

ОЦЕНКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАДИАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТЕЛА ПО ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ДИСКУ

Локтионов А.В., Соколова А.С.

In this work the assessment of methods of calculation the relative radial displacement of the body on a rotating disk is given. Established that the definition of the law of relative motion of the body is simplified with the use of inertia forces in comparison with the solution of the problem using Lagrange equations.

В работах [1-6] изложены различными методами расчеты по определению закона движения тел точечной массы, совершающей сложное движение. Однако, сравнительная оценка методов расчета механической системы с двумя степенями свободы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси в работах не представлены.

Рассмотрим движение системы тел при их вращении вокруг неподвижной оси при условии, что одно из тел системы перемещается в радиальном направлении. Первое тело – диск радиуса r , момент инерции которого I_0 . Второе тело – тело точечной массы m . Уравнение перемещения тела по радиусу диска можно найти, рассматривая относительное движение тела или используя уравнения Лагранжа.

Рассмотрим диск, который вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси Oz (рис. 1). Требуется найти, по какому закону будет двигаться вдоль радиуса диска тело массы m (точка M), помещенное в начальный момент на расстоянии x_0 от точки O , и какой момент $M_{вр}$ должен быть приложен к диску, чтобы он при этом вращался равномерно со скоростью ω .

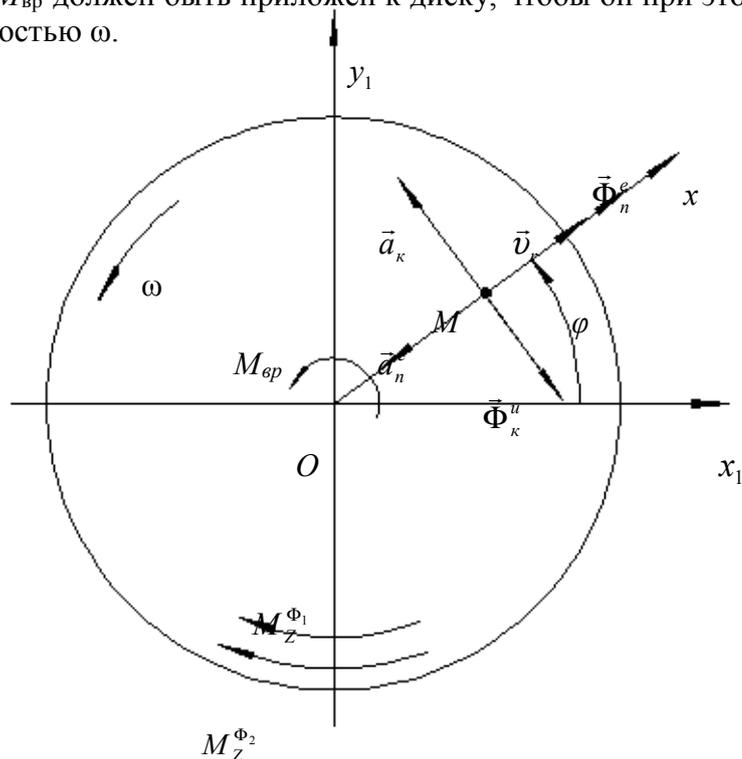


Рис. 1

Составим дифференциальное уравнение относительного движения тела массы m вдоль оси Ox

$$m\bar{a}_r = P + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_k^u, \quad (1)$$

где $P = mg$ – сила тяжести; $\vec{\Phi}_e^n$ – центробежная сила инерции; $\vec{\Phi}_\kappa^u$ – кориолисова сила инерции.

В проекции равенства (1) на ось Ox получим $m\ddot{x} = (\omega^2 x) \cdot m$, где $x = OM$.

Тогда дифференциальное уравнение движения тела будет иметь вид

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0. \quad (2)$$

Его решение будем искать в виде $x = e^{rt}$. Корни характеристического уравнения $r^2 - \omega^2 = 0$ будут иметь вид $r_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2}$. Тогда $x = c_1 e^{rt} + c_2 e^{r_2 t}$.

Общее решение уравнения будет иметь вид

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}. \quad (3)$$

Продифференцировав уравнение (3), получим

$$\dot{x} = c_1 \omega e^{\omega t} - c_2 \omega e^{-\omega t}. \quad (4)$$

Подставив начальные условия ($t = 0, x = x_0, \dot{x} = 0$) в уравнения (3) и (4), будем иметь $x_0 = c_1 + c_2, 0 = c_1 \omega - c_2 \omega$. Получим $c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$. Следовательно, тело движется вдоль радиуса диска по закону

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}). \quad (5)$$

Условие равновесия системы в виде $\sum m_z(\vec{F}_k) = 0$ относительно оси Oz имеет вид $M_{ep} + M_Z^{\Phi_1} + M_Z^{\Phi_2} = 0$, где для диска $M_Z^{\Phi_1} = -I_0 \varepsilon = 0, M_Z^{\Phi_2} = \Phi_\kappa^u x = -2m(\omega \dot{x}) \cdot x$. Тогда $M_{ep} - 2m\omega \dot{x}x = 0$. Откуда получим

$$M_{ep} = 2m\omega \dot{x}x. \quad (6)$$

Выразим \dot{x} через x , с помощью равенств (4) и (5)

$$x^2 = \frac{x_0^2}{4} (e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} + 2), \quad (7)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{x_0^2}{4} \omega^2 (e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}). \quad (8)$$

Из (7) получим $e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} = \frac{4x^2}{x_0^2} - 2$. Подставив в (8), имеем $\dot{x}^2 = \omega^2 (x^2 - x_0^2)$.

