Белорусский национальный технический университет, Минск

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ

Гончарова С.В.

In this article the distribution of waves in the elastic layer prisoner between planes z = ± h was under consideration.

Рассмотрим упругий слой толщиной $2h$, заключенный между плоскостями $z = \pm h$, свободными от напряжений. Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью *с*. Плоская продольная волна распространяется в бесконечном пространстве со скоростью c_1, поперечная волна – со скоростью c_2. В упругом слое скорость волны будет отличной от c_1 и c_2. Ограничение упругого пространства двумя плоскостями вызывает возмущения, влияющие на изменение фазовой скорости и напряженного состояния. ниже мы рассмотрим плоскую задачу: перемещения u и w будут независимыми от переменной y, а перемещение $v \equiv 0$.

Функцию $f(x,t)$, описывающую вынужденные колебания упругой среды представим в виде [1]

$$f(x,t) = c\exp[i(pt - fx)]$$

и подставим в ряды перемещений плоской задачи теории упругости [1].
Беря действительные части, получим

$$u = Af\left(chzqsh^{-1}hq - \frac{2qS}{S^2 + f^2}chzSsh^{-1}hS\right)\sin(pt - fx)$$

$$w = Aq\left(shzqsh^{-1}hq - \frac{2f^2}{S^2 + f^2}shzSsh^{-1}hS\right)\cos(pt - fx) \tag{1}$$

где $q = \sqrt{f^2 - h^2}, S = \sqrt{f^2 - \mathrm{c}^2}, \mathrm{p} = \frac{P}{-_1}, \mathrm{c} = \frac{P}{c_2}, A = \frac{f^2 + S^2}{q}C$

$\frac{P}{2\pi}$ – частота, $\frac{2\pi}{f}$ – длина волны.

Условие $\sigma_{zz}(x, \pm h) = 0$ приводит к соотношению: $4Sf^2 cthhS = \frac{\left(f^2 + S^2\right)^2}{q} cthhq$ которое можно переписать в виде

$$\frac{thh\beta}{thhz} = \frac{4f^2 z\beta}{\left(f^2 + S^2\right)^2} \tag{2}$$

где f равно 2π, поделенному на длину волны, а β и z - две функции, определяемые уравнениями

$$\beta^2 = f^2\left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right), z^2 = f^2\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \tag{3}$$

Здесь $c = \frac{P}{f}$ – фазовая скорость волны, а c_1 и c_2, как и ранее, скорости волн расширения и волн искажения в безграничной среде.

Надо заметить, что при $c > c_2$ величина β становится чисто мнимой, и если ее положить равной $i\beta_r$, то (4.44) можно переписать в виде

$$\frac{th(h\beta_r)}{th(hz)} = \frac{4f^2 z\beta}{\left(f^2+S^2\right)^2}$$

Из (2) можно видеть, что если длина волны велика по сравнению с h, то βh и zh становятся малыми, так что гиперболические тангенсы можно заменить их аргументами, и (2) тогда дает

$$4fh2z^2 = \left(f^2+\beta^2\right)^2$$

Подставляя сюда β^2 и z^2 из (3), получим $4f^4\left(1-\frac{c^2}{c_1^2}\right) = f^4\left(2-\frac{c^2}{c_2^2}\right)^2$

откуда

$$c^2 = 4c_2^2\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2}$$

Но $c_1^2 = \frac{\gamma G}{\rho}$ и $c_2^2 = \frac{G}{\rho}$, следовательно,

$$c^2 = \frac{4(\gamma-1)G}{\gamma\rho},\ c = 2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\psi}}c_2 \tag{4}$$

что при $\gamma = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}$ совпадает с результатом, полученным из элементарной теории

Если $\nu = \frac{1}{4}$ (то есть $\gamma = 3$), то $c_1^2 = 3c_2^2$ и тогда получим соотношение

$$c = \frac{2\sqrt{2}}{3}c_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}c_2$$

Для очень коротких волн βh и zh становятся очень большими и их гиперболические тангенсы стремятся к единице, при этом уравнения (2) упрощается:

$$\left(f^2+\beta^2\right)^2 = 4f^2\beta z$$

Возводя в квадрат обе части и подставляя значения β и z из (3), получаем

$$\left(2-\frac{c^2}{c_1^2}\right)^4 = 16\left(1-\frac{c^2}{c_1^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{c_2^2}\right) \tag{5}$$

Формула (5) представляет собой характеристическое уравнение для поверхностных волн Рэлея [1].

Границу $z = h$ можно трактовать как границу упругого полупространства; периодическая волна по своему характеру приближается к поверхностной волне Рэлея.

Итак, плоские продольные волны в бесконечной пластинке могут распространяться со скоростью c, представленной формулой (4), когда длина волны Λ очень велика по сравнению с толщиной пластинки h, и со скоростью поверхностных волн Рэлея, когда длина волны очень мала в сравнении с толщиной. Для длин волн, сравненных с толщиной, имеет место дисперсия, скорость зависит от отношения длины волны к толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости- М. Издательство «Мир», 1975-672с.