r)}\frac{F_H(a_k x)}{a_k\varphi'(a_k)}\right| < 2A_p\left|\lambda_n^{(r)}\right| < 2A_p\left|U_{2r+1}\right| \tag{8}$$

причем последнее верно и при $n = \infty$. Полагая поэтому

$$x^{2r+1} = -\frac{4}{\alpha_{2r+1}}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(r)}\left|\frac{F_H(a_k x)}{a_k\varphi'(a_k)}\right| + \varepsilon_p^{(2r+1)}, \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_p^{(2r+1)} = 2\operatorname{Re}\left[\frac{-2}{\alpha_{2r+1}}\sum_{k=p+1}^{\infty}\lambda_k^{(r)}\frac{F_H(a_k x)}{a_k\varphi'(a_k)}\right]$$

Этот остаток ряда, имеет оценку

$$\left|\varepsilon_p^{(2r+1)}\right| < 4A_p\left|\frac{U_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}}\right| \tag{10}$$

Для четных разложений найдем аналогично, допустивши сходимость ряда для x^2:

$$x^{2r+2} = \alpha_0\frac{U_{2r+3}}{\alpha_{2r+3}} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{-2}{\alpha_{2r+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(r)}\frac{F_H(a_k x)}{a_k^2\varphi'(a_k)}\right] + \varepsilon_p^{(2r+2)},$$

причем

$$\left|\varepsilon_p^{(2r+2)}\right| < 4A'_p\left|\frac{U_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}}\right| \tag{11}$$

где A'_p – это высший предел абсолютной величины сумм

$$\left|\sum_{k=p+1}^{k=n}\frac{F_r(a_k x)}{a_k^2\varphi'(a_k)}\right|(n \ge p+1)$$

так что $\lim\limits_{p \to \infty} A'_p = 0$.

Теперь уже нетрудно доказать справедливость формулы (1).

Для этого возьмем сумму

$$\sum_{m=0}^{m=2n+2} \beta_m x^m = f(x) - \rho_{2n+2}, \tag{12}$$

где ρ_{2n+2} – остаток ряда и подставим сюда в левую часть вместо отдельных степеней x^m их выражения из (9) и (10), что допустимо, если для соответственного значения ряды эти сходятся, что мы и установили выше. Получается:

$$f(x) - \rho_{2n+2} = A_0^{(n)} F(0) + 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{k=p}\left[B_k^{(n)} F_H(a_k x) + C_k^{(n)} F_r(a_k x)\right]\right\} +$$

$$+\sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+1} \varepsilon^{(2r+1)} + \sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+2} \varepsilon^{(2r+2)} \tag{13}$$

где

$$A_0 = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\beta_{2m}}{\alpha_{2m}} U_{2m+1},\ B_k^n = -\frac{2}{a_k \varphi'(a_k)} \sum_{r=0}^{r=n} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \lambda_k^{(r)}$$

$$C_k^n = -\frac{2}{a_k^2 \varphi'(a_k)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \lambda_k^{(r)}$$

Дополнительные суммы в правой части (13) оцениваем с помощью (10) и (11), именно:

$$\left|\sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+1} \varepsilon^{(2r+1)}\right| < 4A_p \sum_{r=0}^{r=n}\left|\frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} U_{2r+1}\right| < 4A_p \sum_{r=0}^{\infty}\left|\frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} U_{2r+1}\right| = A_p Q,$$

$$\left|\sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+2} \varepsilon^{(2r+2)}\right| < 4A'_p \sum_{r=0}^{\infty}\left|\frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}} U_{2r+1}\right| = A'_p Q',$$

где Q и Q' – конечные величины по условию абсолютной сходимости рядов (5). Оценка эта не зависит от n и остается верной при $n \to \infty$. Переходя поэтому в (13) к пределу $n = \infty$ при постоянном p и замечая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_{2n+2} = 0$ в силу сходимости ряда $f(x)$ при выбранном значении x и что, согласно доказанному выше

$$\lim_{n \to \infty} A_0^{(n)} = A_0,\ \lim_{n \to \infty} B_k^{(n)} = B_k,\ \lim_{n \to \infty} C_k^{(n)} = C_k$$

получаем

$$f(x) = A_0 F_0 + 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{k=p}\left[B_k F_H(a_k x) + C_k F_r(a_k x)\right]\right\} + r_p$$

причем $|r_p| < \left(A_p Q + A'_p Q'\right)$

Переходя к пределу $p \to \infty$, получаем разложение (1) с коэффициентами (2), что и требуется доказать.

Для действительных корней a_k в приведенных выше выкладках достаточно устранить символ $2\,\mathrm{Re}$ и мы получим тот же результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт», 2003-101с.