Тогда $\dot{x} = \omega \sqrt{x^2 - x_0^2}$.

Окончательно выражение для искомого момента M_{ep} будет иметь следующий вид

$$M_{ep} = 2m\omega^2 x \sqrt{x^2 - x_0^2}. \quad (9)$$

Рассмотрим определение момента M_{ep} , используя уравнения Лагранжа. Как видно из рисунка система имеет две степени свободы (перемещение тела вдоль радиуса диска и поворот диска). Выберем за обобщенные координаты угол φ между OM и осью Ox_1 и расстояние $OC = x$ ($q_1 = \varphi, q_2 = x$).

Дифференциальные уравнения системы в обобщенных координатах (рис.1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Найдем обобщенные силы. При повороте диска на угол $\delta\phi$ приложенный к нему момент совершит элементарную работу $\delta A_1 = M_{ep} \delta\phi$. При перемещении тела массы m на расстояние δx элементарная работа приложенных сил $\delta A_2 = 0$. Следовательно $Q_1 = M_{ep}$, $Q_2 = 0$.

Вычислим кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий диска и тела, где $T_0 = \frac{1}{2} I_O \omega^2$, $T = \frac{1}{2} m v^2$. В этих формулах I_O – момент инерции диска относительно оси Oz ; $\omega = \dot{\phi}$ – угловая скорость вращения диска; v – абсолютная скорость тела массы m .

Хотя определяется закон относительного движения тела вдоль радиуса диска, для составления уравнений Лагранжа следует вычислять кинетическую энергию системы в абсолютном движении – в движении относительно инерциальных осей.

Абсолютная скорость тела $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$, где численно $v_r = \dot{x}$; $v_e = OM \cdot \dot{\phi} = x\dot{\phi}$ (рис.1).

Поэтому

$$v^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2.$$

Окончательно получим следующее выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2).$$

Вычислим частные производные, входящие в уравнения (10)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_O \dot{\phi} + m x^2 \dot{\phi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m x \dot{\phi}^2.$$

Подставляя эти величины и значения Q_1 , Q_2 в уравнения (10) и учтя одновременно,

что $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$, получим уравнения аналогичные (2) и (8).

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega^2 x &= 0, \\ M_{ep} &= 2m\omega \dot{x}. \end{aligned}$$

Интегрируя первое из уравнений и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи, найдем закон движения тела вдоль оси Ox

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Учитывая равенства (7) и (8), найдем $M_{ep} = 2m\omega^2 x \sqrt{x^2 - x_0^2}$, что соответствует формуле (9).

Из равенства (9) следует, что для обеспечения равномерного вращения диска надо по мере продвижения тела вдоль оси Ox увеличивать вращающий момент. От момента инерции диска величина M_{ep} в этом случае не зависит.

Исследованиями установлено, что определение закона относительного движения тела в радиальном направлении и искомого вращающего момента значительно проще с использованием в расчете сил инерции, чем применение для решения поставленной задачи уравнений Лагранжа.

Следует рассмотреть случай когда угловая скорость вращения диска ω изменяется во времени.

Тогда кинетический момент системы

$$L = I\omega, \quad (11)$$

где I момент инерции системы

$$I = I_0 + mr^2. \quad (12)$$

Продифференцировав равенство (11), получим

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} + \frac{dI}{dt} \omega = M^e. \quad (13)$$

Из равенства (13) следует, что угловое ускорение системы

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M^e - \frac{dI}{dt} \omega}{I}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что если $M^e = \frac{dI}{dt} \omega$, то $\frac{d\omega}{dt} = 0$, т.е. $\omega = \text{const}$;

$$M^e > \frac{dI}{dt} \omega, \text{ то } \frac{d\omega}{dt} > 0; \quad M^e < \frac{dI}{dt} \omega, \text{ то } \frac{d\omega}{dt} < 0.$$

Анализ уравнения (14) показывает, что угловое ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил. Оценка влияния сил инерции на кинетические моменты тел системы, а также взаимосвязь момента кориолисовых сил инерции при движении тела массы m радиальном направлении с изменением момента инерции системы и угловой скоростью ω является предметом самостоятельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1983. – 528 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механике / С. М. Тарг. — М. : Высшая школа, 2003. – 416 с.: ил.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: Ч.2 / А. А. Яблонский, В. А. Никифоров. – М. : Высшая школа, 1984. – 423с.
4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: Т. 2: Динамика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2006. – 736с.
5. Гернет, М. М. Курс теоретической механики: учебник для вузов / М. М. Гернет. – М. : Высшая школа, 1981. – 440 с.
6. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1984. – Ч. 2.- 560 с.